REPRESENTACIONES DE GRUPOS FINITOS

MARIANO SUÁREZ-ALVAREZ

Índice

1. Representaciones

Groups, as men, will be known by their actions.
G. Moreno

1.1. Definiciones

Sea G un grupo finito y notemos $e \in G$ a su elemento neutro.

Definición 1.1.1. Una *representación (lineal)* de G es un par (V, ρ) en el que V es un espacio vectorial complejo y $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ es un homomorfismo de grupos con codominio en el grupo $\mathrm{GL}(V)$ de los automorfismos lineales de V.

El espacio V es el *espacio de representación* de la representación (V, ρ) o, también, su *espacio subyacente*, y, si aquél tiene dimensión finita, el número $\dim V \in \mathbb{N}_0$ es el *grado* de la representación. Muchas veces, cuando este abuso de lenguaje no cause confusión, diremos que el espacio V mismo es una representación de G, dejando a la segunda componente del par (V, ρ) implícita. Cuando en esa situación queramos referirnos a ρ, escribiremos ρ_V.

Date: 25 de abril, 2011.

Si V es un espacio vectorial, una función $\alpha : G \times V \to V$ es una *acción lineal* de G sobre V si se tiene, para cada v, $w \in V$, cada g, $h \in G$ y cada $\lambda \in \mathbb{C}$, que

$$\begin{aligned} &\alpha(g, \lambda v) = \lambda\alpha(g, v), && \alpha(g, v + w) = \alpha(g, v) + \alpha(g, w), \\ &\alpha(e, v) = v, && \alpha(g, \alpha(h, v)) = \alpha(gh, v). \end{aligned}$$

Escribiremos generalmente $g \rightharpoonup v$ en lugar de $\alpha(g, v)$.

Los conceptos de representación y de acción lineal son esencialmente equivalentes. Por un lado, una representación (V, ρ) determina una función

$$\alpha : (g, v) \in G \times V \mapsto \rho(g)(v) \in V,$$

que es una acción lineal de G sobre V, como es inmediato verificar. Por otro, si $\alpha : G \times V \to V$ es una acción lineal de G sobre un espacio vectorial complejo V, podemos definir una función $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ de manera que sea $\rho(g)(v) = \alpha(g, v)$ para cada $g \in G$ y cada $v \in V$, y obtener una representación (V, ρ) de G sobre V. Más aún, es fácil verificar que estas dos construcciones son mutuamente inversas.

Una *representación matricial* de G de *grado* n es un homomorfismo $r : G \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ con valores en el grupo $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \subset M_n(\mathbb{C})$ de matrices complejas $n \times n$ inversibles.

Una representación lineal da origen a muchas representaciones matriciales. En efecto, sea (V, ρ) una representación de grado n, sea $\mathscr{B}$ una base ordenada de V y para cada $f \in \mathrm{End}(V)$ escribamos $\|f\|_B \in M_n(\mathbb{C})$ a la matriz de f con respecto a $\mathscr{B}$. Si $g \in G$, entonces la aplicación lineal $\rho(g) : V \to V$ es un automorfismo y, en consecuencia, la matriz $\|\rho(g)\|_{\mathscr{B}}$ es inversible, esto es, es un elemento de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$. Así, ρ y $\mathscr{B}$ determinan una función $\rho_{\mathscr{B}} : G \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ tal que $\rho_{\mathscr{B}}(g) = \|\rho(g)\|_{\mathscr{B}}$ para todo $g \in G$, que es claramente un homomorfismo de grupos. Decimos que $\rho_{\mathscr{B}}$ es la representación matricial de G correspondiente a (V, ρ) y a la base $\mathscr{B}$.

Recíprocamente, una representación matricial $r : G \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ determina una representación $(\mathbb{C}^n, \rho)$ de G sobre el espacio $\mathbb{C}^n$ en la que $\rho : G \to \mathrm{GL}(\mathbb{C}^n)$ está dada por $\rho(g)(v) = r(g) \cdot v$ para cada $g \in G$ y cada $v \in \mathbb{C}^n$; el producto $\cdot$ que aparece aquí es el producto usual de matrices y vectores. Es inmediato verificar que si $\mathscr{B}$ es la base ordenada canónica de $\mathbb{C}^n$, entonces la representación matricial $\rho_{\mathscr{B}}$ de G correspondiente a $(\mathbb{C}^n, \rho)$ y a $\mathscr{B}$ es precisamente el homomorfismo r.

Ejemplo 1.1.2. Si V es un espacio cualquiera, hay una representación $(V, \rho_{\mathsf{triv}})$ de G en la que $\rho_{\mathsf{triv}} : G \to \mathrm{GL}(V)$ es el homomorfismo trivial, de manera que $\rho_{\mathsf{triv}}(g) = \mathsf{id}_V$ para todo $g \in G$. Decimos en este caso que G *actúa trivialmente* sobre V y que $(V, \rho_{\mathsf{triv}})$ es la *representación trivial* de G sobre V. En particular, llamamos a la representación $(\mathbb{C}, \rho_{\mathsf{triv}})$ sobre $V = \mathbb{C}$ simplemente *la* representación trivial. □

Ejemplo 1.1.3. Si $V = 0$ es el espacio nulo, entonces el grupo $\mathrm{GL}(V)$ es trivial, su único elemento es id_V y hay entonces exactamente un homomorfismo de grupos $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$. Decimos que la representación correspondiente (V, ρ) es la *representación nula.* □

Ejemplo 1.1.4. Si V es un espacio vectorial y $G \subseteq \mathrm{GL}(V)$ es un subgrupo finito, entonces la inclusión $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ es un homomorfismo de grupos. Tenemos entonces una representación (V, ρ) de G sobre V. □

Ejemplo 1.1.5. Dupongamos que X es un conjunto finito y que $\alpha : G \times X \to X$ es una acción de G sobre X. Recordemos que esto significa, si escribimos $g \cdot x$ en lugar de $\alpha(g, x)$, que se tiene

$$e \cdot x = x, \qquad g \cdot (h \cdot x) = gh \cdot x \tag{1}$$

para cada $x \in X$ y cada g, $h \in G$. Sea $\mathbb{C}X$ el espacio vectorial que tiene como base al conjunto X, cuyos elementos son las combinaciones lineales formales $\sum_{x \in X} a_x x$ de elementos de X con coeficientes a_x en $\mathbb{C}$. Para cada $g \in G$ hay una única aplicación lineal $m_g : \mathbb{C}X \to \mathbb{C}X$ tal que $m_g(x) = g \cdot x$ si $x \in X$, ya que X es una base de $\mathbb{C}X$, y, como la imagen por m_g de X

es el conjunto X mismo, es claro que m_g es un automorfismo de $\mathbb{C}X$. Podemos entonces definir una función $\rho_\alpha : G \to \mathrm{GL}(\mathbb{C}X)$ de manera que sea $\rho_\alpha(g) = m_g$ para cada $g \in G$. Es fácil verificar que las condiciones (1) satisfechas por la acción α de G sobre el conjunto X implican que ρ_α es un homomorfismo de grupos. Obtenemos así una representación $(\mathbb{C}X, \rho_\alpha)$ de G sobre $\mathbb{C}X$, a la que llamamos la *representación por permutación* correspondiente a X y la acción α. El grado de $\mathbb{C}X$ es el cardinal $|X|$ de X.

Si $X = G$ y si la acción $\alpha : G \times X \to X$ está dada por $\alpha(g, x) = gx$, entonces llamamos a la representación $(\mathbb{C}G, \rho_\alpha)$ la *representación regular* de G. □

1.2. Morfismos

Definición 1.2.1. Si (V, ρ_V) y (W, ρ_W) son representaciones de G, un *morfismo de representaciones* $\phi : (V, \rho_V) \to (W, \rho_W)$ es una aplicación lineal $\phi : V \to W$ entre los espacios vectoriales subyacentes tales que para cada $g \in G$ es

$$\phi \circ \rho_V(g) = \rho_W(g) \circ \phi.$$

Si, más aún, ϕ es biyectiva, decimos que ϕ es un *isomorfismo* de representaciones. Escribimos $\hom_G((V, \rho_V), (W, \rho_W))$, o simplemente $\hom_G(V, W)$, al subconjunto de $\hom(V, W)$ de los morfismos de representaciones.

En la situación de la definición, denotemos $\rightharpoonup_V$ y $\rightharpoonup_W$ a las acciones lineales de G sobre V y sobre W correspondientes a las representaciones (V, ρ_V) y (W, ρ_W), respectivamente. Entonces una aplicación lineal $\phi : V \to W$ es un morfismo de representaciones sii para cada $g \in V$ y cada $v \in V$ se tiene que

$$\phi(g \rightharpoonup_V v) = g \rightharpoonup_W \phi(v).$$

De manera similar, podemos expresar la condición de que ϕ sea un morfismo de representaciones en términos de representaciones matriciales. Sean $n = \dim V$ y $m = \dim W$, sean $\mathscr{B}$ y $\mathscr{B}'$ bases ordenadas de V y de W, y sean $(\rho_V)_{\mathscr{B}} : G \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ y $(\rho_W)_{\mathscr{B}'} : G \to \mathrm{GL}(m, \mathbb{C})$ las representaciones matricales correspondientes a (V, ρ_V) y $\mathscr{B}$, y a (W, ρ_W) y $\mathscr{B}'$, respectivamente. Escribamos además $\|\phi\|_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ a la matriz de ϕ con respecto a $\mathscr{B}$ y $\mathscr{B}'$. Entonces ϕ es un morfismo de representaciones si y solo si

$$\|\phi\|_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} \cdot (\rho_V)\mathscr{B}(g) = (\rho_W)_{\mathscr{B}'}(g) \cdot \|\phi\|_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$$

para cada $g \in G$; aquí $\cdot$ es el producto de matrices.

Proposición 1.2.2. *Sean (V, ρ_V), (W, ρ_W), (U, ρ_U) representaciones de G.*

(i) La función identidad $\mathsf{id}_V : V \to V$ es un morfismo de representaciones.

(ii) Si $\phi : V \to W$ y $\psi : W \to U$ son morfismos de representaciones, entonces la composición $\psi \circ \psi : V \to U$ es un morfismo de representaciones.

(iii) El subconjunto $\hom_G(V, W)$ de $\hom(V, W)$ es un subespacio vectorial.

(iv) Si $f : V \to W$ es un isomorfismo de representaciones, entonces la función inversa $f^{-1} : W \to V$ también lo es.

Demostración. □

Ejemplo 1.2.3. Consideremos la representación trivial $(\mathbb{C}, \rho_{\mathsf{triv}})$ y la representación regular $(\mathbb{C}G, \rho_{\mathsf{reg}})$. Sea $t = \sum_{h \in G} h \in \mathbb{C}G$ y sea $\phi_0 : \lambda \in \mathbb{C} \mapsto \lambda t \in \mathbb{C}G$. Si $g \in G$ y $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces $\phi_0(g \rightharpoonup \lambda) = \phi_0(\lambda) = \lambda t = g \rightharpoonup \lambda t$: esto muestra que ϕ_0 es un morfismo de representaciones, de manera que $\phi_0 \in \hom_G(\mathbb{C}, \mathbb{C}G)$.

De hecho, en esta situación podemos ver que $\hom_G(\mathbb{C}, \mathbb{C}G)$ es un subespacio de $\hom(\mathbb{C}, \mathbb{C}G)$ generado por ϕ_0, de manera que en particular tiene dimensión 1. En efecto, supongamos que $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}G$ es un morfismo de representaciones, y sea $s = \phi(1) \in \mathbb{C}G$. Como G es una base de $\mathbb{C}G$, existen escalares a_h, $h \in G$, tales que $s = \sum_{h\in G} a_h h$. Si $g \in G$, entonces, como ϕ es un morfismo,

$$\sum_{h\in G} a_h h = \phi(1) = \phi(g \rightharpoonup 1) = g \rightharpoonup \phi(1) = g \rightharpoonup \sum_{h\in G} a_h h = \sum_{h\in G} a_{g^{-1}h} h.$$

El conjunto G es una base de $\mathbb{C}G$, asi que esto implica que $a_h = a_{g^{-1}h}$ para todo $h \in G$; en particular, tomando $h = g$ vemos que $a_g = a_e$. Esto es cierto para cada $g \in G$, así que en definitiva tenemos que $s = a_e t$ y, entonces, $\phi = a_e \phi_0$. Esto muestra que $\hom_G(\mathbb{C}, \mathbb{C}G)$ está generado por ϕ_0, como afirmamos. ☐

1.3. Subrepresentaciones

Proposición 1.3.1. *Sea (V, ρ) una representación de G, sea $W \subseteq V$ un subespacio vectorial y supongamos que*

$$\text{para cada } g \in G \text{ se tiene que } \rho(g)(W) \subseteq W. \tag{2}$$

Hay entonces una función $\rho_W : G \to \mathrm{GL}(W)$ tal que $\rho_W(g) = \rho(g)|_W$ para cada $g \in G$, el par (W, ρ_W) es una representación de G en W y la inclusión $\iota : W \to V$ es un morfismo de representaciones.

De hecho, es fácil verificar que en esta sitación el subespacio W puede dotarse de una *única* estructura de representación de G tal que la inclusión ι resulte un morfismo de representaciones.

Demostración. ☐

Definición 1.3.2. Si (V, ρ) es una representación de G y $W \subseteq V$ es un subespacio vectorial. Si W satisface la condición (2) de la proposición anterior, decimos que W es una *subrepresentación* de V o, también, que W es *G-invariante*.

Si W es una subrepresentación de (V, ρ), entonces W es el espacio subyacente a una representación (W, ρ_W), con ρ_W determinada por ρ como en la proposición. En todo lo que sigue, siempre que tengamos una subrepresentación de una representación, la considereraremos implicitamente a ella misma como una representación de esta manera.

Sea (V, ρ) una representación y sea $W \subseteq V$ un subespacio G-invariante. Sean $n = \dim V$ y $m = \dim W$, y sea $\rho_W : G \to \mathrm{GL}(W)$ la representación de G sobre W. Podemos elegir una base $\mathscr{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ de V de manera que el subconjunto $\mathscr{B}' = \{v_1, \dots, v_m\}$ sea una base de W. Si $\rho_{\mathscr{B}} : G \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ es la representación matricial correspondiente a V y a $\mathscr{B}$, y $(\rho_W)_{\mathscr{B}'} : G \to \mathrm{GL}(m, \mathbb{C})$ es la representación matricial correspondiente a W y a $\mathscr{B}'$, entonces como W es invariante, para cada $g \in G$ la matriz $\rho_{\mathscr{B}}(g)$ es una matriz de bloques de la forma

$$\left(\begin{array}{c:c} (\rho_W)_{\mathscr{B}'}(g) & * \\ \hdashline 0 & * \end{array}\right)$$

Definición 1.3.3. Sea V una representación. Si $W \subseteq V$ es una subrepresentación, decimos que W es *propia* si $W \subsetneq V$ y que es *nula* si $W = 0$. Por otro lado, V es *simple* si $V \neq 0$ y no posee subrepresentaciones propias y no nulas.

Ejemplo 1.3.4. Si V es una representación, el subespacio nulo $0 \subseteq V$ y el espacio total V mismo son subrepresentaciones de V. Esto implica inmediatamente que V es simple si tiene *exactamente* dos subrepresentaciones distintas. ☐

Ejemplo 1.3.5. Una representación de grado 1 es siempre simple. Por otro lado, una representación trivial V es simple si y solo si $\dim V = 1$: en efecto, si $\dim V > 1$, existe un subespacio $W \subset V$ tal que $0 \subsetneq W \subsetneq V$ y es inmediato que W es G-invariante. ☐

Ejemplo 1.3.6. Si (V, ρ) es una representación, escribimos

$$V^G = \{v \in V : \text{para todo } g \in G \text{ es } g \rightharpoonup v = v\}.$$

Es fácil ver que V^G es una subrepresentación de V y que es, de hecho, la subrepresentación más grande de V sobre la que G actúa trivialmente. □

Ejemplo 1.3.7. Supongamos que G actúa sobre un conjunto finito X, como en el ejemplo 1.1.5, y sea $\mathbb{C}X$ la correspondiente representación de G. Afirmamos que $\mathbb{C}X$ es simple sii $|X| = 1$. La condición es suficiente, ya que cuando $|X| = 1$ es $\dim \mathbb{C}X = 1$. Por otro lado, si $|X| = 1$, entonces el subespacio $T \subset \mathbb{C}X$ generado por el elemento $t = \sum_{x \in X} x$ es una subrepresentación y, como $\dim T = 1 < \dim \mathbb{C}X$, se trata de una subrepresentación propia. □

Proposición 1.3.8. *Sean V y W representaciones y sea $f : V \to W$ un morfismo de representaciones. Entonces el núcleo* $\ker f$ *es una subrepresentación de V y la imagen* $\operatorname{im} f$ *es una subrepresentación de W.*

Demostración. □

Una aplicación inmediata de esta proposición es el llamado Lema de Schur, una de las herramientas fundamentales de toda la teoría:

Teorema 1.3.9 (Lema de Schur). *Sean (V, ρ_V) y (W, ρ_W) dos representaciones simples.*

- (i) *Un morfismo no nulo $\phi : V \to W$ de representaciones es un isomorfismo.*
- (ii) *Si $\phi : V \to V$ es un endomorfismo de representaciones, entonces existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $\phi = \lambda \,\mathsf{id}_V$.*

Demostración. (i) Como ϕ no es nulo, es $\ker \phi \subsetneq V$: como V es simple y $\ker \phi$ es una subrepresentación de V, esto implica que necesariamente $\ker \phi = 0$. Por otro lado, $\operatorname{im} \phi \neq 0$ porque, otra vez, ϕ no es nulo, y como $\operatorname{im} \phi$ es una subrepresentación de la representación simple W, debe ser $\operatorname{im} \phi = W$. Vemos así que ϕ es un isomorfismo.

