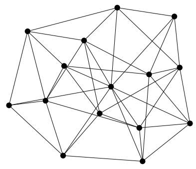
El grafo aleatorio



Mariano Suárez-Alvarez

5 de octubre, 2011

§1. Grafos aleatorios

Para cada $n \in \mathbb{N}$ escribimos $[\![n]\!] = \{1, \dots, n\}$. Sea $\mathscr{G}(n)$ el conjunto de todos los grafos (sin bucles ni arcos paralelos) con conjunto de vértices $[\![n]\!]$. Un tal grafo puede identificarse con su conjunto de arcos, que es un subconjunto del conjunto de subconbjuntos de dos elementos de $[\![n]\!]$: esto implica que

$$|\mathscr{G}(n)| = 2^{\binom{n}{2}}.$$

Proposición 1.1. *Sean i, $j \in [\![n]\!]$ distintos y sea $H \in \mathscr{G}(n,p)$.*

(*i*) *La probabilidad de que los vértices i y j estén conectados en $G \in \mathscr{G}(n,p)$ es*

$$\mathbb{P}(ij \in G) = p.$$

(*ii*) *La probabilidad de que $G \in \mathscr{G}(n,p)$ sea H es*

$$\mathbb{P}(G = H) = p^{e(H)} q^{\binom{n}{2} - e(H)}$$

En particular, si $p = \frac{1}{2}$, entonces $\mathbb{P}(G = H) = 2^{-\binom{n}{2}}$ y en este caso todos los grafos son equiprobables.

Compilado: 14 de mayo de 2015

(*iii*) *La probabilidad de que $G \in \mathscr{G}(n,p)$ contenga a H es*

$$\mathbb{P}(G \supseteq H) = p^{e(H)}.$$

Proposición 1.2. *Sea $I \subseteq [\![n]\!]$ un subconjunto con k elementos y sea H un grafo sobre I. La probabilidad de que $G \in \mathscr{G}(n,p)$ induzca a H sobre los vértices I es*

$$\mathbb{P}(G \text{ induce } H) = p^{e(H)} q^{\binom{k}{2} - e(H)}$$

Demostración. Un grafo G induce H sobre los vértices de I si cada vez que i, $j \in I$ son distintos se tiene que $ij \in G$ si y solamente si $ij \in H$, de manera que

$$\{G \in \mathscr{G}(n,p) : G \text{ induce } H\} = \bigcap_{\substack{i,j \in I \\ i \neq j \\ ij \in H}} \{G \in \mathscr{G}(n,p) : ij \in G\} \cap \bigcap_{\substack{i,j \in I \\ i \neq j \\ ij \notin H}} \{G \in \mathscr{G}(n,p) : ij \notin G\}.$$

Los subconjuntos de $\mathscr{G}(n,p)$ que aparecen intersecados en el miembro derecho de esta igualdad son independientes, así que

$$\mathbb{P}(G \text{ induce } H) = \prod_{\substack{i,j \in I \\ i \neq j \\ ij \in H}} \mathbb{P}(ij \in G) \prod_{\substack{i,j \in I \\ i \neq j \\ ij \notin H}} \mathbb{P}(ij \notin G) = p^{e(H)} q^{\binom{k}{2} - e(H)},$$

como afirma la proposición. □

Corolario 1.3. (*i*) *Si $I \subseteq [\![n]\!]$ tiene k elementos, la probabilidad de que I sea independiente en $G \in \mathscr{G}(n,p)$ es*

$$\mathbb{P}(I \text{ es independiente en } G) = q^{\binom{k}{2}}$$

y la probabilidad de que I sea una clique en $G \in \mathscr{G}(n,p)$ es

$$\mathbb{P}(I \text{ es una clique en } G) = p^{\binom{k}{2}}.$$

(*ii*) *Si $G \in \mathscr{G}(n,p)$, sea $\alpha(G)$ el cardinal del subconjunto independiente más grande de G y sea $\omega(G)$ el cardinal de la clique más grande de G. Entonces*

$$\mathbb{P}(\alpha(G) \geq k) \leq \binom{n}{k} q^{\binom{k}{2}}$$

y

$$\mathbb{P}(\omega(G) \geq k) \leq \binom{n}{k} p^{\binom{k}{2}}.$$

Demostración. La parte (*i*) sigue inmediamente de la proposición anterior. En efecto, un subconbjunto $I \subseteq [\![n]\!]$ es independiente en un grafo G sii G induce el grafo discreto en I, y es una clique en G sii G induce el grafo completo en I.