(ii) Como $\mathbb{C}$ es algebraicamente cerrado, existen $\lambda \in \mathbb{C}$ y $v_0 \in V$ tales que $\phi(v_0) = \lambda v_0$. En consecuencia, la aplicación lineal $\phi - \lambda \,\mathsf{id}_V : V \to V$ no es biyectiva. Si $g \in G$ y $v \in V$, entonces

$$\begin{aligned}(\phi - \lambda \,\mathsf{id}_V)(g \rightharpoonup v) &= \phi(g \rightharpoonup v) - \lambda(g \rightharpoonup v) \\ &= g \rightharpoonup \phi(v) - g \rightharpoonup (\lambda v) \\ &= g \rightharpoonup (\phi - \lambda \,\mathsf{id}_V)(v).\end{aligned}$$

Vemos así que $\phi - \lambda \,\mathsf{id}_V$ es un morfismo de representaciones y la parte (i) del teorema implica entonces que $\phi - \lambda \,\mathsf{id}_V = 0$: esto prueba la parte (ii). □

Ejemplo 1.3.10. Supongamos que G actúa sobre el conjunto finito X. Supongamos además que $Y \subseteq X$ es un subconjunto G-invariante, esto es, tal que

$$g \in G,\ y \in Y \implies g \cdot y \in Y.$$

El subespacio $\mathbb{C}Y = \langle y : y \in X \rangle$ de $\mathbb{C}X$ generado por los elementos de Y es entonces una subrepresentación. □

Ejemplo 1.3.11. Sea X un conjunto finito sobre el que G actúa y sea $f : \mathbb{C}X \to \mathbb{C}$ la aplicación lineal tal que $f(x) = 1$ para todo $x \in X$. Es fácil verificar que f es un morfismo de representaciones, así que $W = \ker f$ es una subrepresentación de $\mathbb{C}X$; explícitamente, es

$$W = \Big\{ \sum_{x \in X} \lambda_x x \in \mathbb{C}X : \sum_{x \in X} \lambda_x = 0 \Big\}.$$

El grado de W es claramente $\dim \ker f = \dim \mathbb{C}X - \dim \mathbb{C} = |X| - 1$. En particular, W es no nula exactamente cuando $|X| > 1$. □

Proposición 1.3.12. *Toda representación no nula de G contiene subrepresentaciones simples.*

Demostración. Sea V una representación. Probemos que V posee al menos una subrepresentación simple $U \subseteq V$ haciendo inducción sobre el grado $n = \dim V$. Cuando $n = 1$, podemos tomar $U = V$. Supongamos entonces que $n > 1$.

Si V es simple, podemos elegir otra vez $U = V$. Si en cambio V no es simple, entonces posee una subrepresentación $V' \subseteq V$ propia y no nula. En particular, $\dim V' < \dim V$, así que la hipótesis inductiva implica que V' posee una subrepresentación simple $U \subseteq V'$. Pero entonces U es una subrepresentación simple de V, que es lo que buscábamos. □

1.4. Completa reducibilidad

Definición 1.4.1. Decimos que una representación V es *descomponible* si existen subrepresentaciones no nulas W y U tales que $V = W \oplus U$, y que es *indescomponible* en caso contrario.

Ejemplo 1.4.2. Sea X un conjunto finito sobre el que G actúa, y consideremos la relación $\sim$ en X tal que si x, $y \in X$ es

$$x \sim y \iff \text{existe } g \in G \text{ tal que } g \cdot x = y.$$

Se trata de una relación de equivalencia, así que determina una partición Π de X. Más aún, es claro que para cada parte $Y \in \Pi$ se tiene que

$$g \in G,\, y \in Y \implies g \cdot y \in Y,$$

de manera que, como en el ejemplo 1.3.10, el subespacio $\mathbb{C}Y = \langle y \in Y \rangle$ de $\mathbb{C}X$ es G-invariante. Puede verse fácilmente que $\mathbb{C}X$ es la suma directa de los subespacios $\mathbb{C}Y$ con $Y \in \Pi$. □

Ejemplo 1.4.3. Sea otra vez X un conjunto finito sobre el que G actúa, y supongamos que $|X| > 1$. En el ejemplo 1.3.7 construimos una subrepresentación T de $\mathbb{C}X$ de grado 1, generada en tanto espacio vectorial por el elemento $t = \sum_{x \in X} x$, y en el ejemplo 1.3.7 construimos una subrepresentación

$$W = \Big\{ \sum_{x \in X} \lambda_x x \in \mathbb{C}X : \sum_{x \in X} \lambda_x = 0 \Big\}.$$

de grado $|X| - 1$. Es inmediato verificar que $T \cap W = 0$, y que $T + W = \mathbb{C}X$, de manera que $\mathbb{C}X = T \oplus W$. Así, como T y W son subrepresentación propias, $\mathbb{C}X$ es descomponible. □

Se sigue inmediatamente de las definiciones que una representación simple es indescomponible. Un resultado fundamental de la teoría es que la afirmación recíproca tambien es cierta. Para obtener este resultado, que enunciamos en el Corolario 1.4.7 más abajo, necesitamos establecer antes algunos resultados preliminares.

Lema 1.4.4. *Sean (V, ρ_V) y (W, ρ_W) dos representaciones, y sea $f : V \to W$ una aplicación lineal. Entonces la función lineal $\hat{f} : V \to W$ dada por*

$$\hat{f} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho_W(g) \circ f \circ \rho_V(g^{-1})$$

es un morfismo de representaciones. Más aún, si $(W, \rho_W) = (V, \rho_V)$, entonces

$$\operatorname{tr} \hat{f} = \operatorname{tr} f.$$

Demostración. Denotemos $\rightharpoonup_V$ y $\rightharpoonup_W$ a las acciones lineales de G sobre V y sobre W correspondientes a las representaciones (V, ρ_V) y (W, ρ_W).

Si $h \in G$ y $v \in V$, entonces

$$\begin{aligned} \hat{f}(h \rightharpoonup_V v) &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \rightharpoonup_W f(g^{-1} \rightharpoonup_V (h \rightharpoonup_V v)) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \rightharpoonup_W f(g^{-1} h \rightharpoonup_V v) \end{aligned}$$

y, poniendo $k = h^{-1}g$, esto es

$$= \frac{1}{|G|}\sum_{k\in G} hk \rightharpoonup_W f(k^{-1} \rightharpoonup_V v)$$
$$= h \rightharpoonup_W \frac{1}{|G|}\sum_{k\in G} k \rightharpoonup_W f(k^{-1} \rightharpoonup_V v)$$
$$= h \rightharpoonup_W \hat{f}(v).$$

Vemos de esta forma que $\hat{f}$ es un morfismo.

Para terminar, supongamos que $(W, \rho_W) = (V, \rho_V)$. Si $g \in G$, tenemos que

$$\operatorname{tr}\big(\rho_V(g) \circ f \circ \rho_V(g^{-1})\big) = \operatorname{tr}\big(\rho_V(g^{-1}) \circ \rho_V(g) \circ f\big) = \operatorname{tr} f,$$

de manera que

$$\operatorname{tr} \hat{f} = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \operatorname{tr}\big(\rho_V(g) \circ f \circ \rho_V(g^{-1})\big) = \operatorname{tr} f. \qquad \square$$

Proposición 1.4.5. *Sea V una representación de G y sea $W \subseteq V$ un subespacio G-invariante. Entonces existe otro subespacio G-invariante $U \subseteq V$ tal que $V = W \oplus U$.*

Demostración. Fijemos una aplicación lineal $p : V \to V$ tal que $p \circ p = p$ y cuya imagen es el subespacio W; en particular, se tendrá que $p(w) = w$ para todo $w \in W$. Por ejemplo, si $\dim V = n$ y $\dim W = r$, existe una base $\{v_1, \dots, v_n\}$ de V tal que $\{v_1, \dots, v_r\}$ es una base de W, y podemos considerar la aplicación lineal $p : V \to V$ tal que $p(v_i) = v_i$ para cada $i \in \{1, \dots, r\}$ y tal que $p(v_i) = 0$ si $i \in \{r + 1, \dots, n\}$.

Consideremos además la función lineal $\hat{p} : V \to V$ tal que

$$\hat{p}(v) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g \rightharpoonup p(g^{-1} \rightharpoonup v)$$

para todo $v \in V$. Mostremos que $U = \ker \hat{p}$ es una subrepresentación de V y que $V = W \oplus U$: esto probará la proposición.

- Para ver que U es una subrepresentación, es suficiente —de acuerdo a la Proposicion 1.3.8— con observar que $\hat{p}$ es un morfismo de representaciones, y esto es consecuencia del Lema 1.4.4.
- La aplicación $\hat{p}$ tiene imagen W y es $\hat{p} \circ \hat{p} = \hat{p}$. En efecto, como la imagen de p es W y W es G-invariante, es claro que para todo $v \in V$ es $\hat{p}(v) \in W$. Por otro lado, si $w \in W$ y $g \in G$, es $g^{-1} \rightharpoonup w \in W$ y, en consecuencia, $p(g^{-1} \rightharpoonup w) = g^{-1} \rightharpoonup w$; se sigue entonces que para cada $w \in W$ se tiene que

  $$\hat{p}(w) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g \rightharpoonup p(g^{-1} \rightharpoonup w) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g \rightharpoonup g^{-1} \rightharpoonup w = w.$$

  Ahora, si $v \in W \cap U$, entonces $p(v) = v$ porque $v \in W$, y $p(v) = 0$ porque $v \in U$: vemos así que $W \cap U = 0$. En segundo lugar, si $v \in V$, entonces $\hat{p}(v - \hat{p}(v)) = \hat{p}(v) - \hat{p}(\hat{p}(v)) = 0$ porque $\hat{p}(v) \in W$, de manera que $v - \hat{p}(v) \in U$, y $\hat{p}(v) \in W$ porque la imagen de $\hat{p}$ es W: entonces $v = \hat{p}(v) + (v - \hat{p}(v)) \in W + U$ y esto nos dice que $V \subseteq W + U$. $\square$

Teorema 1.4.6. *Toda representación de G es suma directa de subrepresentaciones simples.*

Clásicamente, este teorema se enuncia diciendo que toda representación es *completamente reducible.*

Demostración. Sea V una representación y sea $n = \dim V$. Mostremos que V es suma directa de subrepresentaciones simples haciendo inducción en n. Si $n = 0$ no hay nada que probar, así que podemos suponer que $n > 0$.

De acuerdo a la Proposicion 1.3.12, existe una subrepresentación simple $W \subseteq V$. Si $W = V$, entonces V es simple, y por supuesto es suma directa de subrepresentaciones simples. Si, en cambio, $W \subsetneq V$, la Proposición 1.4.5 nos dice que existe una subrepresentación $U \subseteq V$ tal que $V = W \oplus U$. Ahora bien, $\dim U < \dim V$, así que inductivamente podemos suponer que existen $m \geq 1$ y subrepresentaciones $U_1, \dots, U_m \subseteq U$ tales que $U = U_1 \oplus \cdots \oplus U_m$. Pero entonces $V = W \oplus U_1 \oplus \cdots \oplus U_m$ es suma directa de subrepresentaciones simples, como queríamos probar. Esto completa la inducción. □

La descomposición de una representación como suma directa de subrepresentaciones simples no es única. Por ejemplo, si V es una representación trivial de dimensión 2, entonces todo subespacio de V de dimensión 1 es una subrepresentación de V, y si U_1 y U_2 son dos tales subespacios distintos, entonces $V = U_1 \oplus U_2$.

Corolario 1.4.7. *Una representación es simple si y solamente si es indescomponible.*

Demostración. Es claro que una representación simple es indescomponible. Por otro lado, una representación descomponible, siendo suma directa de dos subrepresentaciones propias y no nulas, no es simple. □

1.5. Construcciones

Suma directa

Si (V, ρ_V) y (W, ρ_W) son dos representaciones de G, podemos hay una representación $(V \oplus W, \rho)$ sobre el espacio vectorial suma directa (externa) $V \oplus W$, cuyo homomorfismo de grupos $\rho : G \to \mathrm{GL}(V \oplus W)$ es tal que para cada $g \in G$ es

$$\rho(g) = \begin{pmatrix} \rho_V(g) & 0 \\ 0 & \rho_W(g) \end{pmatrix}.$$

Es fácil verificar que las inclusiones $i_V : V \to V \oplus W$ $i_V : W \to V \oplus W$ y las proyecciones $p_V : V \oplus W \to V$ y $p_W : V \oplus W \to W$ son morfismos de representaciones.

Espacios de homomorfismos

Sean (V, ρ_V) y (W, ρ_W) dos representaciones, y consideremos el espacio vectorial $\hom(V, W)$ de todas las aplicaciones lineales $V \to W$. Consideremos la función $\rho : G \to \mathrm{GL}(\hom(V, W))$ tal que

$$\rho(g)(f) = \rho_W(g) \circ f \circ \rho_V(g^{-1})$$

para cada $g \in G$ y cada $f \in \hom(V, W)$. Es fácil verificar que ρ está bien definida y que se trata de un homomorfismo de grupos, así que tenemos una representación $(\hom(V, W), \rho)$ de G sobre $\hom(V, W)$. Siempre que veamos a $\hom(V, W)$ como representación de G será con respecto a esta estructura.

Notemos que si $\rightharpoonup_V$ y $\rightharpoonup_W$ son las acciones de G sobre V y W, respectivamente, y $\rightharpoonup$ es la acción de G sobre $\hom(V, W)$, entonces para cada $g \in G$, cada $f \in \hom(V, W)$ y cada $v \in V$ se tiene que $(g \rightharpoonup f)(v) = g \rightharpoonup_W f(g^{-1} \rightharpoonup_V v)$.

Proposición 1.5.1. *Si (V, ρ_V) y (W, ρ_W) son representaciones, entonces*

$$\hom_G(V, W) = \hom(V, W)^G.$$

El espacio $\hom(V, W)^G$ que aparece a la derecha en esta igualdad es el subespacio de invariantes de la representación $\hom(V, W)$ definido en el Ejemplo 1.3.6.

Demostración. Sea $f \in \hom(V, W)$. Entonces $f \in \hom(V, W)^G$ sii para todo $g \in G$ es $f = g \rightharpoonup f$, y esto ocurre cuando para todo $v \in V$ se tiene que

$$f(v) = (g \rightharpoonup f)(v) = g \rightharpoonup_W f(g^{-1} \rightharpoonup_V v).$$

Es inmediato que está última condición se cumple exactamente cuando f es un morfismo de representaciones, esto es, cuando $f \in \hom_G(V, W)$. □

Espacio dual

Un caso particular de la construcción anterior es aquél en el que la representación (W, ρ_W) es la representación trivial $(\mathbb{C}, \rho_{\mathsf{triv}})$. Es entonces $\hom(V, \mathbb{C})$ el espacio dual de V, que notamos simplemente V'. Si $(- \mid -) : V' \times V \to \mathbb{C}$ es la evaluación y si $\rightharpoonup_V$ y $\rightharpoonup_{V'}$ son las acciones de G sobre V y V', entonces para cada $f \in V'$ y cada $v \in V$ es

$$(g \rightharpoonup_{V'} f \mid v) = (f \mid g^{-1} \rightharpoonup_V v).$$

Lema 1.5.2. *Sea (V, ρ_V) una representación, sea $(V', \rho_{V'})$ su representación dual, y sea $(V'', \rho_{V''})$ la representación de ésta última. El isomorfismo canónico de espacios vectoriales $\xi : V \to V''$ es un isomorfismo de representaciones.*

Demostración. Recordemos que la función ξ está determinada por la condición de que para todo $v \in V$ y todo $f \in V'$ es $\xi(v)(f) = (f \mid v)$.

Sea $g \in G$ y $v \in V$. Si $f \in V'$, entonces

$$\begin{aligned}(g \rightharpoonup \xi(v))(f) &= \xi(v)(g^{-1} \rightharpoonup f) \\ &= (g^{-1} \rightharpoonup f \mid v) \\ &= (f \mid g \rightharpoonup v) \\ &= \xi(g \rightharpoonup v)(f),\end{aligned}$$

así que $g \rightharpoonup \xi(v) = \xi(g \rightharpoonup v)$. Esto nos dice que ξ es un morfismo de representaciones, y el lema sigue de esto. □

Proposición 1.5.3. *Sea (V, ρ_V) una representación, sea $(V', \rho_{V'})$ la representación dual. Entonces V es simple si y solamente si V' es simple.*

Demostración. Supongamos que V no es simple y sea $W \subsetneq V$ una subrepresentación propia no nula. Sea $W^\perp = \{f \in V' : (f \mid w) = 0 \text{ para todo } w \in W\}$.

Si $f \in W^\perp$ y $g \in G$, entonces para cada $w \in W$ tenemos que

$$(g \rightharpoonup f \mid w) = (f \mid g^{-1} \rightharpoonup w) = 0$$

porque $g^{-1} \rightharpoonup w \in W$, de manera que $g \rightharpoonup f \in W^\perp$. Es así $W^\perp$ una subrepresentación de V' y, como $0 \subsetneq W^\perp \subseteq V'$, concluimos que V' no es simple.

Ahora bien, usando lo ya hecho, sabemos que si V' no es simple, entonces V'' tampoco lo es y, en vista del Lema 1.5.2, esto nos dice que la representación V misma no es simple. Esto completa la prueba. □

Productos tensoriales

Sean (V, ρ_V) y (W, ρ_W) dos representaciones y sea $V \otimes W$ el producto tensorial de los espacios vectoriales subyacentes. Hay un homomorfismo de grupos $\rho : G \to \mathrm{GL}(V \otimes W)$ tal que para cada $g \in G$ es $\rho(g) = \rho_V(g) \otimes \rho_W(g)$, así que tenemos una representación $(V \otimes W, \rho)$. Si $\rightharpoonup_V$ y $\rightharpoonup_W$ son las acciones de G sobre V y W, respectivamente, entonces la acción de G sobre $V \otimes W$ está dada por

$$g \rightharpoonup v \otimes w = (g \rightharpoonup_V v) \otimes (g \rightharpoonup_W w)$$

para cada $g \in W$, cada $v \in V$ y cada $w \in W$.

Las propiedades formales usuales que relacionan a hom con $\otimes$ se preservan al extenderlos de los espacios vectoriales a las representaciones lineales de un grupo:

Proposición 1.5.4. *Sean (V, ρ_V), (W, ρ_W) y (U, ρ_U) representaciones de G.*

(*i*) *El isomorfismo canónico de espacios vectoriales*

$$\Phi : \hom(V \otimes W, U) \to \hom(V, \hom(W, U))$$

es un isomorfismo de representaciones.

(*ii*) *El isomorfismo canónico*

$$\Psi : V' \otimes W \to \hom(V, W)$$

es un isomorfismo de representaciones.

Demostración. (*i*) Recordemos que Φ es la transformación lineal tal que

$$\Phi(f)(v)(w) = f(v \otimes w)$$

si $f \in \hom(V \otimes W, U)$, $v \in V$ y $w \in W$. Para probar la proposición, hay que probar Φ es un morfismo de representaciones: sea $g \in G$ y mostremos que $\Phi(g \rightharpoonup f) = g \rightharpoonup \Phi(f)$ para cada $f \in \hom(V \otimes W, U)$ y, para ello, que $\Phi(g \rightharpoonup f)(v)(w) = (g \rightharpoonup \Phi(f))(v)(w)$ para cada $v \in V$ y cada $w \in W$. Esto sigue de un cálculo directo, ya que

$$\begin{aligned} \Phi(g \rightharpoonup f)(v)(w) &= (g \rightharpoonup f)(v \otimes w) \\ &= g \rightharpoonup f(g^{-1} \rightharpoonup v \otimes w) \\ &= g \rightharpoonup f((g^{-1} \rightharpoonup v) \otimes (g^{-1} \rightharpoonup w)) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} (g \rightharpoonup \Phi(f))(v)(w) &= \big(g \rightharpoonup \Phi(f)(g^{-1} \rightharpoonup v)\big)(w) \\ &= g \rightharpoonup \Phi(f)(g^{-1} \rightharpoonup v)(g^{-1} \rightharpoonup w) \\ &= g \rightharpoonup f\big((g^{-1} \rightharpoonup v) \otimes (g^{-1} \rightharpoonup w)\big) \end{aligned}$$

(*ii*) La aplicación Ψ es tal que

$$\Psi(f \otimes w)(v) = (f \mid v)w$$

para cada $f \in V'$, cada $v \in V$ y cada $w \in W$. Para ver que se trata de un isomorfismo de representaciones basta mostrar que es un morfismo, ya que sabemos que es biyectiva, y para ello hay que probar que $\Psi(g \rightharpoonup f \otimes w) = g \rightharpoonup \Psi(f \otimes w)$ para todo $g \in G$. Esta es una igualdad de elementos de $\hom(V, W)$: para verificarla, sea $v \in V$ y calculemos:

$$\begin{aligned} \Psi(g \rightharpoonup f \otimes w)(v) &= \Psi((g \rightharpoonup f) \otimes (g \rightharpoonup w))(v) \\ &= (g \rightharpoonup f \mid v)(g \rightharpoonup w) \\ &= (f \mid g^{-1} \rightharpoonup v)(g \rightharpoonup w) \\ &= g \rightharpoonup (f \mid g^{-1} \rightharpoonup v)w \\ &= g \rightharpoonup \Psi(f \otimes w)(g^{-1} \rightharpoonup v) \\ &= (g \rightharpoonup \Psi(f \otimes w))(v). \end{aligned}$$

□

Restricción

Supongamos que $H \subseteq G$ es un subgrupo y que (V, ρ_V) es una representación de G. Entonces podemos considerar la restricción $\rho_V|_H : G \to \mathrm{GL}(V)$ de ρ_V al subgrupo H, que nos da una representación $(V, \rho_V|_H)$ de H sobre V. Llamamos a $(V, \rho_V|_H)$ la *restricción* de (V, ρ_V) a H, y la escribimos $V{\downarrow_H}$. Más generalmente, si $\phi : H \to G$ es un homomorfismo de grupos y (V, ρ_V) es una representación de G, entonces hay una representación $(V, \rho_V \circ \phi)$ de G, que escribimos $\phi^*(V)$ y llamamos la *restricción de* (V, ρ) *a lo largo de* ϕ.

Notemos que si $H \subseteq G$ es un subgrupo e $\iota : H \to G$ es la inclusión, para cada representación (V, ρ_G) de G la restricción $\iota^*(V)$ de V a lo largo de ι coincide con la restricción $V{\downarrow_H}$ de V a H. Es en este sentido que la segunda construcción generaliza a la primera.

Fijemos un homomorfismo de grupos $\phi : H \to G$. Si V y W son representaciones de G, entonces es inmediato que si V y W son isomorfas, las representaciones restringidas $\phi^*(V)$ y $\phi^*(W)$ tambien son isomorfas. Por el contrario, es posible que $\phi^*(V)$ y $\phi^*(W)$ sean isomorfas a pesar de que V y W no lo sean.

Ejemplo 1.5.5. Sea $\phi : H \to G$ es el homomorfismo trivial, de manera que $\phi(h) = e_G$ para todo $h \in H$. Es fácil ver que si V y W son representaciones de G, entonces

$$\phi^*(V) \cong \phi^*(W) \iff \dim V = \dim W$$

y que, de hecho, cualquiera sea V, la representaciones restringida $\phi^*(V)$ es trivial. □

Proposición 1.5.6. *Sea $\phi : H \to G$ un homomorfismo sobreyectivo de grupos.*

(*i*) *Sean (V, ρ_V) y (W, ρ_W) representaciones de G. Si $\phi^*(V) \cong \phi^*(W)$, entonces $V \cong W$.*

(*ii*) *Sea (V, ρ_V) una representaciones de G. Entonces V es simple sii $\phi^*(V)$ es simple como representación de H.*

Demostración. □

2. Carácteres

2.1. Definición

Definición 2.1.1. Si (V, ρ) es una representación de G, el *carácter* de (V, ρ) es la función $\chi : G \to \mathbb{C}$ dada por

$$\chi(g) = \operatorname{tr} \rho(g)$$

para cada $g \in G$. Si V es simple, decimos que χ es *irreducible*. Cuando queramos enfatizar el hecho de que χ es el carácter de (V, ρ) escribiremos χ_V. Escribiremos $\mathfrak{X}(G)$ al conjunto de los carácteres irreducibles de G.

Ejemplo 2.1.2. Si (V, ρ) es una representación sobre la que G actúa trivialmente, de manera que $\rho(g) = \mathsf{id}_V$ para todo $g \in G$, entonces el carácter $\chi : G \to \mathbb{C}$ de V satisface $\chi(g) = \dim V$ para todo $g \in G$. En particular, el carácter de la representación trivial $(\mathbb{C}, \rho_{\mathsf{triv}})$ es la función constante $\mathbf{1} : g \in G \mapsto 1 \in \mathbb{C}$. □

Ejemplo 2.1.3. Sea $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ un conjunto finito sobre el que G actúa y sea $(\mathbb{C}X, \rho)$ la correspondiente representación de G. Si $g \in G$, la matriz $\|\rho(g)\|_X = (g_{ij})$ de $\rho(g) : \mathbb{C}X \to \mathbb{C}X$ con respecto a la base ordenada $(x_1, \dots, x_n)$ tiene, para cada i, $j \in \{1, \dots, n\}$,

$$g_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } g \cdot x_i = x_j; \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Se sigue, entonces, que si $\chi : G \to \mathbb{C}$ es el carácter de $\mathbb{C}X$, entonces

$$\chi(g) = \sum_{i=1}^{n} g_{ii} = \big|\{x \in X : g \cdot x = x\}\big|$$

es la cantidad de elementos de X que g deja fijos.

Si $X = G$ y G actúa por multiplicación, de manera que la representación es la representación regular $(\mathbb{C}G, \rho_{\mathsf{reg}})$, el carácter $\chi_{\mathsf{reg}} : G \to \mathbb{C}$ está entonces dado por

$$\chi_{\mathsf{reg}}(g) = \begin{cases} |G|, & \text{si } g = e; \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$ □

Ejemplo 2.1.4. Sea (V, ρ) una representación de grado 1. Hay un isomorfismo de grupos canónico $c : \mathrm{GL}(V) \to \mathbb{C}^\times$, unívocamente determinado por la condición de que sea $f = c(f)\,\mathsf{id}_V$ para todo $f \in \mathrm{GL}(V)$. Es inmediato verificar que el carácter $\chi : G \to \mathbb{C}$ de V es la composición

$$G \xrightarrow{\rho} \mathrm{GL}(V) \xrightarrow{c} \mathbb{C}^\times \hookrightarrow \mathbb{C},$$

así que podemos decir que χ “es” ρ.

Observemos que se sigue, en particular, que en este caso el carácter es una aplicación multiplicativa: esto es, que $\chi(g)\chi(h) = \chi(gh)$ para cada g, $h \in G$. Esto no es cierto en general: por ejemplo, en cuanto G no es el grupo trivial, el carácter de la representación regular $\mathbb{C}C$ calculado en el ejemplo 2.1.3 no es multiplicativo. □

Proposición 2.1.5. *Sea (V, ρ) una representación y sea $n = \dim V$ su grado.*

(*i*) *Se tiene que $\chi(1) = n$.*
(*ii*) *Si $g \in G$, es $\chi(g^{-1}) = \overline{\chi(g)}$.*
(*iii*) *Si g, $h \in G$, entonces $\chi(ghg^{-1}) = \chi(h)$ y $\chi(gh) = \chi(hg)$.*

Demostración. □

Proposición 2.1.6. *Si (V, ρ_V) y (W, ρ_W) son representaciones y $\phi : V \to W$ es un isomorfismo de representaciones, entonces $\chi_V = \chi_W$.*

Demostración. □

Sea $\mathbb{C}(G)$ el espacio vectorial de las funciones $G \to \mathbb{C}$. Se trata de hecho de una $\mathbb{C}$-álgebra: si χ_1, $\chi_2 \in \mathbb{C}(G)$, el producto $\chi_1 \cdot \chi_2 : G \to \mathbb{C}$ es la función tal que $(\chi_1 \cdot \chi_2)(g) = \chi_1(g)\chi_2(g)$ para cada $g \in G$. Si $\chi \in \mathbb{C}(G)$, definimos una nueva función $\chi^* : G \to \mathbb{C}$ de manera que se tenga $\chi^*(g) = \chi(g^{-1})$ para todo $g \in G$.

Proposición 2.1.7. *Sean (V, ρ_V) y (W, ρ_W) dos representaciones y sean χ_V y χ_W sus caracteres. Entonces*

(*i*) $\chi_{V \oplus W} = \chi_V + \chi_W$,
(*ii*) $\chi_{V \otimes W} = \chi_V \cdot \chi_W$,
(*iii*) $\chi_{V^*} = \chi_V^*$; *y*
(*iv*) $\chi_{\hom(V,W)} = \chi_V^* \cdot \chi_W$.

Demostración. □

2.2. El producto interno

Definimos sobre el espacio vectorial $\mathbb{C}(G)$ definimos un producto interno $\langle -, - \rangle$ poniendo, para cada par de funciones χ_1, $\chi_2 \in \mathbb{C}(G)$,

$$\langle \chi_1, \chi_2 \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_1(g)\overline{\chi_2(g)}.$$

La verificación de que esto define en efecto un producto interno es inmediata.

Definición 2.2.1. Una función $f : G \to \mathbb{C}$ es *central* si para todo g, $h \in G$ es

$$f(ghg^{-1}) = f(g).$$

Escribimos $\mathcal{Z}(G)$ al subconjunto de $\mathbb{C}(G)$ de las funciones centrales.

De hecho, es fácil ver que $\mathcal{Z}(G)$ es un subespacio vectorial y un subanillo de $\mathbb{C}(G)$. La Proposición 2.1.5(*iii*) nos provee ejempos de elementos de $\mathcal{Z}(G)$: en efecto, afirma que el carácter de toda representación de G es central.

Consideraremos a $\mathcal{Z}(G)$ como un espacio con producto interno obtenido por restricción del de $\mathbb{C}(G)$. Si $\chi \in \mathbb{C}(G)$ es el carácter de una representación, la Proposicion 2.1.5(ii) nos dice que $\overline{\chi(g)} = \chi(g^{-1})$ para todo $g \in G$: al calcular productos internos de carácteres en lo que sigue, usaremos esto implícitamente. Por otro lado, la siguiente observación es frecuentemente útil:

Lema 2.2.2. *Sean $c_1, \ldots, c_k$ las clases de conjugación de G y sean $g_1, \ldots, g_k \in G$ tales que $g_i \in c_i$ para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$. Si $\chi_1, \chi_2 \in \mathcal{Z}(G)$ son funciones centrales, entonces*

$$\langle \chi_1, \chi_2 \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{j=1}^{k} |c_j| \chi_1(g_j) \overline{\chi_2(g_j)}.$$

Demostración. Como las clases de conjugación de G determinan una partición de G, es

$$\langle \chi_1, \chi_2 \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_1(g) \overline{\chi_2(g)} = \frac{1}{|G|} \sum_{j=1}^{k} \sum_{g \in c_j} \chi_1(g) \overline{\chi_2(g)},$$

y como χ_1 y χ_2 son centrales, para todo $j \in \{1, \ldots, k\}$ es $\chi_1(g) = \chi_1(g_j)$ y $\chi_2(g) = \chi_2(g_j)$ para cada $g \in c_j$, de manera que

$$\langle \chi_1, \chi_2 \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{j=1}^{k} |c_j| \chi_1(g_j) \overline{\chi_2(g_j)},$$

como afirma el enunciado. □

2.3. Relaciones de ortogonalidad entre carácteres

Proposición 2.3.1. *Si χ_1 y χ_2 son los carácteres de dos representaciones simples no isomorfas, entonces $\langle \chi_1, \chi_2 \rangle = 0$ Además, cualquiera sea $g \in G$ se tiene que*

$$\sum_{h \in G} \chi_1(gh^{-1}) \chi_2(h) = 0. \tag{3}$$

Demostración. Sean (V, ρ_V) y (W, ρ_W) representaciones tales que sus carácteres sean χ_1 y χ_2, de grados n y m, respectivamente. Sea $\mathscr{B}$ y $\mathscr{B}'$ bases ordenadas de V y V', y sean $r = (\rho_V)_{\mathscr{B}} : G \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ y $s = (\rho_W)_{\mathscr{B}'} : G \to \mathrm{GL}(m, \mathbb{C})$ las representaciones matriciales correspondientes.