Para ver (*ii*), observemos que un grafo G tiene $\alpha(G) \geq k$ si hay algún conjunto $I \subseteq [\![n]\!]$ que es independiente en G, de forma que

$$\{G \in \mathscr{G}(n,p) : \alpha(G) \geq k\} \subseteq \bigcup_{\substack{I \subseteq [\![n]\!] \\ |I| = k}} \{G \in \mathscr{G}(n,p) : I \text{ es independiente en } G\}$$

y entonces, como $\mathbb{P}$ es una función subaditiva, tenemos que

$$\mathbb{P}(\alpha(G) \geq k) \leq \sum_{\substack{I \subseteq [\![n]\!] \\ |I|=k}} \mathbb{P}(I \text{ es independiente en } G) = \binom{n}{k} q^{\binom{k}{2}}.$$

Un razonamiento similar prueba la cota para $\mathbb{P}(\omega(G) \geq k)$ dada en el enunciado de la proposición. □

Corolario 1.4. *Si $k \geq 3$ y $n \leq 2^{k/2}$, existen grafos de orden n que no contienen ni un conjunto independiente de tamaño k ni una clique de tamaño k.*

Demostración. Si $k = 3$, es $n \leq 2^{3/2} < 3$, así que la afirmación es inmediato. Supongamos entonces que $k \geq 4$ y calculemos probabilidades en $\mathscr{G}(n, \frac{1}{2})$.

Como $k \geq 4$, se tiene que $k! = k(k-1)\cdots 2 \cdot 1 > 2^k$ y entonces

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} < \frac{n^k}{2^k} \leq 2^{k^2/2-k},$$

de manera que

$$\mathbb{P}(\alpha(G) \geq k) \leq \binom{n}{k} \frac{1}{2^{\binom{k}{2}}} < 2^{k^2/2-k} \frac{1}{2^{\binom{k}{2}}} = \frac{1}{2^{k/2}} < \frac{1}{2}.$$

De la misma forma podemos mostrar que $\mathbb{P}(\omega(G) \geq k) < \frac{1}{2}$. La subaditividad de $\mathbb{P}$ implica entonces que la probabilidad de que $G \in \mathscr{G}(n, \frac{1}{2})$ contenga o un conjunto independiente de orden al menos k o una clique de orden al menos k es a lo sumo

$$\mathbb{P}(\alpha(G) \geq k) + \mathbb{P}(\omega(G) \geq k) < 1.$$

Esto nos dice que existen grafos de n vértices que no contienen ni un conjunto independiente de orden k ni una clique de orden k. □

§2. Propiedades de casi todos los grafos

Una *propiedad de grafos* es un conjunto $\mathscr{P}$ de grafos cerrado por isomorfismo y, en ese caso, un grafo G *tiene la propiedad* $\mathscr{P}$ si $G \in \mathscr{P}$. Decimos que *casi todo grafo tiene la propiedad* $\mathscr{P}$ si

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(G \in \mathscr{P} \cap \mathscr{G}(n,p)) = 1.$$

{prop:diam}

Proposición 2.1. *Casi todo grafo tiene diámetro 2.*

Demostración. Sea $n \geq 3$. Si $i, j \in [\![n]\!]$ son dos vértices distintos y $v \in [\![n]\!] \setminus \{i,j\}$, sabemos que $\mathbb{P}(iv, jv \in G) = p^2$ y, entonces,

$$\mathbb{P}\big(\nexists v \in [\![n]\!] \setminus \{i,j\} : iv, jv \in G\big) = \prod_{v \in [\![n]\!] \setminus \{i,j\}} \mathbb{P}\big(\neg(iv, iv \in G)\big) = (1-p^2)^{n-2}.$$

Como

$$\big\{G \in \mathscr{G}(n,p) : \exists i,j \in [\![n]\!] : \nexists v \in [\![n]\!] \setminus \{i,j\} : iv, iv \in G\big\} \\ \leq \bigcup_{\substack{i,j \in [\![n]\!] \\ i \neq j}} \big\{G \in \mathscr{G}(n,p) : \nexists v \in [\![n]\!] \setminus \{i,j\} : iv, jv \in G\big\},$$

tenemos que

$$\mathbb{P}\big(\exists i,j \in [\![n]\!] : \nexists v \in [\![n]\!] \setminus \{i,j\} : iv, iv \in G\big) \\ \leq \sum_{\substack{i,j \in [\![n]\!] \\ i \neq j}} \mathbb{P}\big(\nexists v \in [\![n]\!] \setminus \{i,j\} : iv, jv \in G\big) \leq \binom{n}{2}(1-p^2)^{n-2} \leq n^2(1-p^2)^{n-2}.$$

La proposición es consecuencia de que $\lim_{n\to\infty} n^2(1-p^2)^{n-2} = 0$. □

Corolario 2.2. *Casi todo grafo es conexo.*

Demostración. Claramente

$$\{G \in \mathscr{G}(n,p) : G \text{ es conexo}\} \supseteq \{G \in \mathscr{G}(n,p) : G \text{ tiene diámetro } 2\},$$

así que $\mathbb{P}(G \text{ es conexo}) \geq \mathbb{P}(G \text{ tiene diámetro } 2)$. El corolario, entonces, siguen inmediatamente de la proposición. □

Generalizando en argumento que usamos para probar la Proposición 2.1 obtenemos el siguiente resultado más fuerte:

Proposición 2.3. *Sean i, $j \geq 0$. Casi todo grafo tiene la propiedad $\mathscr{P}_{i,j}$ siguiente:*

> *cada vez que U y V son conjuntos distintos de vértices de a lo sumo i y j elementos, respectivamente, existe un vértice w conectado a todos los vértices de U y a ninguno de los vértices de V.*

Demostración. Supongamos que $n > i + j$ y consideremos el conjunto

$$T = \big\{(U,V) : U, V \subseteq [\![n]\!], |U| = i, |V| = j, U \cap V = \varnothing\big\},$$

que tiene cardinal

$$\binom{n}{i}\binom{n-i}{j} = \frac{n(n-1)\cdots(n-i-j+1)}{i!j!} \leq n^{i+j}.$$

Para cada par $(U,V) \in T$ y cada vértice $w \in [\![n]\!]$, escribamos además

$$\pi(w,U,V) = (\forall u \in U : wu \in G) \wedge (\forall v \in V : wv \notin G).$$

Sea $(U,V) \in T$. Si $w \in [\![n]\!] \setminus U \cup V$, entonces $\mathbb{P}(\pi(w,U,V)) = p^{|U|}q^{|V|} \geq p^i q^j$, así que

$$\mathbb{P}\big(\nexists w \in [\![n]\!] \setminus U \cup V : \pi(w,U,V)\big) = \prod_{w \in [\![n]\!] \setminus U \cup V} \mathbb{P}(\neg\pi(w,U,V)) \leq (1-p^i q^j)^{n-i-j}.$$

En consecuencia, la subaditividad de $\mathbb{P}$ implica que

$$\mathbb{P}(\neg\mathscr{P}_{i,j}) = \mathbb{P}\big(\exists(U,V) \in T : \nexists w \in [\![n]\!] \setminus U \cup V : \pi(w,U,V)\big)$$
$$\sum_{(U,V)\in T} \mathbb{P}\big(\nexists w \in [\![n]\!] \setminus U \cup V : \pi(w,U,V)\big). \leq n^{i+j}\big(1-p^i(1-p)^j\big)^{n-i-j}$$

Finalmente, como $0 < 1-p^i(1-p)^j < 1$, es $\lim_{n\to\infty} n^{i+j}\big(1-p^i(1-p)^j\big)^{n-i-j} = 0$, así que casi ningún grafo tiene la propiedad $\neg\mathscr{P}_{i,j}$. □

Corolario 2.4. *Si $k \geq 1$, entonces casi todo grafo tiene grado mínimo mayor que k.*

Demostración. Casi todo grafo tiene la propiedad $\mathscr{P}_{k,0}$, así que casi todo grafo tiene un vértice de grado $\geq k$. □

Recordemos que un grafo es k-conexo si cada vez que le sacamos menos que k vértices, el grafo resultante es conexo; esta noción generaliza a la de conexión y, de hecho, un grafo es conexo exactamente cuando es 1-conexo.