Sea $f : V \to W$ es una función lineal y sea $\hat{f} : V \to W$ la función construida en el Lema 1.4.4, que es un morfismo de representaciones. Por hipótesis, V y W son no isomorfas, así que el Lema de Schur 1.3.9 implica que

$$\hat{f} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho_W(g) \circ f \circ \rho_V(g^{-1}) = 0.$$

Si (f_{ij}) es la matriz de f con respecto a las bases $\mathscr{B}$ y $\mathscr{B}'$, esta igualdad nos dice que para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$ y todo $j \in \{1, \ldots, n\}$ es

$$\sum_{\substack{g \in G \\ 1 \leq k \leq m \\ 1 \leq l \leq n}} s_{ik}(g) f_{kl} r_{lj}(g^{-1}) = 0.$$

Ahora bien, esto es cierto cualquiera sea f, así que podemos concluir, de hecho, que para todo i, $k \in \{1, \ldots, m\}$ y todo j, $l \in \{1, \ldots, n\}$ es

$$\sum_{g \in G} s_{ik}(g) r_{lj}(g^{-1}) = 0. \tag{4}$$

En particular,

$$\begin{aligned}\langle\chi_1,\chi_2\rangle &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_1(g)\overline{\chi_2(g)}\\ &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\Big(\sum_{1\leq i\leq n} r_{ii}(g)\Big)\Big(\sum_{1\leq j\leq m}\overline{s_{jj}(g)}\Big)\\ &= \frac{1}{|G|}\sum_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq m}}\Big(\sum_{g\in G} r_{ii}(g)s_{jj}(g^{-1})\Big)\\ &= 0.\end{aligned}$$

Esto prueba la primera parte de la proposición. Para ver la segunda, calculamos que

$$\begin{aligned}\sum_{h\in G}\chi_1(gh^{-1})\chi_2(h) &= \sum_{h\in G}\sum_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq m}} r_{ii}(gh^{-1})s_{jj}(h)\\ &= \sum_{h\in G}\sum_{\substack{1\leq i,k\leq n\\ 1\leq j\leq m}} r_{ik}(g)r_{ki}(h^{-1})s_{jj}(h)\\ &= \sum_{\substack{1\leq i,k\leq n\\ 1\leq j\leq m}}\Big(\sum_{h\in G} s_{jj}(h)r_{ki}(h^{-1})\Big)r_{ik}(g)\\ &= 0\end{aligned}$$

en vista de (4) □

Proposición 2.3.2. *Si χ es el carácter de una representación simple, entonces $\langle\chi,\chi\rangle = 1$. Si n es el grado de χ, entonces para cada $g\in G$ tenemos que*

$$\sum_{h\in G}\chi(gh^{-1})\chi(h) = \frac{|G|}{n}\chi(g). \tag{5}$$

Demostración. Sean (V,ρ_V) una representación tal que su carácter es χ_1 y sea n su grado. Sea $\mathscr{B}$ una base ordenada de V, y sean $r = (\rho_V)_{\mathscr{B}} : G \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ la representación matricial correspondiente.

Si $f : V \to V$ es una aplicación lineal, entonces, como en la prueba de la proposición anterior, la aplicación $\hat f : V \to V$ es un endomorfismo de representaciones, así que —por el Lema de Schur— existe $\lambda\in\mathbb{C}$ tal que $\hat f = \lambda\,\mathsf{id}_V$. Usando la última afirmación del Lema 1.4.4, vemos que $\lambda n = \operatorname{tr}\hat f = \operatorname{tr} f$, de forma que $\lambda = \frac{1}{n}\operatorname{tr} f$, así que en definitiva es

$$\hat f = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho_V(g)\circ f\circ\rho_V(g^{-1}) = \frac{1}{n}\operatorname{tr} f\,\mathsf{id}_V.$$

Si (f_{ij}) es la matriz de f con respecto a la base $\mathscr{B}$, esta igualdad implica que para cada i, $j\in\{1,\dots,n\}$ es

$$\frac{1}{|G|}\sum_{\substack{g\in G\\ 1\leq k,l\leq n}} r_{ik}(g)f_{kl}r_{lj}(g^{-1}) = \frac{1}{n}\operatorname{tr} f\,\delta_{ij}.$$

La arbitrariedad de f nos permite concluir que si i, j, k, $l\in\{1,\dots,n\}$ es

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} r_{ik}(g)r_{lj}(g^{-1}) = \frac{1}{n}\delta_{kl}\delta_{ij}, \tag{6}$$

y entonces

$$\begin{aligned}
\langle \chi, \chi \rangle &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g)\chi(g^{-1}) \\
&= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \Big(\sum_{1 \le i \le n} r_{ii}(g) \Big) \Big(\sum_{1 \le j \le n} r_{jj}(g^{-1}) \Big) \\
&= \sum_{1 \le i,j \le n} \frac{1}{|G|} r_{ii}(g) r_{jj}(g^{-1}) \\
&= \sum_{1 \le i,j \le n} \frac{1}{n} \delta_{ij} \delta_{ij} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Por otro lado, si $g \in G$ es

$$\begin{aligned}
\sum_{h \in G} \chi(gh^{-1})\chi(h) &= \sum_{h \in G} \sum_{1 \le i,j \le n} r_{ii}(gh^{-1}) r_{jj}(h) \\
&= \sum_{h \in G} \sum_{1 \le i,j,k \le n} r_{ik}(g) r_{ki}(h^{-1}) r_j j(h) \\
&= \sum_{1 \le i,j,k \le n} \Big(\sum_{h \in G} r_{jj}(h) r_{ki}(h^{-1}) \Big) r_{ik}(g)
\end{aligned}$$

y usando (6), esto queda

$$\begin{aligned}
&= \sum_{1 \le i,j,k \le n} \frac{|G|}{n} \delta_{jk} \delta_{ji} r_{ik}(g) \\
&= \frac{|G|}{n} \sum_{1 \le j \le n} r_{jj}(g) \\
&= \frac{|G|}{n} \chi(g).
\end{aligned}$$

□

2.4. Aplicaciones

Teorema 2.4.1. *Sea (V, ρ_V) una representación y sea χ_V su carácter. Supongamos que W_1, …, W_s son subrepresentaciones de V tales que $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_s$ y sean χ_{W_1}, …, χ_{W_s} sus respectivos carácteres. Si U es una representación simple de carácteres χ_U, entonces*

$$\langle \chi_V, \chi_U \rangle = \Big| \Big\{ i \in \{1, \ldots, s\} : U \cong W_i \Big\} \Big|.$$

Demostración. Sea U una representación simple. Sea $i \in \{1, \ldots, s\}$. Si $U \ncong W_i$, la Proposición 2.3.1 nos dice que $\langle \chi_{W_i}, \chi_U \rangle = 0$. Si, por el contrario, $U \cong W_i$, entonces $\chi_U = \chi_{W_i}$ y la Proposición 2.3.2 nos dice que $\langle \chi_{W_i}, \chi_U \rangle = 1$.

De acuerdo a la Proposición 2.1.7(*i*), es $\chi_V = \sum_{i=1}^{s} \chi_{U_i}$, y entonces

$$\langle \chi_V, \chi_U \rangle = \sum_{i=1}^{s} \langle \chi_{W_i}, \chi_U \rangle = \Big| \Big\{ i \in \{1, \ldots, s\} : U \cong W_i \Big\} \Big|.$$

□

Definición 2.4.2. Sea V una representación y sean W_1, …, W_s subrepresentaciones de V tales que $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_s$. Si U es una representación simple, la *multiplicidad de U en V* es el número

$$[V : U] = \Big| \Big\{ i \in \{1, \ldots, s\} : U \cong W_i \Big\} \Big|.$$

Si $[V : U] > 0$, decimos que U *aparece* en V.

Corolario 2.4.3. *Sea (V, ρ_V) una representación. Supongamos que $W_1, \dots, W_s$ y $W'_1, \dots, W'_t$ son subrepresentaciones de V tales que $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_s = W'_1 \oplus \cdots \oplus W'_t$. Entonces $s = t$ y, si U es una representación simple,*

$$\Big|\big\{i \in \{1, \dots, s\} : U \cong W_i\big\}\Big| = \Big|\big\{i \in \{1, \dots, t\} : U \cong W'_i\big\}\Big|.$$

Demostración. □

Corolario 2.4.4. *Sea (V, ρ_V) una representación y sea χ_V su carácter. Entonces V es simple si y solamente si $\langle \chi_V, \chi_V \rangle = 1$.*

Demostración. □

Corolario 2.4.5. *Sean (V, ρ_V) y (W, ρ_W) dos representaciones y sean χ_V y χ_W sus carácteres. Entonces V y W son isomorfas si y solamente si $\chi_V = \chi_W$.*

Demostración. □

Corolario 2.4.6. *Sea χ_{triv} el carácter de la representación trivial y sean V y W dos representaciones. Entonces*

$$\dim V^G = \langle \chi_V, \chi_{\mathsf{triv}} \rangle$$

y

$$\dim \hom_G(V, W) = \langle \chi_V, \chi_W \rangle.$$

Demostración. □

Proposición 2.4.7. *Sea $(\mathbb{C}G, \rho)$ la representación regular de G. El carácter χ de $\mathbb{C}G$ es tal que*

$$\chi(g) = \begin{cases} |G|, & \text{si } g = e; \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Toda representación simple U aparece en $\mathbb{C}G$ con multiplicidad $[\mathbb{C}G : U] = \dim U$.

Demostración. □

Corolario 2.4.8. *Hay un número finito de clases de isomorfismo de representaciones simples. Si $U_1, \dots, U_k$ es un conjunto completo de representantes de esas clases y si $\chi_1, \dots, \chi_k$ y $n_1, \dots, n_k$ son sus carácteres y grados, respectivamente, entonces*

$$\sum_{i=1}^{k} n_i^2 = |G|,$$

y el carácter χ_{reg} de la representación regular es

$$\chi_{\mathsf{reg}} = \sum_{i=1}^{k} n_i \chi_i. \tag{7}$$

Demostración. □

2.5. El número de representaciones simples

Proposición 2.5.1. *La dimensión de $\mathcal{Z}(G)$ es la cantidad de clases de conjugación de G.*

Demostración. Sea $C(G)$ el conjunto de las clases de conjugación de G y para cada $c \in C(G)$ sea $\delta_c : G \to \mathbb{C}$ la función tal que para cada $g \in G$ es

$$\delta_c(g) = \begin{cases} 1, & \text{si } g \in c; \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Se sigue inmediatamente de esta definición que $\delta_c \in \mathcal{Z}(G)$ cualquiera sea $c \in C(G)$ y que el conjunto $\Delta = \{\delta_c : c \in C(G)\}$ es linealmente independiente en $C(G)$.

Sea $f \in C(G)$. Si $c \in C(G)$ y $g, g' \in c$, entonces existe $h \in G$ tal que $g' = hgh^{-1}$ y entonces $f(g') = f(hgh^{-1}) = f(g)$. Vemos así que f es constante sobre cada clase de conjugación de G y, usando esto, que si si para cada $c \in C(G)$ elegimos un elemento $g_c \in c$, entonces $f = \sum_{c\in C(G)} f(g_c)\delta_c$. Esto prueba que el conjunto Δ genera a $C(G)$, así que se trata, en definitiva, de una base de $C(G)$.

Concluimos que $\dim \mathcal{Z}(G) = |C(G)|$, lo que prueba la proposición. □

Si $f \in \mathcal{Z}(G)$ y (V, ρ_V) es una representación, definimos la aplicación lineal

$$\rho_V^f = \sum_{h\in G} f(h)\rho_V(h) : V \to V$$

Lema 2.5.2. *Sea $f \in \mathcal{Z}(G)$.*

(i) Si (V, ρ_V) y (W, ρ_W) son dos representaciones de G y si $(V \oplus W, \rho_{V\oplus W})$ es su suma directa, entonces

$$\rho_{V\oplus W}^f = \begin{pmatrix} \rho_V^f & 0 \\ 0 & \rho_W^f \end{pmatrix}.$$

(ii) Sea (V, ρ_V) una representación simple de grado n y carácter χ_V. Entonces $\rho_V^f = \nu\,\mathsf{id}_V$ con $\nu = \frac{|G|}{n}\langle f, \chi_V^*\rangle$, .

Demostración. La parte (i) es inmediata. Veamos (ii).

La aplicación ρ_f es un morfismo de representaciones. En efecto, si $g \in G$ tenemos que

$$\begin{aligned}\rho_V^f \circ \rho_V(g) &= \sum_{h\in G} f(h)\rho_V(h) \circ \rho_V(g) \\ &= \sum_{h\in G} f(h)\rho_V(hg)\end{aligned}$$

y, cambiando la variable h por $k = g^{-1}hg$, esto es

$$= \sum_{k\in G} f(gkg^{-1})\rho_V(gk)$$

que, como f es central, es lo mismo que

$$\begin{aligned}&= \sum_{k\in G} f(k)\rho_V(g) \circ \rho_V(k) \\ &= \rho_V(g) \circ \rho_V^f.\end{aligned}$$

El Lema de Schur 1.3.9 implica que existe $\nu \in \mathbb{C}$ tal que $f = \nu\,\mathsf{id}_V$ y, de hecho, es

$$\nu = \frac{1}{n}\operatorname{tr} f = \frac{1}{n}\sum_{h\in G} f(h)\operatorname{tr}\rho_V(h) = \frac{1}{n}\sum_{h\in G} f(h)\chi(h) = \frac{|G|}{n}\langle f, \chi^*\rangle.$$ □

Teorema 2.5.3. *El conjunto de los carácteres irreducibles es una base ortonormal de $\mathcal{Z}(G)$.*

Demostración. Sea $\mathfrak{X} \subset \mathcal{Z}(G)$ el conjunto de los carácteres irreducibles. De las Proposiciones 2.3.1 y 2.3.2 sabemos que $\mathfrak{X}$ es un conjunto ortonormal, así que para probar el teorema alcanza con mostrar que si $f \in \mathcal{Z}(G)$ entonces

$$\forall \chi \in \mathfrak{X},\ \langle f, \chi\rangle = 0 \implies f = 0.$$

Sea entonces $f \in \mathcal{Z}(G)$ y supongamos que $\langle f, \chi\rangle = 0$ para todo $\chi \in \mathfrak{X}$. Si (V, ρ) es una representación simple y χ es su carácter, entonces χ^* es el carácter de V' que, según la Proposición 1.5.3 también es simple, así que $\chi^* \in \mathfrak{X}$ y $\langle f, \chi^*\rangle = 0$: de acuerdo al Lema 2.5.2(ii), entonces, tenemos que $\rho_V^f = 0$. Se sigue de esto —usando el Teorema 1.4.6 y el Lema 2.5.2(i)— que, de hecho, $\rho_V^f = 0$ para *cualquier* representación (V, ρ).