Corolario 2.5. *Si $k \geq 1$, entonces casi todo grafo es k-conexo.*

Demostración. Sabemos que casi todo grafo tiene la propiedad $\mathscr{P}_{2,k-1}$. Ahora bien, sea G un grafo que tiene esa propiedad sea W un conjunto de menos k de sus vértices. Si i, j son dos vértices de G que no están en W, de acuerdo a $\mathscr{P}_{2,k-1}$ existe un vértice u que está conectado a i y a j y que no pertenece a W, así que i y j están en la misma componente conexa del grafo inducido por G en el complemento de W. □

§3. El grafo aleatorio

{prop:er}

Proposición 3.1. (P. Erdős, A. Rényi [ER63]) *Sea $\mathscr{P}_{\infty,\infty}$ el conjunto de todos los grafos de $\mathscr{G}(\aleph_0, p)$ que tienen la propiedad $\mathscr{P}_{i,j}$ cualquiera sean i, $j \geq 0$. Entonces*

$$\mathbb{P}(G \in \mathscr{P}_{\infty,\infty}) = 1.$$

Demostración. Sean i, $j \geq 0$ y sea $\neg\mathscr{P}_{i,j}$ el conjunto de los grafos de $\mathscr{G}(\aleph_0, p)$ que no satisfacen la propiedad $\mathscr{P}_{i,j}$. Sea

$$T = \{(U,V) : U, V \subseteq \mathbb{N}, |U| \leq i, |V| \leq j, U \cap V = \varnothing\}.$$

Si $(U,V) \in T$ y $w \in \mathbb{N} \setminus U \cup V$, entonces

$$r = \mathbb{P}(\neg\pi(w,U,V)) = 1 - p^{|U|}q^{|V|} < 1,$$

así que para cada $\ell \geq \max(U \cup V)$ es

$$\mathbb{P}(\forall w \in \mathbb{N} \setminus U \cup V : \neg\pi(w,U,V)) \leq \mathbb{P}(\forall w \in [\![\ell]\!] \setminus U \cup V : \neg\pi(w,U,V)) \leq r^{\ell-i-j}.$$

Esto implica, por supuesto, que $\mathbb{P}(\forall w \in \mathbb{N} \setminus U \cup V : \neg\pi(w, U, V)) = 0$ y, en consecuencia, como T es numerable y $\mathbb{P}$ subaditiva,

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\exists (U, V) \in T : \forall w \in \mathbb{N} \setminus U \cup V : \neg\pi(w, U, V)) \\
&\qquad\qquad\qquad \leq \sum_{(U,V) \in T} \mathbb{P}(\forall w \in \mathbb{N} \setminus U \cup V : \neg\pi(w, U, V)) = 0.
\end{aligned}
$$

Negando, vemos que

$$
\mathbb{P}(\forall (U, V) \in T : \exists w \in \mathbb{N} \setminus U \cup V : \pi(w, U, V)) = 1,
$$

que es precisamente lo que queríamos. □

Un corolario inmediato de este teorema es que existen grafos con $\mathbb{N}$ como conjunto de vértices que tienen la propiedad $\mathscr{P}_{\infty,\infty}$. En efecto, el teorema nos dice que conjunto de los grafos que tienen esa propiedad tiene medida 1 en $\mathscr{G}(\aleph_0, p)$, así que no puede ser vacío.

{prop:all}

Proposición 3.2. *Dos grafos numerables que tienen la propiedad $\mathscr{P}_{\infty,\infty}$ son isomorfos.*

Demostración. Sean G y H dos grafos con numerables vertices y que poseen la propiedad $\mathscr{P}_{\infty,\infty}$. Sean $(x_i : i \in \mathbb{N})$ y $(y_i : i \in \mathbb{N})$ enumeraciones de los conjuntos A y B de vértices de G y de H, respectivamente. Para cada $n \geq 1$ vamos a definir conjuntos de n vértices A_n y B_n de G y de H, respectivamente, y una biyección $\phi_n : A_n \to B_n$ de manera tal que

- para cada $n \geq 1$ es $A_n \subset A_{n+1}$ y $B_n \subset B_{n+1}$, y $A = \bigcup_{n \geq 1} A_n$ y $B = \bigcup_{n \geq 1} B_n$;
- para cada $n \geq 1$, la función $\phi_n : A_n \to B_n$ induce un isomorfismo entre el grafo inducido por G en A_n y el grafo inducido por H en B_n;
- para cada $n \geq 1$, es $\phi_{n+1}|_{A_n} = \phi_n$.