En particular, si $(\mathbb{C}G, \rho_{\mathsf{reg}})$ es la representación regular entonces $\rho_{\mathsf{reg}}^f = 0$ y, en consecuencia,

$$\rho_{\mathsf{reg}}^f(e) = \sum_{h \in G} f(h)\rho(h)(e) = \sum_{h \in G} f(h)h = 0.$$

Como G es una base de $\mathbb{C}G$, se sigue inmediatamente de esto que $f = 0$, como queríamos. □

Corolario 2.5.4. *Hay tantas representaciones simples como clases de conjugación en G.*

Demostración. Esto es consecuencia inmediata del Teorema, en vista de la Proposición 2.5.1. □

2.6. Componentes isotípicas de una representación

Proposición 2.6.1. *Sean (V_1, ρ_1), …, (V_k, ρ_k) representantes de las clases de isomorfismo de representaciones simples, sean χ_1, …, χ_k y n_1, …, n_k sus carácteres y sus grados, respectivamente, y sea (W, ρ) una representación. Para cada $i \in \{1, \dots, k\}$, sea $W_i \subseteq V$ la suma de todos las subrepresentaciones de V isomorfas a V_i. Entonces W_1, …, W_k son subrepresentaciones de W y $W = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$. Más aún, el proyector de W sobre el sumando i-ésimo de está descomposición es*

$$p_i = \frac{n_i}{|G|} \sum_{h \in G} \chi_i(h^{-1})\rho(h) : W \to W.$$

En particular, un elemento $w \in W$ pertenece a W_i si y solamente si es

$$w = \frac{n_i}{|G|} \sum_{h \in G} \chi_i(h^{-1})\rho(h)(w).$$

Demostración. Es claro que cada una de W_1, …, W_k es una subrepresentación de W, así que solo tenemos que probar las dos últimas afirmaciones. Supongamos por un instante que

(i) p_i es un endomorfismo de representaciones para cada $i \in \{1, \dots, k\}$;
(ii) $\sum_{i=1}^k p_i = \mathsf{id}_W$;
(iii) $p_i \circ p_j = 0$ si i, $j \in \{1, \dots, k\}$ e $i \neq j$;
(iv) $p_i \circ p_i = p_i$ para cada $i \in \{1, \dots, k\}$; y
(v) $p_i(W) = W_i$ para cada $i \in \{1, \dots, k\}$.

Entonces:

- Es $W = \sum_{i=1}^k W_i$. En efecto, si $w \in W$, (ii) implica que $w = \sum_{i=1}^k p_i(w)$ y, como (v) nos dice que $p_i(w) \in W_i$, esto muestra que $w \in \sum_{i=1}^k W_i$.
- Por otro lado, para cada $i \in \{1, \dots, k\}$ es $W_i \cap \sum_{j \neq i} W_j = 0$. Para verlo, supongamos que $w \in W$ pertenece a esa intersección, de manera que por (v) existen $w_1, \dots, w_k \in W$ tales que $w = p_i(w_i) = \sum_{j \neq i} p_j(w_j)$. Entonces usando ($iii$) y ($iv$), tenemos que $w = p_i(w_i) = p_i(p_i(w_i)) = p_i(\sum_{j \neq i} p_j(w_j)) = 0$.

En definitiva, podemos concluir así que $W = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$ y que p_i es el i-ésimo proyector de esta descomposición.

Resta entonces verificar (i)–(v). Para ver (ii), observemos que

$$\sum_{i=1}^k p_i = \sum_{i=1}^k \frac{n_i}{|G|} \sum_{h \in G} \chi_i(h^{-1})\rho(h) = \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \Big(\sum_{i=1}^k n_i \chi_i(h^{-1}) \Big) \rho(h)$$

y que, de acuerdo a la igualdad (7) del Lema 2.4.8, la suma interior es igual a $\chi_{\mathsf{reg}}(h^{-1})$, así que

$$\sum_{i=1}^{k} p_i = \frac{1}{|G|}\sum_{h\in G}\chi_{\mathsf{reg}}(h^{-1})\rho(h) = \frac{1}{|G|}\chi_{\mathsf{reg}}(e)\rho(e) = \mathsf{id}_W.$$

Para ver (iii), sean i, $j \in \{1,\ldots,k\}$ tales que $i \neq j$: tenemos que

$$\begin{aligned}
p_i \circ p_j &= \frac{n_i n_j}{|G|^2}\sum_{h,h'\in G}\chi_i(h^{-1})\chi_j(h'^{-1})\rho(h)\circ\rho(h') \\
&= \frac{n_i n_j}{|G|^2}\sum_{h,h'\in G}\chi_i(h^{-1})\chi_j(h'^{-1})\rho(hh') \\
&= \frac{n_i n_j}{|G|^2}\sum_{g\in G}\Big(\sum_{\substack{h,h'\in G\\ hh'=g}}\chi_i(h^{-1})\chi_j(h'^{-1})\Big)\rho(g) \\
&= \frac{n_i n_j}{|G|^2}\sum_{g\in G}\Big(\sum_{h\in G}\chi_j(g^{-1}h)\chi_i(h^{-1})\Big)\rho(g) \\
&= 0
\end{aligned}$$

en vista de la relación (3) de la Proposicion 2.3.1. De manera similar, si $i \in \{1,\ldots,k\}$, entonces

$$\begin{aligned}
p_i \circ p_i &= \frac{n_i^2}{|G|^2}\sum_{h,h'\in G}\chi_i(h^{-1})\chi_i(h'^{-1})\rho(h)\circ\rho(h') \\
&= \frac{n_i^2}{|G|^2}\sum_{h,h'\in G}\chi_i(h^{-1})\chi_i(h'^{-1})\rho(hh') \\
&= \frac{n_i^2}{|G|^2}\sum_{g\in G}\Big(\sum_{\substack{h,h'\in G\\ hh'=g}}\chi_i(h^{-1})\chi_i(h'^{-1})\Big)\rho(g) \\
&= \frac{n_i^2}{|G|^2}\sum_{g\in G}\Big(\sum_{h\in G}\chi_i(g^{-1}h)\chi_i(h^{-1})\Big)\rho(g) \\
&= \frac{n_i^2}{|G|^2}\sum_{g\in G}\frac{|G|}{n_i}\chi_i(g^{-1})\rho(g) \\
&= p_i
\end{aligned}$$

usando ahora la igualdad (5) de la Proposición 2.3.2: esto prueba (iv).

Finalemente, verifiquemos (v). Sea $i \in \{1,\ldots,k\}$. Supongamos que $U \subseteq W$ es una subrepresentación simple y sea χ_U su carácter. Es $\rho(h)(U) \subseteq U$ para todo $h \in G$, así que $p_i(U) \subseteq U$ y podemos entonces considerar la restricción $p_i|_U : U \to U$. Como p_i es un endomorfismo de representaciones, el Lema de Schur nos dice que existe $\lambda_U \in \mathbb{C}$ tal que $p_i|_U = \lambda_U \,\mathsf{id}_U$ y entonces

$$\begin{aligned}
\lambda_U \,\dim U &= \operatorname{tr} p_i|_{U_i} \\
&= \frac{n_i}{|G|}\sum_{h\in G}\chi_i(h^{-1})\operatorname{tr}\rho(h)|_U \\
&= \frac{n_i}{|G|}\sum_{h\in G}\chi_i(h^{-1})\chi_U(h) \\
&= n_i\langle\chi_i,\chi_U\rangle \\
&= \begin{cases} n_i, & \text{si } U \cong V_i; \\ 0, & \text{en caso contrario.}\end{cases}
\end{aligned}$$

Así, vemos que

$$\lambda_U = \begin{cases} 1, & \text{si } U \cong V_i; \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

y, en consecuencia, que

$$p_i(U) = \begin{cases} U, & \text{si } U \cong V_i; \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Esto nos dice que toda subrepresentación simple de W isomorfa a V_i está contenida en la imágen de p_i y se sigue que $W_i \subseteq p_i(W)$.

Por otro lado, sabemos que existen subrepresentaciones simples $U_1, \ldots, U_r \subseteq W$ tales que $W = U_1 \oplus \cdots \oplus U_r$ y, sin pérdida de generalidad podemos suponer que existe $s \in \{0, \ldots, r\}$ tal que $U_j \cong V_i$ si $1 \leq i \leq s$ y que $U_j \ncong V_i$ si $s < j \leq r$. En consecuencia,

$$p_i(W) \subseteq \sum_{j=1}^{r} p_i(U_j) = \sum_{j=1}^{s} p_i(U_j) = \sum_{j=1}^{s} U_j \subseteq W_i$$

Esto termina la prueba de (v) y, entonces, de la proposición. □

Definición 2.6.2. Sea (W, ρ_W) una representación de G y sea (V, ρ_V) una representación simple de G. La *componente* (V, ρ)*-isotípica* de W es el subespacio $W_{V,\rho_V)}$ de W suma de todas las subrepresentaciones de W isomorfas a V. Si χ es el carácter de (V, ρ), también llamamos a $W_{(V,\rho)}$ la *componente* χ*-isotípica*, y la escribimos en ese caso W_χ.

De acuerdo a la Proposición 2.6.1, si (W, ρ_W) es una representación, las componentes isotípicas de W son subrepresentaciones y se tiene

$$W = \bigoplus_{\chi \in \mathfrak{X}(G)} W_\chi.$$

A diferencia de la descomposición de W como suma directa de subrepresentaciones simples, esta descomposición es canónica y es respetada por todos los morfismos de representaciones:

Proposición 2.6.3. *Sean (W, ρ_W) y $(W', \rho_{W'})$ dos representaciones de G y sea $\chi \in \mathfrak{X}(G)$. Si $f : W \to W'$ es un morfismo de representaciones, entonces $f(W_\chi) \subseteq W'_\chi$ para todo $\chi \in \mathfrak{X}(G)$.*

Demostración. Sea n el grado de χ. De la Proposición 2.6.1 se sigue que un elemento $w \in W$ pertenece a W_χ si y solamente si

$$w = \frac{n}{|G|} \sum_{h \in G} \chi(h^{-1}) \rho_W(h)(w).$$

Si ese es el caso, entonces

$$f(w) = \frac{n}{|G|} \sum_{h \in G} \chi(h^{-1}) f(\rho_W(h)(w)) = \frac{n}{|G|} \sum_{h \in G} \chi(h^{-1}) \rho_{W'}(h)(f(w)),$$

así que, por la misma razón, $f(w) \in W'_\chi$. □

2.7. Representaciones de grado 1

Es fácil describir todas las representaciones de grado 1 de un grupo:

Proposición 2.7.1. *Escribamos $\xi : \mathbb{C}^\times \to \mathrm{GL}(\mathbb{C})$ al isomorfismo tal que $\xi(\lambda) = \lambda\, \mathsf{id}_\mathbb{C}$ para cada $\lambda \in \mathbb{C}^\times$.*

(*i*) *Si $\chi : G \to \mathbb{C}^\times$ es un homomorfismo de grupos, hay una representación $(\mathbb{C}_\chi, \rho_\chi)$ con espacio vectorial subyacente $\mathbb{C}_\chi = \mathbb{C}$ y $\rho_\chi = \xi \circ \chi : G \to \mathrm{GL}(\mathbb{C}_\chi)$. El carácter de $(\mathbb{C}_\chi, \rho_\chi)$ es la composición $G \xrightarrow{\chi} \mathbb{C}^\times \hookrightarrow \mathbb{C}$, que identificaremos en lo que sigue con χ.*

(*ii*) *Si* (V, ρ) *es una representación de* G *de grado* 1*, existe exactamente un homomorfismo de grupos* $\chi : G \to \mathbb{C}^\times$ *tal que* $V \cong \mathbb{C}_\chi$.

En consecuencia, el conjunto $\{(\mathbb{C}_\chi, \rho_\chi) : \chi \in \hom_{\mathsf{Grp}}(G, \mathbb{C}^\times)\}$ *es un sistema completo de representantes de las clases de isomorfismo de representaciones de grado* 1 *de* G.

Demostración. Solamente (*ii*) requiere una prueba. Sea (V, ρ_V) una representación de grado 1 y sea $v_0 \in V \setminus 0$. Para cada $g \in G$ existe un escalar $\chi(g) \in \mathbb{C}$ tal que $\rho_V(g)(v_0) = \chi(g)v_0$, y como $\rho_V(g) \in \mathrm{GL}(V)$, es $\chi(g) \neq 0$. Tenemos entonces una función $\chi : G \to \mathbb{C}^\times$. Como ρ_V es un morfismo de grupos, si g, $h \in G$ es

$$\chi(gh)v_0 = \rho_V(gh)(v_0) = \rho_V(g)(\rho_V(h)(v_0)) = \chi(h)\rho_V(g)(v_0) = \chi(g)\chi(h)v_0$$

y, como $v_0 \neq 0$, esto implica que $\chi(gh) = \chi(g)\chi(h)$. Vemos así que χ es un homomorfismo de grupos. Consideremos finalmente la aplicación lineal $f : \lambda \in \mathbb{C}_\chi \mapsto \lambda v_0 \in V$. Se trata de un isomorfismo de representaciones: es claro que es biyectiva, y si $g \in G$ se tiene que

$$f(\rho_\chi(g)(\lambda)) = f(\chi(g)\lambda) = \chi(g)\lambda v_0 = \chi(g)f(\lambda) = \rho_\chi(g)(f(\lambda)).$$

Para terminar, sean χ, $\chi' : G \to \mathbb{C}^\times$ dos homomorfismos distintos tales que existe un isomorfismo $f : \mathbb{C}_\chi \to \mathbb{C}_{\chi'}$. Entonces para cada $g \in G$ es

$$\chi(g)f(1) = f(\chi(g)(1)) = f(\rho_\chi(g)(1)) = \rho_{\chi'}(g)(f(1)) = \chi'(g)f(1)$$

y, como $f(1) \neq 0$ porque f es un isomorfismo, vemos que $\chi(g) = \chi'(g)$. Así, debe ser $\chi = \chi'$: esto prueba la únicidad que se afirma en (*ii*). □

Corolario 2.7.2. *Sea* (V, ρ) *una representación de* G *y sea* $\chi : G \to \mathbb{C}^\times$ *un homomorfismos de grupo. La componente* χ*-isotípica de* V *es*

$$V_\chi = \{v \in V : \rho(g)(v) = \chi(g)v \text{ para todo } g \in G\}.$$

Demostración. Notemos U al miembro derecho de la igualdad que queremos probar. Si $v \in U$, entonces

$$\begin{aligned}\frac{1}{|G|}\sum_{h\in G}\chi(h^{-1})\rho(h)(v) &= \frac{1}{|G|}\sum_{h\in G}\chi(h^{-1})\chi(h)v \\ &= \frac{1}{|G|}\sum_{h\in G}\chi(e)v \\ &= v,\end{aligned}$$

así que, de acuerdo a la Proposición 2.6.1, $v \in W_\chi$.

Recíprocamente, si $v \in W_\chi$, entonces $v = \frac{1}{|G|}\sum_{h\in G}\chi(h^{-1})\rho(h)(v)$ y para cada $g \in G$ es

$$\begin{aligned}\rho(g)(v) &= \frac{1}{|G|}\sum_{h\in G}\chi(h^{-1})\rho(g)\rho(h)(v) \\ &= \frac{1}{|G|}\sum_{h\in G}\chi(h^{-1})\rho(gh)(v) \\ &= \frac{1}{|G|}\sum_{h\in G}\chi(h^{-1}g)\rho(h)(v) \\ &= \chi(g)\frac{1}{|G|}\sum_{h\in G}\chi(h^{-1})\rho(h)(v) \\ &= \chi(g)v.\end{aligned}$$

Esto muestra que $v \in U$. □

Proposición 2.7.3. *Sea* G *un grupo de orden* n*. Entonces* G *es abeliano si y solamente si todas sus representaciones simples son de grado* 1*, y en ese caso posee exactamente* n *representaciones simples.*

Demostración. Si G es abeliano, cada una de las clases de conjugación de G tiene exactamente un elemento y, en consecuencia, hay n de ellas. El Teorema 2.5.3 implica que hay entonces n representaciones simples. Si $n_1, \ldots, n_n$ son sus grados, entonces $\sum_{i=1}^n n_i^2 = n$, como en el Corolario 2.4.8. Como por supuesto $n_i \geq 1$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, es claro que debe ser $n_1 = \cdots = n_n = 1$.

Recíprocamente, si G es tal que los grados $n_1, \ldots, n_r$ de sus representaciones simples son todos 1, del Corolario 2.4.8 sabemos que $r = \sum_{i=1}^r n_i^2 = n$ y entonces, del Teorema 2.5.3, que G tiene n clases de conjugación. Esto implica inmediatamente que cada una de éstas tiene un único elemento y, en definitiva, que G es abeliano. □

Esta proposición tiene como corolario la determinación del número de representaciones de grado 1 de un grupo finito cualquiera. Para probarlo, recordemos primero el siguiente resultado de la teoría elemental de grupos:

Lema 2.7.4. *Para cada g, $h \in G$ escribamos $[g,h] = ghg^{-1}h^{-1}$. Consideramos el conjunto $C = \{[g,h] : g, h \in G\}$ y el subgrupo $G' = \langle C \rangle$ de G generado por C.*

(*i*) *G' es un subgrupo normal de G y el cociente G/G' es abeliano.*

(*ii*) *Sea $p : G \to G/G'$ la proyección canónica. Si $f : G \to A$ es un homomorfismo de grupos con valores en un grupo abeliano A, entonces $G' \subseteq \ker f$ y, en consecuencia, existe un homomorfismo $\bar{f} : G/G' \to A$ tal que $\bar{f} \circ p = f$.*

Demostración. (*i*) Como $k[g,h]k^{-1} = [kgk^{-1}, khk^{-1}]$ cualesquiera sean g, h, $k \in G$, el conjunto C es invariante por conjugación. El subgrupo G' que genera en G es, en consecuencia, un subgrupo normal.