Para hacerlo, procedemos inductivamente:

- Ponemos $A_1 = \{x_1\}$, $B_1 = \{y_1\}$ y llamamos $\phi_1 : A_1 \to B_1$ a la única biyección entre A_1 y B_1.
- Sea $n \geq 1$ par. Sea $\ell = \min\{i \in \mathbb{N} : x_i \notin A_n\}$. Definamos $A'_n = \{x \in A_n : xx_\ell \in G\}$ y $A''_n = A_n \setminus A'_n$. Como el grafo H tiene la propiedad $\mathscr{P}_{|A'_n|,|A''_n|}$, existe un vértice $y \in H \setminus \phi_n(A_n)$ tal que $by \in G$ para cada $b \in \phi_n(A'_n)$ y $by \notin G$ para cada $b \in \phi_n(A''_n)$. Ponemos $A_{n+1} = A_n \cup \{x_\ell\}$, $B_{n+1} = B_n \cup \{b\}$, y consideramos la única función $\phi_{n+1} : A_{n+1} \to B_{n+1}$ que extiende a ϕ_n y tal que $\phi_{n+1}(x_\ell) = b$.
- Sea $n \geq 1$ impar. Sea $\ell = \min\{i \in \mathbb{N} : y_i \notin B_n\}$. Definamos $B'_n = \{y \in B_n : yy_\ell \in H\}$ y $B''_n = B_n \setminus B'_n$. Como el grafo G tiene la propiedad $\mathscr{P}_{|B'_n|,|B''_n|}$, existe un vértice $x \in G \setminus \phi_n^{-1}(B_n)$ tal que $ax \in G$ para cada $a \in \phi_n^{-1}(B'_n)$ y $ax \notin G$ para cada $a \in \phi_n^{-1}(B''_n)$. Ponemos $B_{n+1} = B_n \cup \{y_\ell\}$, $A_{n+1} = A_n \cup \{a\}$, y consideramos la única función $\phi_{n+1} : A_{n+1} \to B_{n+1}$ que extiende a ϕ_n y tal que $\phi_{n+1}(a) = y_\ell$.

Es inmediato que existe una única biyección $\phi : A \to B$ tal que $\phi|_{A_n} = \phi_n$, y que esta función es un isomorfismo de grafos de G a H. □

Corolario 3.3. *Existe un grafo* $\mathscr{R}$ *con numerablemente infinitos vértices tal que en* $\mathscr{G}(\aleph_0, p)$ *se tiene*

$$\mathbb{P}(G \text{ es isomorfo a } \mathscr{R}) = 1.$$

Demostración. La Proposición 3.1 nos dice que existen grafos con la propiedad $\mathscr{P}_{\infty,\infty}$, y la Proposición 3.2 nos dice que todos ellos son isomorfos. Si $\mathscr{R}$ es uno de ellos, entonces la conclusión del enunciado es inmediata. □

§4. Tres construcciones explícitas

Proposición 4.1. *Sea* $(p_i : i \geq 1)$ *la enumeración creciente de los números primos y sea* G *el grafo con conjunto de vértices* $\mathbb{N}$ *y en el que*

dos vértices i, $j \in \mathbb{N}$ con $i < j$ están conectados si y solamente si $p_i \mid j$.

Entonces G *es isomorfo al grafo* $\mathscr{R}$*.*

Demostración. Sean U, $V \subseteq \mathbb{N}$ dos conjuntos finitos y disjuntos. Sea

$$w = (1 + \prod_{v \in V} p_v) \prod_{u \in U} p_u.$$

Es claro que $u < w$ para cada $u \in U$ y que $v < w$ para cada $v \in V$, que $p_u \mid w$ si $u \in U$, y que $p_v \nmid w$ si $v \in V$, así que $\pi(w, U, V)$ vale. □

Proposición 4.2. *Sea* G *el grafo cuyos vértices son los números primeros congruentes con* 1 *módulo* 4*, y en el que*

dos vértices p*,* q *están conectados si* p *es un cuadrado módulo* q

Entonces G *es isomorfo al grafo* $\mathscr{R}$*.*

Es consecuencia de la Ley de Reciprocidad cuadrática que la relación de adjayencia en este grafo G es simétrica.

Demostración. Basta probar que G tiene la propiedad $\mathscr{P}_{\infty,\infty}$.

Sean U y V dos conjuntos disjuntos y finitos de primos congruentes a 1 módulo 4. Para cada $v \in V$ sea $x_u \in \mathbb{Z}$ un entero que *no* es congruente a un cuadrado módulo v. El teorema chino del resto nos dice que el conjunto de enteros $m \in \mathbb{Z}$ que satisface las congruencias

$$\begin{aligned} m &\equiv 1 \mod u, && \forall u \in U, \\ m &\equiv x_v \mod v, && \forall v \in V, \\ m &\equiv 1 \mod 4. \end{aligned}$$

es una progresión aritmética, y el teorema de Dirichlet asegura que en esa progresión arítmética hay un número primo p. Claramente p es congruente a 1 módulo 4, así que es un vértice de G. Si $u \in U$, entonces $p \equiv 1 \mod u$ y p es un cuadrádo módulo u: esto nos dice que u y p son adyacentes. Por otro lado, si $v \in V$, entonces $p \equiv x_v \mod v$ y como x_v no es un cuadrado módulo v, tampoco lo es p: p y v no son, en consecuencia, adyacentes en G. $\square$

Proposición 4.3. *Sea $\mathscr{F}_1 = \{\varnothing\}$ y, para cada $n \geq 1$, sea $\mathscr{F}_{n+1} = \mathscr{F}_n \cup \mathscr{P}(\mathscr{F}_n)$. Sea $\mathscr{F} = \bigcup_{n\geq 1} \mathscr{F}_n$ y consideremos el grafo G que tiene a $\mathscr{F}$ como conjunto de vértices y tal que si x, $y \in \mathscr{F}$,*

$$x \text{ e } y \text{ son adyacentes en } G \iff x \in y \text{ o } y \in x.$$

Entonces G es isomorfo a $\mathscr{R}$.

Demostración. Para todo $n \geq 1$ el conjunto $\mathscr{F}_n$ es finito, así que $\mathscr{F}$ es numerable.

Sean U, $V \subset \mathscr{F}$ dos conjuntos disjuntos y finitos de vértices de G. Como la familia de conjuntos $(\mathscr{F}_n)_{n\geq 1}$ es creciente y $U \cup V$ es finito, existe $n \geq 1$ tal que U, $V \subseteq \mathscr{F}_n$. Se sigue de esto que $U \subset \mathscr{F}_{n+1}$ y $V \in \mathscr{F}_{n+1}$ y, entonces, el conjunto $w = U \cup \{V\}$ es un elemento de $\mathscr{F}_{n+2}$. En particular, w es un vértice de G. Mostremos que $\pi(w, U, V)$ vale:

- Si $u \in U$, entonces $u \in U \subseteq w$, así que $u \in w$ y los vértices u y w de G son adyacentes.
- Sea $v \in V$. Si fuese $v \in w$, tendríamos que $v \in U \cup \{V\}$ y, como U y V son disjuntos, que, de hecho, $v = V$: esto es absurdo. Por otro lado, si fuese $w \in v$, tendríamos que $V \in w \in v \in V$, lo que otra vez es absurdo.

Vemos así que G tiene la propiedad $\mathscr{P}_{\infty,\infty}$. $\square$

§5. Algunas propiedades

El grafo $\mathscr{R}$ es *universal*, en el sentido de que todo grafo numerable es isomorfo a uno de sus subgrafos inducidos. Richard Rado contruyó originalmente este grafo en [Rad64] interesado por esta propiedad.

Proposición 5.1. *Si H es un grafo finito o numerable, existe un subconjunto I de vértices de $\mathscr{R}$ tal que el grafo inducido por $\mathscr{R}$ en I es isomorfo a H.*

Demostración. Nos ocupamos del caso en que H es numerable—el caso finito es similar. Sean $(a_n)_{n\geq 1}$ una enumeración del conjunto A de los vértices de H, y para cada $n \geq 1$ sea $A_n = \{a_i : 1 \leq i \leq n\}$; sea B, por otro lado, el conjunto de vértices de $\mathscr{R}$. Construimos inductivamente para cada $n \geq 1$ una función inyectiva $\phi_n : A_n \to B$ de manera tal que para todo $n \geq 1$ es $\phi_{n+1}|_{A_n} = \phi_n$ y ϕ_n es un isomorfismo de $H[A_n]$ a $\mathscr{R}[\phi_n(A_n)]$.