Sean a, $b \in G/G'$, de manera que existen g, $h \in G$ tales que $a = gG'$ y $b = hG'$. Como $[h^{-1}, g^{-1}] \in G'$, es

$$ab = ghG' = gh[h^{-1}, g^{-1}]G' = hgG = ba.$$

Esto muestra que el grupo cociente G/G' es abeliano.

(*ii*) Si g, $h \in G$, entonces $f([g,h]) = [f(g), f(h)] = e_A$ porque A es abeliano. Esto dice que $C \subseteq \ker f$, de manera que $G' = \langle C \rangle \subseteq \ker f$. La existencia de $\bar{f} : G/G' \to A$ tal que $\bar{f} \circ p = f$ es ahora inmediata. □

Corolario 2.7.5. *Un grupo G tiene $|G/G'|$ representaciones de grado* 1.

Demostración. Sea $p : G \to G/G'$ la proyección canónica y escribamos $\mathscr{L}(G)$ y $\mathscr{L}(G/G')$ a los conjuntos de clases de isomorfismo de representaciones de grado 1 de G y de G/G'.

Si V es una representación de G/G' de grado 1, entonces la restricción $p^*(V)$ de V a lo largo de p es una representación de G de grado 1. Además, si V y W son representaciones de G/G' de grado 1, se tiene que $V \cong W$ sii $p^*(V) \cong p^*(W)$: esto sigue de la Proposición 1.5.6(*i*) porque p es sobreyectiva. Esto implica que podemos definir una función $\pi : \mathscr{L}(G/G') \to \mathscr{L}(G)$ poniendo $\pi([V]) = [p^*(V)]$ para cada representación V de G/G' de grado 1 y que, de hecho, esta función resulta inyectiva. Como la Proposición 2.7.3 nos dice que $|\mathscr{L}(G/G')| = |G/G'|$, para probar la proposición bastará mostrar que π es sobreyectiva.

Sea entonces (V, ρ_V) una representación de G de grado 1. Como $\dim V = 1$, el grupo $\mathrm{GL}(V)$ es abeliano, así que, aplicando la Proposición 2.7.4(*ii*) al homomorfismo $\rho_V : G \to \mathrm{GL}(V)$, podemos concluir que existe un homomorfismo $\bar{\rho}_V : G/G' \to \mathrm{GL}(V)$ tal que $\bar{\rho}_V \circ p = \rho_V$. Tenemos entonces una representación $(V, \bar{\rho}_V)$ de G/G' sobre V y la representación $p^*(V, \bar{\rho}_V)$ que se obtiene restringiéndola a lo largo de p es precisamente (V, ρ_V). Concluímos de esta manera que $\pi([(V, \bar{\rho}_V)]) = [(V, \rho_C)]$ y, en definitiva, que π es sobreyectiva, como queríamos. □

Proposición 2.7.6. *Sea $A \subseteq G$ un subgrupo abeliano de G. El grado de cada representación simple de G es menor o igual al índice $[G : A]$ de A en G.*

Demostración. Sea V una representación simple de G. Sea $L \subseteq V$ un subespacio que es una subrepresentación simple de la restricción $V{\downarrow_A}$. Como A es abeliano, debe ser $\dim L = 1$, así que existe $v \in L \setminus 0$ tal que $L = \langle v \rangle$ y, en particular, para cada $a \in A$ existe $\lambda_a \in \mathbb{C}$ tal que $a \cdot v = \lambda_a v$.

Sea $n = [G : A]$ el índice de A en G, $\{g_1, \dots, g_n\} \subseteq G$ un sistema de representantes para las coclases derechas de A en G, y $W = \langle g_1 \rightharpoonup v, \dots, g_n \rightharpoonup v \rangle \subseteq V$.

Si $g \in G$ y $i \in \{1, \dots, n\}$, existe $j \in \{1, \dots, n\}$ y $a \in A$ tales que $gg_i = g_i a$, y entonces

$$g \rightharpoonup (g_i \rightharpoonup v) = gg_i \rightharpoonup v = g_i a \rightharpoonup v = g_i \rightharpoonup (a \rightharpoonup v) = \lambda_a g_i \rightharpoonup v \in W.$$

Esto nos dice que W es una subrepresentación de V. Como V es simple y $W \neq 0$, debe ser $W = V$. En particular, $\dim V \leq n$, ya que W puede ser generado por los n elementos $g_1 \rightharpoonup v$, $\dots$, $g_n \rightharpoonup v$. Esto prueba el corolario. $\square$

2.8. Los grados de las representaciones simples

Sabemos que el número k de representaciones simples no isomorfas de G es igual al número de clases de conjugación de G. Más aún, si $n_1, \dots, n_k$ son los grados de aquellas, sabemos que $\sum_{i=1}^k n_i^2 = |G|$. Es claro que esta condición impone restricciones a los valores que pueden tomar los números n_i. El objetivo de esta sección es dar otras relaciones satisfechas por los grados, que en muchos casos ayudan en su determinación.

Proposición 2.8.1. *Sea (V, ρ) una representación de G y sean n y χ su grado y su carácter, respectivamente. Para cada $g \in G$, $\chi(g)$ es un entero algebraico y $|\chi(g)| \leq n$. Más aún,*

(i) si $|\chi(g)| = n$, existe $\lambda \in \mathbb{C}^\times$ tal que $\rho(g) = \lambda\, \mathsf{id}_V$; y

(ii) si $\chi(g) = n$, entonces $\rho(g) = \mathsf{id}_V$.

Demostración. Sea $g \in G$ y sea n el orden de g, de manera que $g^n = e$. Como ρ es un homomorfismo de grupos, es $\rho(g)^n = \mathsf{id}_V$, así que la transformación lineal $\rho(g) : V \to V$ anula al polinomio $p = X^n - 1 \in \mathbb{C}[X]$. Esto implica que el polinomio minimal $\mu \in \mathbb{C}[X]$ de $\rho(g)$ divide a p y, entonces, que todas sus raíces son raíces de p. Como p tiene sus coeficientes enteros y es mónico, esas raíces son enteros algebraicos; es claro, además, que tienen módulo igual a 1.

Ahora bien, todos los autovalores $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ de $\rho(g)$ son raíces de μ, así que cada uno de ellos es un entero algebraico, y en consecuencia $\chi(g) = \operatorname{tr} \rho(g) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i$ es un entero algebraico porque es suma de enteros algebraicos.

La desigualdad triangular implica inmediatamente que $|\chi(g)| \leq \sum_{i=1}^n |\varepsilon_i| = n$.

Para probar (i), escribamos $\varepsilon = \chi(g)$ y supongamos que $|\varepsilon| = n$. Es $\varepsilon_1 \varepsilon^{-1} + \dots + \varepsilon_n \varepsilon^{-1} = 1$, así que

$$\mathsf{Re}(\varepsilon_1 \varepsilon^{-1}) + \dots + \mathsf{Re}(\varepsilon_n \varepsilon^{-1}) = 1.$$

Como $\mathsf{Re}(\varepsilon_i \varepsilon^{-1}) \leq |\varepsilon_i \varepsilon^{-1}| \leq \frac{1}{n}$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, vemos que tienen que valer, de hecho, las igualdades y en consecuencia $\varepsilon_i = \varepsilon / n$ para cada $i \in \{1 \dots, n\}$. Luego si ponemos $\lambda = \varepsilon / n$, es claro que $\rho(g) = \lambda\, \mathsf{id}_V$.

La afirmación (ii) sigue ahora de (i): si $\chi(g) = n$, entonces (i) nos dice que $\rho(g) = \lambda\, \mathsf{id}_V$ y, en consecuencia, que $\chi(g) = \operatorname{tr} \rho(g) = \lambda n$, así que la hipótesis implica que $\lambda = 1$. $\square$

Supongamos que las representaciones simples son $(V_1, \rho_1), \dots, (V_k, \rho_k)$, con (V_1, ρ_1) la representación trivial, y sean $\chi_1, \dots, \chi_k$ y $n_1, \dots, n_k$ los correspondientes carácteres y grados. Sean $c_1, \dots, c_k$ las clases de conjugación, con $c_1 = \{e\}$, y sean $g_1, \dots, g_k \in G$ tales que $g_i \in c_i$ para cada $i \in \{1, \dots, k\}$.

Lema 2.8.2. *Sea (V, ρ) una representación simple. Para cualquier $j \in \{1, \dots, k\}$, la aplicación lineal*

$$r_j = \sum_{h \in c_j} \rho(h) : V \to V$$

es un endomorfismo de representaciones y, en particular $r_1 = \mathsf{id}_V$. *Más aún, para cada* j, $l \in \{1, \dots, k\}$ *se tiene que*

$$r_j \circ r_l = \sum_{m=1}^{k} d_m^{j,l} \, r_m \tag{8}$$

con $d_m^{j,l} = \big|\{(h, h') \in c_j \times c_l : hh' = g_m\}\big|$ *cualesquiera sean* m, j, $l \in \{1, \dots, k\}$.

Demostración. Sea $j \in \{1, \dots, k\}$. Si $g \in G$, entonces

$$r_j \circ \rho(g) = \sum_{h \in c_j} \rho(h) \circ \rho(g) = \sum_{h \in c_j} \rho(hg).$$

Cuando h recorre c_j, $h' = g^{-1}hg$ también lo hace, así que podemos reescribir esta última suma como

$$\sum_{h' \in c_j} \rho(gh') = \sum_{h' \in c_j} \rho(g) \circ \rho(h') = \rho(g) \circ r_j.$$

Vemos así que $r_j \circ \rho(g) = \rho(g) \circ r_j$ para todo $g \in G$, esto es, que $r_j : V \to V$ es un endomorfismo de representaciones, como afirma el enunciado.

Por otro lado, si j, $l \in \{1, \dots, k\}$, es

$$r_j \circ r_l = \sum_{h \in c_j} \rho(h) \sum_{h' \in c_l} \rho(h') = \sum_{h \in c_j,\, h' \in c_l} \rho(h) \circ \rho(h') = \sum_{h \in c_j,\, h' \in c_l} \rho(hh'). \tag{9}$$

Si $g \in G$, consideremos el conjunto $D^{j,l}(g) = \{(h, h') \in c_j \times c_l : hh' = g\}$ y escribamos $d^{j,l}(g) = |D^{j,l}(g)|$. Es claro que $d^{j,l}(g)$ es exactamente la cantidad de sumandos en la suma (9) iguales a $\rho(g)$, y entonces

$$r_j \circ r_l = \sum_{g \in G} d^{i,j}(g) \, \rho(g). \tag{10}$$

Ahora bien, si g_1, g_2 son conjugados, de manera que existe $s \in G$ tal que $g_2 = sg_1s^{-1}$, es inmediato verificar que la función

$$(h, h') \in D^{j,l}(g_1) \mapsto (shs^{-1}, sh's^{-1}) \in D^{j,l}(g_2)$$

está bien definida y es biyectiva, y entonces $d^{j,l}(g_1) = d^{j,l}(g_2)$. Esto nos dice que $d^{j,l}(g)$ depende solamente de la clase de conjugación de g en G, de manera que, de hecho, $d^{j,l}(g) = d_m^{j,l}$ para todo $g \in c_m$, y que podemos entonces reescribir (10) en la forma

$$r_j \circ r_l = \sum_{m=1}^{k} d_m^{j,l} \sum_{g \in c_m} \rho(g) = \sum_{m=1}^{k} d_m^{j,l} \, r_m.$$

Esto prueba la segunda afirmación del lema. □

Lema 2.8.3. *Sea* (V, ρ) *una representación simple de grado* n *y carácter* χ. *Si* $j \in \{1, \dots, k\}$, *entonces el escalar*

$$\lambda_j = \frac{|c_j| \chi(g_j)}{n} \tag{11}$$

es un entero algebraico y $r_j = \lambda_j \mathsf{id}_V$.

Demostración. Retomemos las notaciones del Lema 2.8.2. La aplicación lineal $r_j : V \to V$ es, para cada $j \in \{1, \dots, k\}$, un endomorfismo de representaciones. El Lema de Schur 1.3.9, entonces, nos dice que existen escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{C}$ tales que

$$r_j = \lambda_j \mathsf{id}_V \text{ para cada } j \in \{1, \dots, k\} \tag{12}$$

Tomando trazas y usando el hecho de que χ es una función central, vemos que

$$n\lambda_j = \sum_{h\in c_j} \operatorname{tr}\rho(h) = |c_j|\chi(g_j),$$

de lo que se deduce la igualdad (11) del enunciado.

Ahora bien, la relación (8) del Lema 2.8.2 implica, en vista de (12), que

$$\lambda_j\lambda_l = \sum_{m=1}^{k} d_m^{j,l}\,\lambda_m$$

para cada j, $l \in \{1,\dots,k\}$. Si fijamos $j \in \{1,\dots,k\}$, esto nos dice que

$$\sum_{m=1}^{k}(d_m^{j,l} - \delta_{l,m}\lambda_j)\lambda_m = 0, \qquad \forall l \in \{1,\dots,k\}$$

o, equivalentemente, que se anula el producto

$$\begin{pmatrix} d_1^{j,1}-\lambda_j & d_2^{j,1} & \cdots & d_k^{j,1} \\ d_1^{j,2} & d_2^{j,2}-\lambda_j & \cdots & d_k^{j,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_1^{j,k} & d_2^{j,k} & \cdots & d_k^{j,k}-\lambda_j \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_i^1\\ \lambda_i^2 \\ \vdots \\ \lambda_i^k\end{pmatrix}.$$

Como el segundo factor no es nulo —en efecto, es $\lambda_1 = 1$ porque $r_1 = \mathsf{id}_V$,— el determinante de la matriz debe anularse: esto significa que λ_j es un autovalor de la matriz

$$\begin{pmatrix} d_1^{j,1} & d_2^{j,1} & \cdots & d_k^{j,1} \\ d_1^{j,2} & d_2^{j,2} & \cdots & d_k^{j,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_1^{j,k} & d_2^{j,k} & \cdots & d_k^{j,k} \end{pmatrix} \in M_k(\mathbb{Z}),$$

así que es un entero algebraico. □

Teorema 2.8.4. *Los grados de las representaciones simples de G dividen a $|G|$.*

Demostración. Fijemos $i \in \{1,\dots,k\}$ y mostremos que $n_i \mid |G|$.

De acuerdo al Lema 2.8.3, existen enteros algebraicos $\lambda_i^1, \dots, \lambda_i^k$ tales que $r_i^j = \lambda_i^k \mathsf{id}_{V_i}$ para cada $j \in \{1,\dots,k\}$. Es entonces $\operatorname{tr} r_i^j = \lambda_i^j n_i$; como χ_i es una función central, es también

$$\operatorname{tr} r_i^j = \sum_{h\in c_j}\operatorname{tr}\rho_i(h) = \sum_{h\in c_j}\chi_i(h) = |c_j|\chi_i(g_j),$$

así que, de hecho,

$$\lambda_i^j n_i = |c_j|\chi_i(g_j). \tag{13}$$

Finalmente, como V_i es simple, es $\langle\chi_i,\chi_i\rangle = 1$ y, usando el Lema 2.2.2 y la igualdad (13), esto nos dice que

$$|G| = \sum_{j=1}^{k}|c_j|\chi_i(g_j)\overline{\chi_i(g_j)} = n_i\sum_{j=1}^{k}\lambda_i^j\overline{\chi_i(g_j)}.$$

Concluimos de esta forma que el número racional $|G|/n_i$ es igual a $\sum_{j=1}^{k}\lambda_i^j\overline{\chi_i(g_j)}$, que es un entero algebraico porque λ_i^j, $\overline{\chi(g_j)} \in \mathcal{O}$ para cada $j \in \{1,\dots,k\}$. Debe ser entonces $|G|/n_i \in \mathbb{Z}$ y, en definitiva, vemos que n_i divide a $|G|$, como queríamos probar. □

Lema 2.8.5. *Sea $Z(G)$ el centro de G. Si (V,ρ) es una representación simple de G, existe un homomorfismo de grupos $\gamma : Z(G) \to \mathbb{C}^\times$ tal que*

$$\rho(z) = \gamma(z)\mathsf{id}_V$$

para cada $z \in Z(G)$.