- Elegimos $\phi_1 : A_1 \to B$ arbitrariamente.
- Supongamos que $n \geq 1$ y que ya construimos una inyección $\phi_n : A_n \to B$ que da un isomorfismo entre los grafos inducidos $H[A_n]$ y $\mathscr{R}[\phi_n(A_n)]$. Los conjuntos

$U = \{\phi_n(a) : a \in A_n, aa_{n+1} \in H\}$ y $V = \{\phi_n(a) : a \in A_n, aa_{n+1} \notin H\}$ son claramente finitos y disjuntos, así que como $\mathscr{R}$ tiene la propiedad $\mathscr{P}_{\infty,\infty}$, existe $b \in B \setminus U \cup V$ tal que $ub \in \mathscr{R}$ para todo $u \in U$ y $vb \notin \mathscr{R}$ para todo $v \in V$. Definimos entonces $\phi_{n+1} : A_{n+1} \to A$ de manera que $\phi(a_{n+1}) = b$ y $\phi_{n+1}(a) = \phi_n(a)$ para cada $a \in A_n$. Es evidente que $\phi_{n+1}|_{A_n} = \phi_n$; además, como esta restricción es inyectiva y $\phi_{n+1}(a_{n+1}) \notin U \cup B = \phi_n(A_n)$, la función ϕ_{n+1} es inyectiva. Finalmente, es claro —en vista de la forma en que fue construida— que ϕ_{n+1} induce un isomorfismo entre $H[A_n]$ y $\mathscr{R}[\phi_{n+1}(A_n)]$.

Es claro que existe una única función $\phi : A \to B$ tal que $\phi|_{A_n} = \phi_n$, y que se trata de un isomorfismo entre H y $\mathscr{R}[\phi(A)]$. □

Proposición 5.2. (*i*) *Si $X \subseteq \mathbb{N}$ es un conjunto finito de vértices de $\mathscr{R}$, entonces el grafo inducido por $\mathscr{R}$ en $\mathbb{N} \setminus X$ is isomorfo a $\mathscr{R}$.*

(*ii*) *Sea $\mathscr{R}'$ un grafo que se obtiene a partir de $\mathscr{R}$ agregando o eliminando un número finito de arcos. Entonces $\mathscr{R}'$ es isomorfo a $\mathscr{R}$.*

(*iii*) *El grafo $\overline{\mathscr{R}}$ complementario a $\mathscr{R}$ es isomorfo a $\mathscr{R}$.*

Proposición 5.3. *Un grafo numerable H puede obtenerse de $\mathscr{R}$ eliminando un número finito o infinito de arcos sii para cada conjunto finito V de vértices de H existe un vértice w en H tal que para todo $v \in V$ se tiene $vw \notin H$.*

Corolario 5.4. *En $\mathscr{R}$ hay caminos hamiltonianos.*

Proposición 5.5. *El grafo $\mathscr{R}$ contiene un grafo completo maximal.*

p:homogeneidad}

Proposición 5.6. *El grafo $\mathscr{R}$ es* homogéneo*: si I y J son dos subconjuntos de vértices de $\mathscr{R}$ tales que existe una biyección $\phi : I \to J$ que induce un isoporfismo entre los grafos inducidos $\mathscr{R}[I]$ y $\mathscr{R}[J]$, entonces existe un automorfismo $\psi : \mathscr{R} \to \mathscr{R}$ que extiende a ϕ.*

Corolario 5.7. *La acción del grupo* $\operatorname{Aut}(\mathscr{R})$ *sobre $\mathscr{R}$ es* oligomorfa*: para cada $n \geq 1$, la acción natural de* $\operatorname{Aut}(\mathscr{R})$ *sobre $\mathscr{R}^n$ tiene un número finito de órbitas.*

Demostración. Fijemos $n \geq 1$ y mostremos que $\operatorname{Aut}(\mathscr{R})$ tiene finitas órbitas en $\mathscr{R}^n$.