Decimos que γ es el *carácter central* de la representación V.

Demostración. Sea $z \in Z(G)$. Para cada $g \in G$ es

$$\rho(g) \circ \rho(z) = \rho(gz) = \rho(zg) = \rho(z) \circ \rho(g),$$

así que $\rho(z) : V \to V$ es un endomorfismo de representaciones. Como V es simple, el Lema de Schur 1.3.9 nos dice que existe un escalar $\gamma(z) \in \mathbb{C}^\times$ tal que $\rho(z) = \gamma(z)\mathsf{id}_V$.

Tenemos así definida una función $\gamma : Z(G) \to \mathbb{C}^\times$ que satisface la identidad del enunciado. Se trata de un homomorfismo de grupos: si z, $z' \in Z(G)$, la definición de γ implica que

$$\gamma(zz')\mathsf{id}_V = \rho(zz') = \rho(z) \circ \rho(z') = \gamma(z)\mathsf{id}_V \circ \gamma(z')\mathsf{id}_V = \gamma(z)\gamma(z')\mathsf{id}_V,$$

y, como $\mathsf{id}_V \neq 0$ porque V no es el espacio nulo, esto nos dice que $\gamma(zz') = \gamma(z)\gamma(z')$. □

Teorema 2.8.6 (G. Frobenius, I. Schur)**.** *Sea $Z(G)$ el centro de G. El grado de toda representación simple de G divide al índice $[G : Z(G)]$ de $Z(G)$ en G.*

Demostración. Mostremos primero que el teorema es consecuencia del siguiente caso especial:

$$\text{si } (V,\rho) \text{ es una representación simple de } G \text{ tal que } Z(G) \cap \ker\rho = (e), \text{ entonces } \dim V \text{ divide a } [G : Z(G)]. \tag{14}$$

Sea, en efecto, $K = Z(G) \cap \ker\rho$; es un subgrupo normal de G contenido en $Z(G)$, así que podemos considerar los cocientes $\bar G = G/K$ y $\bar Z = Z(G)/K$ y la proyección canónica $p : G \to \bar G$. Como $K \subseteq \ker\rho$, existe un homomorfismo $\bar\rho : \bar G \to \mathrm{GL}(V)$ tal que $\rho = \bar\rho \circ p$, de manera que tenemos una representación $(\bar V, \bar\rho)$ de $\bar G$ sobre $\bar V = V$.

Como $p^*(\bar V)$, la restricción de $\bar V$ a lo largo de p, es precisamente V, la Proposición 1.5.6(*ii*) implica que $\bar V$ es simple. Es inmediato verificar, por otro lado, que $Z(\bar G) \cap \ker\bar\rho = (e)$, así que si suponemos la validez de la afirmación (14) podemos concluir que $\dim V$ divide a $[\bar G : Z(\bar G)]$. Pero como $\bar Z \subseteq Z(\bar G)$, es

$$[G : Z] = [\bar G : \bar Z] = [\bar Z : Z(\bar G)]\,[Z(\bar G) : \bar Z],$$

así que, de hecho, $\dim V$ divide a $[G : Z]$. Vemos de esta forma que la afirmación (14) implica el teorema, como dijimos. Probémosla.

Sea (V,ρ) una representación simple de G de grado n tal que $Z(G) \cap \ker\rho = (e)$, y sean $\chi : G \to \mathbb{C}$ y $\gamma : Z(G) \to \mathbb{C}^\times$ el carácter y el carácter central de V, respectivamente.

Sea $C(G)$ el conjunto de clases de conjugación de G; si $c \in C(G)$, escribamos g_c a uno de sus elementos. Si $z \in Z(G)$ y $c \in C(G)$, entonces el conjunto $z \cdot c = \{zg : g \in c\}$ es también un elemento de $C(G)$. Podemos entonces definir una función $(z,c) \in Z(G) \times C(G) \mapsto z \cdot g \in C(G)$, y es fácil verificar que se trata de una acción de $Z(G)$ sobre $C(G)$. Escribamos $C(G)/Z(G)$ al correspondiente conjunto de órbitas y fijemos un elemento $c_g \in o$ en cada órbita $o \in C(G)/Z(G)$.

Necesitaremos las siguientes observaciones:

- Es claro que si $z \in Z(G)$ y $c \in C(G)$ se tiene que $|z \cdot c| = |c|$. Se sigue de esto inmediatamente que

$$\textit{si } o \in C(G)/Z(G), \textit{ es } |c| = |c_o| \textit{ para toda clase } c \in o. \tag{15}$$

- Si $o \in C(G)/Z(G)$ una órbita, entonces $|o| \leq |Z(G)|$. Afirmamos que

$$\textit{si } o \in C(G)/Z(G) \textit{ es tal que } |o| < |Z(G)|, \textit{ entonces para cada } c \in o \textit{ y cada } g \in c \textit{ se tiene que } \chi(g) = 0. \tag{16}$$

En efecto, sea $o \in C(G)/Z(G)$ tal que $|o| < |Z(G)|$ y sea $c \in o$. entonces $z \in Z(G)$ tal que $z \neq e$ y $z \cdot c = c$. Si $g \in c$, entonces esto nos dice que también $zg \in c$, así que existe $h \in G$ tal que $g = zhgh^{-1}$ y, en consecuencia,

$$\rho(g) = \rho(z) \circ \rho(hgh^{-1}) = \gamma(z)\rho(hgh^{-1}).$$

Tomando trazas en esta igualdad, vemos que $\chi(g) = \gamma(z)\chi(g)$ y, como $\gamma(z) \neq 1$, podemos concluir que $\chi(g) = 0$. Esto prueba (16).

- Se tiene que

$$\textit{si } o \in C(G)/Z(G) \textit{ y } c,\ c' \in o, \textit{ entonces } |\chi(g_c)| = |\chi(g_{c'})|. \tag{17}$$

En efecto, en ese caso existe $z \in Z(G)$ tal que $z \cdot c = c'$ y esto implica que zg_c y g'_c son conjugados, de manera que $\chi(g_{c'}) = \chi(zg_c)$. Por otro lado,

$$\chi(zg_c) = \operatorname{tr}\rho(zg_c) = \operatorname{tr}\rho(z) \circ \rho(g_c) = \operatorname{tr}\gamma(z)\rho(g_c) = \gamma(z)\chi(g_c)$$

así que $|\chi(zg_c)| = |\gamma(z)\chi(g_c)| = |\chi(g_c)|$ porque $|\gamma(z)| = 1$.

Como V es simple, es $\langle\chi, \chi\rangle = 1$ y entonces

$$|G| = \sum_{g \in G} |\chi(g)|^2 = \sum_{o \in C(G)/Z(G)} \sum_{c \in o} \sum_{g \in c} |\chi(g)|^2.$$

De acuerdo a (16), en esta suma los únicos términos posiblemente no nulos son aquellos que corresponden a órbitas $o \in C(G)/Z(G)$ de exactamente m elementos. Entonces

$$\begin{aligned}
|G| &= \sum_{\substack{o \in C(G)/Z(G) \\ |o| = |Z(G)|}} \sum_{c \in o} \sum_{g \in c} |\chi(g)|^2 \\
&= \sum_{\substack{o \in C(G)/Z(G) \\ |o| = |Z(G)|}} \sum_{c \in o} |c||\chi(g_c)|^2 && \text{porque } \chi \text{ es una función central} \\
&= \sum_{\substack{o \in C(G)/Z(G) \\ |o| = |Z(G)|}} |c_o| \sum_{c \in o} |\chi(g_c)|^2 && \text{por (15)} \\
&= \sum_{\substack{o \in C(G)/Z(G) \\ |o| = |Z(G)|}} |Z(G)|\,|c_o|\,|\chi(g_{c_o})| && \text{por (17).}
\end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\frac{[G : Z(G)]}{n} = \frac{|G|}{n|Z(G)|} = \sum_{\substack{o \in C(G)/Z(G) \\ |o| = |Z(G)|}} |c_o||\chi(g_{c_o})| = \sum_{\substack{o \in C(G)/Z(G) \\ |o| = |Z(G)|}} \frac{|c_o|\chi(g_{c_o})}{n} \chi(g_{c_o}^{-1}).$$

De acuerdo a la Proposición 2.8.1 y al Lema 2.8.3, el último miembro de esta cadena de igualdades es un entero algebraico. Como el primer miembro es evidentemente un número racional, concluimos que se trata, de hecho, de un entero. Esto prueba (14). □

3. Aplicaciones

3.1. La solubilidad de los grupos de orden $p^a q^b$

Definición 3.1.1. Decimos que un grupo G es *soluble* si hay una cadena

$$(e) = G_0 \subseteq G_1 \subseteq G_2 \subseteq \cdots \subseteq G_l = G$$

tal que para cada $i \in \{1, \ldots, l\}$ es subgrupo G_{i-1} es normal en G_i y el cociente G_i/G_{i-1} es abeliano.

Lema 3.1.2. *(i) Un grupo abeliano es soluble.*

(ii) Si G es un grupo y $H \subseteq G$ es un subgrupo normal tal que H y G/H son soluble, entonces G es soluble.

Demostración. □

El objetivo de esta sección es probar el siguiente teorema de William Burnside. Es un resultado muy importante para el estudio de la estructura de los grupos finitos y fue una de las primeras aplicaciones de la teoría de carácteres. Se trata de uno de los primeros resultados del programa de clasificación de los grupos finitos simples.

Hasta la década de 1960, las pruebas que se conocían de este teorema estaban basadas en la teoría de carácteres. En ese momento, John Thompson indicó como, combinando resultados de [FT1963] y [Tho1968], es posible dar una demostración puramente algebraica, pero ésta es extremadamente larga y complicada. Más tarde, a princípios de la década de 1970, Helmut Bender [Ben1972] logró simplicar considerablemente ese argument, y luego David Goldschmidt [Gol1970], para el caso de órdenes impares, y Hiroshi Matsuyama [Mat1973], para el caso de órdenes pares, dieron pruebas mucho más simples independientes de la teoría de carácteres.

Teorema 3.1.3 (W. Burnside, 1904)**.** *Un grupo G de orden $p^a q^b$, con p y q primos, es soluble.*

Lema 3.1.4. *Sea (V, ρ) una representación simple de grado n y carácter χ. Sea $g \in G$, sea $c \subseteq G$ es la clase de conjugación de g y pongamos $m = |c|$. Si $(n : m) = 1$, entonces o bien $\chi(g) = 0$ o bien $\rho(g) = \lambda \operatorname{id}_V$ para algún $\lambda \in \mathbb{C}^\times$.*

Demostración. Si $|\chi(g)| = n$, de la Proposición 2.8.1(*i*) sabemos que existe $\lambda \in \mathbb{C}^\times$ tal que $\rho(g) = \lambda \operatorname{id}_V$. Supongamos entonces que $|\chi(g)| < n$.

Por hipótesis, existen α, $\beta \in \mathbb{Z}$ tales que $\alpha n + \beta m = 1$, así que

$$\frac{\chi(g)}{n} = \alpha\chi(g) + \beta\frac{m\chi(g)}{n}$$

Del Lema 2.8.3 sabemos que $\frac{m\chi(g)}{n}$ es un entero algebraico, así que esta ecuación implica que $\frac{\chi(g)}{n}$ también lo es.

Sea t el orden de g, sea $\zeta = \mathrm{e}^{2\pi i/t}$ y consideremos el cuerpo ciclotómico $K = \mathbb{Q}(\zeta)$; se trata de una extension Galoisiana de $\mathbb{Q}$: sea $\Gamma = \operatorname{Gal}(K \mid \mathbb{Q})$ su grupo de Galois. Todos los autovalores $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ de g son raíces t-ésimas de la unidad, así que $\chi(g) \in K$.

Sea

$$a = \prod_{\sigma\in\Gamma} \frac{\sigma(\chi(g))}{n}.$$

Para cada $\sigma \in \Gamma$ el número $\frac{\sigma(\chi(g))}{n}$ es un entero algebraico, así que a también lo es. Por otro lado, es claro que $\sigma(a) = a$ para todo $\sigma \in \Gamma$, así que $a \in \mathbb{Q}$. Concluimos así que $a \in \mathbb{Z}$.

Ahora bien, si $\sigma \in \Gamma$, entonces $\sigma(\varepsilon_i)$ es una raíz de la unidad para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, así que $|\sigma(\varepsilon_i)| = 1$. En consecuencia

$$|\sigma(\chi(g))| = |\sigma(\varepsilon_1) + \cdots + \sigma(\varepsilon_n)| \leq |\sigma(\varepsilon_1)| + \cdots + |\sigma(\varepsilon_n)| = n$$

y

$$|a| = \left|\prod_{\sigma\in\Gamma} \frac{\sigma(\chi(g))}{n}\right| \leq \frac{|\chi(g)|}{n} < 1.$$

Esto implica que debe ser $a = 0$ y, entonces, $\chi(g) = 0$. □

Teorema 3.1.5. *Si un grupo G posee una clase de conjugación $c \neq \{e\}$ tal que $|c| = p^m$ con p primo y $m \geq 0$, entonces G no es simple no abeliano.*

Demostración. Sea $g \in c$; por hipótesis, $g \neq e$. Si $|c| = 1$, entonces $g \in Z(G)$, así que $Z(G)$ es un subgrupo normal no trivial de G: vemos que en este caso G no es simple. Supongamos entonces que $|c| = p^m > 1$.

Sean (V_1, ρ_1), …, (V_k, ρ_k) las representaciones simples de G, y sean n_1, …, n_k y χ_1, …, χ_k sus grados y carácteres, respectivamente; podemos suponer que V_1 es la representación trivial.

De acuerdo al Corolario 2.4.8, tenemos que

$$\sum_{j=1}^{k} n_j \chi_j(g) = \chi_{\mathsf{reg}}(g) = 0.$$

El término que corresponde a $j = 1$ en esta suma es $n_1\chi_1(g) = 1$, así que podemos reescribir esta igualdad en la forma

$$\frac{1}{p} = -\sum_{j \geq 1} \frac{n_j}{p} \chi_j(g). \tag{18}$$

Si para cada $j \geq 2$ se tuviera que

$$p \nmid n_j \implies \chi_j(g) = 0,$$

para cada $j \geq 2$ el número $\frac{n_j}{p}\chi_j(g)$ sería un entero algebraico y, en vista de (18), tendríamos que $\frac{1}{p} \in \mathcal{O}$: esto es absurdo.

Existe, entonces, necesariamente $j \geq 2$ tal que $\chi_j(g) \neq 0$ y $p \nmid n_j$. En ese caso $(n_j : |c|) = 1$ y el Lema 3.1.4 dice que existe $\lambda \in \mathbb{C}^\times$ tal que $\rho_j(g) = \lambda \,\mathsf{id}_{V_j}$. Puede ser que $\ker \rho_j$ sea o no trivial. En el segundo caso, se trata de un subgrupo normal no trivial que es propio —porque ρ_j no es la representación trivial,— así que G no es simple. En el primero, por otro lado, es $g \in Z(G)$, ya que para cada $h \in G$,

$$\rho_j(hg) = \rho_j(h) \circ \rho_j(g) = \lambda\rho_j(h) = \rho_j(g) \circ \rho_j(h) = \rho_j(gh),$$

de manera que $hg = gh$ porque ρ_j es inyectivo: luego $Z(G)$ es no trivial, así que G es abeliano o no simple. □

Corolario 3.1.6. *Si G es un grupo de orden $p^a q^b$ con p y q primos y a, $b \geq 0$, entonces G no es simple no abeliano.*

Demostración. Supongamos, por ejemplo, que $b > 0$, de manera que $q \mid |G|$, y sea $P \subseteq G$ un q-subgrupo de Sylow. El centro $Z(P)$ de P es no trivial porque se trata de un q-grupo: sea entonces $g \in Z(P) \setminus \{e\}$. Si $C_G(g)$ es el centralizador de g en G, la elección de g implica que $P \subseteq C_G(g)$, así que el cardinal $|c| = [G : C_G(g)]$ de la clase de conjugación c de g divide a $[G : P] = p^b$. El corolario sigue entonces inmediatamente del teorema. □

Demostración del Teorema 3.1.3. Hagamos inducción con respecto a G. Si G tiene orden como en el enunciado, entonces el Corolario 3.1.6 nos dice que o G es abeliano o G no es simple. En el primer caso, es inmediato que G es soluble. En el segundo, existe un subgrupo $H \subseteq G$ normal propio maximal. La hipótesis inductiva implica que H es soluble. Por otro lado, elección de H implica que G/H es un grupo simple cuyo orden es como en el enunciado del teorema, de manera que se le aplica el Corolario 3.1.6, y que es entonces abeliano. El Lema 3.1.2(*ii*) implica entonces que G es soluble, completando la inducción. □

3.2. El teorema de Hurwitz

Decimos que un polinomio $f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n]$ en *bilineal* si es de la forma

$$f = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j} x_i y_j.$$

El objetivo de esta sección es probar el siguiente resultado de Adolf Hurwitz siguiendo un argumento propuesto por Beno Eckmann en [Eck1943].

Teorema 3.2.1 (A. Hurwitz [Hur1898])**.** *Sean $n \geq 1$. Si $f_1, \ldots, f_n \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n]$ son polinomios bilineales tales que*

$$\Bigl(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\Bigr)\Bigl(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\Bigr) = \sum_{i=1}^{n} f_i^2, \tag{19}$$

entonces $n \in \{1, 2, 4, 8\}$.

Fijemos $n \geq 1$ y supongamos que tenemos tales polinomios $f_1, \ldots, f_n$. Para cada $k \geq 0$ escribamos $[k] = \{1, \ldots, k\}$, e introduzcamos las siguientes notaciones:

- sean $a_{i,j,k} \in \mathbb{C}$, para $i, j, k \in [n]$, los escalares son tales que
$$f_i = \sum_{j,k \in [n]} a_{i,j,k} x_i y_j$$
- Si i, $k \in [n]$, sea
$$f_{i,k} = \sum_{j \in [n]} a_{i,j,k} x_j,$$
de manera que $f_i = \sum_{k \in [n]} f_{i,k} y_k$ para cada $i \in [n]$.
- Para cada $j \in [n]$, consideremos la matriz
$$A_j = (a_{i,j,k})_{i,k \in [n]} \in M_n(\mathbb{C}),$$
y sea
$$A = (f_{i,j})_{i,j \in [n]} \in M_n(\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n])$$

Si j, $k \in [n]$, mirando el coeficiente de $y_j y_k$ en (19), vemos que

$$\delta_{j,k} \sum_{i \in [n]} x_i^2 = \sum_{i \in [n]} f_{i,j} f_{i,k},$$

y entonces

$$\Bigl(\sum_{i \in [n]} x_i^2\Bigr) A = AA^t = A^t A.$$

Mirando ahora los coeficientes de $x_1, \ldots, x_n$ es esta última igualdad, concluimos que

$$A_i^t A_j + A_j^t A_i = 0 \qquad \text{si } i,\ j \in [n] \text{ son distintos, y} \tag{20}$$

$$A_i^t A_i = A_i A_i^t = I_n \qquad \text{si } i \in [n].a \tag{21}$$

Lema 3.2.2. *Para cada $i \in [n-1]$, sea $B_i = A_i^t A_n$. Entonces si i, $j \in [n-1]$ e $i \neq j$, es*

$$B_i B_i^t = I_n, \qquad B_i + B_i^t = 0,$$
$$B_i^2 = -I_n, \qquad B_i B_j + B_j B_i = 0.$$

Demostración. Las cuatro identidades con consecuencias inmediatas de (20) y (21). □

Se sigue en particular de este lema que $B_1, \ldots, B_{n-1} \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$. Consideremos el subgrupo $G = \langle B_1, \ldots, B_{n-1} \rangle \subseteq \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ generado por estas $n-1$ matrices.

Para cada $I = \{i_1, \ldots, i_r\} \subseteq [n-1]$, con $1 \leq i_1 < \cdots < i_r < n$, escribamos

$$B_I = B_{i_1} B_{i_2} \cdots B_{i_r}.$$

Usando las dos últimas relaciones del lema, es inmediato verificar que

$$G = \{B_I, -B_I : I \subseteq [n-1]\} \tag{22}$$

y que para cada $I \subseteq [n-1]$ con r elementos es

$$B_I^2 = (-1)^{\binom{r+1}{2}} I_n.$$

Más generalmente, si I, $J \subseteq [n-1]$, entonces existe $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ tal que

$$B_I B_J = \varepsilon B_{I \triangle J}.$$

Aquí $I \triangle J$ es la diferencia simétrica $(I \setminus J) \cup (J \setminus I)$.

Lema 3.2.3. *(i) Si $g \in G$ no es central, entonces la clase de conjugación de g es $\{\pm g\}$.*

(ii) El subgrupo derivado es $G' = \{\pm I_n\}$.

Demostración. (i) Supongamos que $g = \varepsilon B_I$ con $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ e $I \subseteq [n-1]$. De las relaciones del Lema 3.2.2 es claro que $B_i B_I B_i^{-1} \in \{\pm B_I\}$ para cada $i \in [n-1]$. Como $B_1, \ldots, B_{n-1}$ genera a G, esto implica que la clase de conjugación de g es o bien $\{g\}$ o bien $\{\pm g\}$, y el primer caso ocurre exactamente cuando g es central.

(ii) Como $G = \langle B_1, \ldots, B_{n-1} \rangle$, G' está generado por $\{[B_i, B_j] : i, j \in [n-1], i \neq j\}$. Usando las dos últimas relaciones del Lema 3.2.2, es inmediato ver que $[B_i, B_j] = -I_n$ cualesquiera sean i, $j \in [n-1]$ tales que $i \neq j$. □

Lema 3.2.4. *Sea $I \subseteq [n-1]$. Si $B_I \in Z(G)$, entonces o bien $I = \varnothing$ o bien $I = [n-1]$ y n es par.*

Demostración. Supongamos que $\varnothing \subsetneq I = \{i_1, \ldots, i_r\} \subsetneq [n-1]$ es tal que B_I es central en G y $1 \leq i_1 < \cdots < i_r < n$. Entonces

$$\begin{aligned} B_I &= B_{i_1} B_I B_{i_1}^{-1} \\ &= (B_{i_1} B_{i_1} B_{i_1}^{-1})(B_{i_1} B_{i_2} B_{i_1}^{-1}) \cdots (B_{i_1} B_{i_r} B_{i_1}^{-1}) \\ &= B_{i_1}(-B_{i_2}) \cdots (-B_{i_r}) \\ &= (-1)^{r-1} B_I \end{aligned} \tag{23}$$

y, si $j \in [n-1] \setminus I$,

$$\begin{aligned} B_I &= B_j B_I B_j^{-1} \\ &= (B_j B_{i_1} B_j^{-1})(B_j B_{i_2} B_j^{-1}) \cdots (B_j B_{i_r} B_j^{-1}) \\ &= (-B_{i_1})(-B_{i_2}) \cdots (-B_{i_r}) \\ &= (-1)^r B_I, \end{aligned}$$

de manera que $B_I = -B_I$: como $B_I \neq 0$, esto es absurdo.

Esta contradicción nos dice que si $B_I \in Z(G)$, entonces $I = [n-1]$, que $r = n-1$ y, de acuerdo a la ecuación (23), que $n-2$ es par. □

Lema 3.2.5. *Si $n = 2m+1$ es impar, entonces $G' = Z(G) = \langle -I_n \rangle$ es un subgrupo cíclico de orden 2 y $|G| = 2^n$. Hay $2^{n-1}+1$ clases de conjugación y, a menos de isomorfismo, 2^{n-1} representaciones de grado 1 y una representaciones simple de grado 2^{n-1}.*

Demostración. Si $\varepsilon B_I \in Z(G)$, con $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ e $I \subseteq [n-1]$, entonces $B_I \in Z(G)$, porque por supuesto $-I \in Z(G)$, y el Lema 3.2.4 nos dice que $I = \varnothing$. Así, es $Z(G) = \{\pm I_n\} = G'$.

Supongamos que I, $J \subseteq [n-1]$ y $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ son tales que $B_I = \varepsilon B_J$. Entonces

$$(-1)^{\binom{|I|+1}{2}} I_n = B_I^2 = \varepsilon B_I B_J = \eta B_{I \triangle J}$$

para algún $\eta \in \{\pm 1\}$, así que $B_{I \triangle J} \in Z(G)$. El lema anterior implica que $I \triangle J = \varnothing$, esto es, que $I = J$ y debe ser necesariamente entonces $\varepsilon = 1$. Vemos de esta forma que G tiene exactamente 2^n elementos, porque los elementos listados en (22) son distintos dos a dos.

De acuerdo al Lema 3.2.3(i), las clases de conjugación tienen o uno o dos elementos, y el primer caso el elemento correspondiente es central. Acabamos de probar que hay exactamente dos elementos centrales en G, así que los otros $2^n - 2$ elementos se distribuyen en $2^{n-1} - 1$ clases de conjugación de dos elementos cada una: hay, entonces, $2^{n-1} + 1$ clases de conjugación en total.

En vista de esto, el Teorema 2.5.3 nos dice que G posee $2^{n-1}+1$ representaciones simples no isomorfas. Del Corolario 2.7.5 sabemos que G tiene $[G:G']=2^{n-1}$ representaciones de grado 1, así que hay exactamente una representaciones de grado $k>1$. Finalmente, según el Corolario 2.4.8, la suma de los cuadrados de los grados de las representaciones simples es $|G|$, así que $2^n=|G|=2^{n-1}\cdot 1^2+k^2$. Se sigue inmediatamente que $k=2^{n-1}$. □

Lema 3.2.6. *Si $n=2m$ es par, entonces $G'=\langle -I_n\rangle$, $Z(G)=\{\pm I_n,\pm B_{[n-1]}\}$ y $|G|=2^n$. Hay $2^{n-1}+2$ clases de conjugación y, a menos de isomorfismo, 2^{n-2} representaciones de grado 1 y dos de grado 2^{m-1}.*

Demostración. El Lema 3.2.4 implica inmediatamente que

$$Z(G)\subseteq\{\pm I_n,\pm B_{[n-1]}\} \tag{24}$$

y, como los cuatro elementos de este último conjunto son centrales —esto sigue de un cálculo directo usando las relaciones del Lema 3.2.2,— vale, de hecho, la igualdad.

Afirmamos que si I, $J\subseteq[n-1]$, entonces

$$B_IZ(G)=B_JZ(G)\iff \text{o } I=J \text{ o } I=[n-1]\setminus J. \tag{25}$$

En efecto, supongamos que $B_IZ(G)=B_JZ(G)$, de manera que $B_IB_J^{-1}\in Z(G)$. Existe $\varepsilon\in\{\pm1\}$ tal que $B_IB_J^{-1}=\varepsilon B_{I\triangle J}$, así que (24) implica que o bien $I\triangle J=\varnothing$, de manera que $I=J$, o bien $I\triangle J=[n-1]$, de manera que I y J son complementarios en $[n-1]$. Esto prueba la implicación ($\Longrightarrow$) en (25). La implicación recíproca sigue de un cálculo directo: es evidente que si $I=J$ entonces $B_IZ(G)=B_JZ(G)$; si, en cambio, es $I=[n-1]\setminus J$ y ponemos $r=|J|$, existe $\varepsilon\in\{\pm1\}$ tal que

$$B_IB_J^{-1}=(-1)^{\binom{r+1}{2}}B_IB_J=(-1)^{\binom{r+1}{2}}\varepsilon B_{I\triangle J}=(-1)^{\binom{r+1}{2}}\varepsilon B_{[n-1]}\in Z(G).$$

La equivalencia (25) nos permite contar los elementos de $G/Z(G)$: es $[G:Z(G)]=2^{n-2}$ y, en consecuencia, $|G|=2^n$.

Hay 4 clases de conjugación de un elemento, correspondientes a los elementos de $Z(G)$, y, según el Lema 3.2.3(*i*), todas las demás tienen dos elementos. Esto implica que hay en total $(2^n-4)/2+4=2^{n-1}+2$ clases de conjugación.

Hay el mismo número de representaciones simples no isomorfas. De ellas, $[G:G']=2^{n-1}$ tienen grado 1, así que hay exactamente dos de grados más grandes que 1: sean a y b los grados respectivos. Del Corolario 2.4.8, es

$$2^n=|G|=2^{n-1}\cdot 1^1+a^2+b^2,$$

y el teorema 2.8.4 nos dice además que a y b dividen a 2^n. Se sigue inmediatamente que debe ser $a=b=2^{m-1}$. □

Podemos finalmente probar el resultado principal de esta sección.

Demostración del Teorema 3.2.1. Como $G\subseteq\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$, tenemos una representación natural $(\mathbb{C}^n,\rho)$ de G sobre $\mathbb{C}^n$ en la que el homomorfismo $\rho:G\to\mathrm{GL}(\mathbb{C}^n)$ es *inyectivo* y para el cual es $\rho(-I_n)=-\mathsf{id}_{\mathbb{C}^n}$. Supongamos que $\mathbb{C}^n=V_1\oplus\cdots\oplus V_r$ es una descomposición de $\mathbb{C}^n$ como suma directa de subrepresentaciones simples.

Si $j\in\{1,\dots,r\}$ es tal que $\dim V_j=1$, entonces $-I_n\in G'$ actúa trivialmente sobre V_j, así que $\rho(-I_n)$ tiene a 1 como autovector. Esto es absurdo, y vemos que todas las suprepresentaciones $V_1,\dots,V_r$ tienen grado mayor que 1.

- Si n es impar, el Lema 3.2.5 nos dice que hay, a menos de isomorfismo, una única representación simple de grado mayor que 1, que tiene grado 2^{n-1}. Cada una de las subrepresentaciones $V_1,\dots,V_r$ debe ser isomorfa a ésta y, en consecuencua, $2^{n-1}\mid n$. Esto solo es posible si $n=1$.
- Si, en cambio, $n=2m$ es par, el Lema 3.2.6 implica que las $V_1,\dots,V_r$ tienen grado 2^{m-1}, así que $2^{m-1}\mid n$. Es fácil verificar que entonces debe ser $n\in\{2,4,8\}$.

Esto prueba el teorema. □

Referencias

Libros de texto

[Col1990] M. J. Collins, *Representations and characters of finite groups*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 22, Cambridge University Press, Cambridge, 1990. MR1050762 (91f:20001) ↑

[FH1991] William Fulton and Joe Harris, *Representation theory*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 129, Springer-Verlag, New York, 1991. A first course; Readings in Mathematics. MR1153249 (93a:20069) ↑

[Hup1998] Bertram Huppert, *Character theory of finite groups*, de Gruyter Expositions in Mathematics, vol. 25, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1998. MR1645304 (99j:20011) ↑

[Jam1978] G. D. James, *The representation theory of the symmetric groups*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 682, Springer, Berlin, 1978. MR513828 (80g:20019) ↑

[Rot1995] Joseph J. Rotman, *An introduction to the theory of groups*, 4th ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 148, Springer-Verlag, New York, 1995. MR1307623 (95m:20001) ↑

[Sco1987] W. R. Scott, *Group theory*, 2nd ed., Dover Publications Inc., New York, 1987. MR896269 (88d:20001) ↑

[Ser1977] Jean-Pierre Serre, *Linear representations of finite groups*, Springer-Verlag, New York, 1977. Translated from the second French edition by Leonard L. Scott; Graduate Texts in Mathematics, Vol. 42. MR0450380 (56 #8675) ↑

Artículos

[Ben1972] Helmut Bender, *A group theoretic proof of Burnside's p^aq^b-theorem*, Math. Z. **126** (1972), 327–338. MR0322048 (48 #412) ↑28

[Eck1943] Beno Eckmann, *Gruppentheoretischer Beweis des Satzes von Hurwitz-Radon über die Komposition quadratischer Formen*, Comment. Math. Helv. **15** (1943), 358–366 (German). MR0009936 (5,225e) ↑29

[Gol1970] David M. Goldschmidt, *A group theoretic proof of the p^aq^b theorem for odd primes*, Math. Z. **113** (1970), 373–375. MR0276338 (43 #2085) ↑28

[Hur1898] Adolf Hurwitz, *Ueber die Composition der quadratischen Formen von beliebig vielen Variabeln*, Gött. Nachr. (1898), 309–316. ↑30

[Mat1973] Hiroshi Matsuyama, *Solvability of groups of order 2^ap^b*, Osaka J. Math. **10** (1973), 375–378. MR0323890 (48 #2243) ↑28

[FT1963] Walter Feit and John G. Thompson, *Solvability of groups of odd order*, Pacific J. Math. **13** (1963), 775–1029. MR0166261 (29 #3538) ↑28

[Tho1968] John G. Thompson, *Nonsolvable finite groups all of whose local subgroups are solvable*, Bull. Amer. Math. Soc. **74** (1968), 383–437. MR0230809 (37 #6367) ↑28

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. Ciudad Universitaria, Pabellón I. Buenos Aires (1428) Argentina.

E-mail address: mariano@dm.uba.ar