Si $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathscr{R}^n$, construimos por un lado un grafo $\Gamma(x)$ con conjunto de vértices igual a $[\![n]\!]$ y tal que si i, $j \in [\![n]\!]$, entonces

$$ij \in \Gamma(x) \iff x_i x_j \in \mathscr{R},$$

y, por otro, consideramos la relación de equivalencia $\rho(x) = \{(i,j) \in [\![n]\!] \times [\![n]\!] : x_i = x_j\}$ sobre el conjunto de vértices de $\Gamma(x)$.

Sean ahora $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathscr{R}^n$ tales que $\Gamma(x) = \Gamma(y)$ y $\rho(x) = \rho(y)$. Sean $I = \{x_i : 1 \leq i \leq n\}$ y $J = \{y_i : 1 \leq i \leq n\}$. Hay una función $\phi : I \to J$ tal que $\phi(x_i) = y_i$ para cada $i \in [\![n]\!]$: esto está bien definido precisamente porque $\rho(x) = \rho(y)$. Más aún, ϕ es un isomorfismo entre los grafos inducidos $\mathscr{R}[I]$ y $\mathscr{R}[J]$ porque $\Gamma(x) = \Gamma(y)$. De acuerdo a la Proposición 5.6, existe un automorfismo $\psi \in \operatorname{Aut}(\mathscr{R})$ que extiende a ϕ y, en particular, $\psi(x) = y$. Vemos así que x e y están en la misma $\operatorname{Aut}(\mathscr{R})$-órbita en $\mathscr{R}^n$.

Esto muestra que el número de órbitas de $\mathrm{Aut}(\mathscr{R})$ en $\mathscr{R}^n$ no es mayor que el número de pares (Γ, ρ) formados por un grafo Γ sobre $[\![n]\!]$ y una relación de equivalencia ρ en $[\![n]\!]$. Por supuesto, esto prueba que el conjunto de órbitas $\mathscr{R}^n / \mathrm{Aut}(\mathscr{R})$ es finito. □

Proposición 5.8. *Si dotamos al conjunto X de vértices de $\mathscr{R}$ de la topología que tiene como subbase de abiertos al conjunto de conjuntos de la forma*

$$U_w = \{v \in X : vw \in \mathscr{R}\}$$

con $w \in X$, entonces hay un homeomorfismo $X \cong \mathbb{Q}$.

Demostración. Necesitamos la caracterización dada por Sierpiński [Sie20] de $\mathbb{Q}$ como el único espacio topológico numerable, totalmente desconexo, T_1 y sin puntos aislados. □

Proposición 5.9. *Sean A y B conjuntos finitos de vértices de $\mathscr{R}$ tales que $A \supseteq B$, y sea*

$$I = \{v \in V : \{a \in A : av \in \mathscr{R}\} = B\}.$$

El grafo $\mathscr{R}[I]$ inducido por $\mathscr{R}$ en I es isomorfo a $\mathscr{R}$.

Corolario 5.10. *Si $\{I_1, \ldots, I_n\}$ una partición finita del conjunto de vértices de $\mathscr{R}$, entonces existe $i \in [\![n]\!]$ tal que el grafo $\mathscr{R}[I_i]$ inducido por $\mathscr{R}$ en I_i es isomorfo a $\mathscr{R}$.*

Referencias

[Bol01] B. Bollobás, *Random graphs*, 2nd ed., Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 73, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

[Bol98] B. Bollobás, *Modern graph theory*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 184, Springer-Verlag, New York, 1998.

[Cam90] P. J. Cameron, *Oligomorphic permutation groups*, London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 152, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[Die10] R. Diestel, *Graph theory*, 4th ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 173, Springer, Heidelberg, 2010.

[ER63] P. Erdős and A. Rényi, *Asymmetric graphs*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar **14** (1963), 295–315.

[GGL95] R. L. Graham, M. Grötschel, and L. Lovász (eds.), *Handbook of combinatorics. Vol. 1, 2*, Elsevier Science B.V., Amsterdam, 1995.

[Rad64] R. Rado, *Universal graphs and universal functions*, Acta Arith. **9** (1964), 331–340.

[Sie20] W. Sierpiński, *Sur une propriété topologique des ensembles dénombrables denses en soi*, Fundamenta Mathematicae **1** (1920), 11-16.