Espacios vectoriales con producto interno

Mariano Suárez-Alvarez

24 de junio, 2011

§1. Espacios con producto interno

Sea $\mathbb{K}$ o bien $\mathbb{R}$ o bien $\mathbb{C}$.

Definición 1.1. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Un *producto interno* sobre V es una aplicación $\langle -,-\rangle : V \times V \to \mathbb{K}$ tal que para cada u, u', $v \in V$ y cada $\lambda \in \mathbb{K}$

- $\langle u+u', v\rangle = \langle u, v\rangle + \langle u', v\rangle$,
- $\langle \lambda u, v\rangle = \lambda\langle u, v\rangle$,
- $\langle u, v\rangle = \overline{\langle v, u\rangle}$,
- $\langle v, v\rangle > 0$ si $v \neq 0$.

Un *espacio con producto interno* es un par $(V, \langle -,-\rangle)$ en el que V es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y $\langle -,-\rangle$ es un producto interno.

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, esto implica que $\langle -,-\rangle$ es lineal en las dos variables. Si en cambio $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, esta aplicación es lineal en su primera variable y *semilineal* en la segunda: esto último significa que para cada u, v, $v' \in V$ y cada $\lambda \in \mathbb{K}$ es $\langle u, v+v'\rangle = \langle u, v\rangle + \langle u, v'\rangle$ y $\langle u, \lambda v\rangle = \overline{\lambda}\langle u, v\rangle$. De esto sigue, en particular, que $\langle 0, 0\rangle = 0$ así que, de hecho, vale que

$$\langle v, v\rangle = 0 \iff v = 0.$$

Finalmente, notemos que si $v \in V$, entonces $\langle v, v\rangle = \overline{\langle v, v\rangle}$, de manera que $\langle v, v\rangle \in \mathbb{R}$. Esto significa que la última condición de la definición tiene sentido.

Ejemplo 1.2. Si $V = \mathbb{K}^n$, definimos una función $\langle -,-\rangle : V \times V \to \mathbb{K}$ poniendo, para cada

Compilado: 14 de mayo de 2015

$u = (u_i)_{i=1}^n$, $v = (v_i)_{i=1}^n \in V$,

$$\langle u, v\rangle = \sum_{i=1}^n u_i \overline{v}_i.$$

Verifiquemos que se trata de un producto interno en V:

- Si $u = (u_i)_{i=1}^n$, $u' = (u'_i)_{i=1}^n$, $v = (v_i)_{i=1}^n \in V$, entonces

$$\langle u + u', v\rangle = \sum_{i=1}^n (u_i + u'_i)\overline{v}_i = \sum_{i=1}^n u_i\overline{v}_i + \sum_{i=1}^n u'_i\overline{v}_i = \langle u, v\rangle + \langle u', v\rangle.$$

- Si $u = (u_i)_{i=1}^n$, $v = (v_i)_{i=1}^n \in V$ y $\lambda \in \mathbb{K}$, entonces

$$\langle \lambda u, v\rangle = \sum_{i=1}^n \lambda u_i\overline{v}_i = \lambda \sum_{i=1}^n u_i\overline{v}_i = \lambda\langle u, v\rangle.$$

- Si $u = (u_i)_{i=1}^n$, $v = (v_i)_{i=1}^n \in V$, es

$$\overline{\langle v, u\rangle} = \Big(\sum_{i=1}^n v_i\overline{u}_i\Big)^- = \sum_{i=1}^n \overline{v_i\overline{u}_i} = \sum_{i=1}^n u_i\overline{v}_i = \langle u, v\rangle$$

- Finalmente, si $u = (u_i)_{i=1}^n$, es

$$\langle u, u\rangle = \sum_{i=1}^n u_i\overline{u}_i = \sum_{i=1}^n |u_i|^2,$$

  una suma de términos no negativos. Cuando $u \neq 0$ existe $i_0 \in \{1, \dots, n\}$ tal que $u_{i_0} \neq 0$ y entonces $\langle u, u\rangle \geq |u_{i_0}|^2 > 0$.

Llamamos a este producto interno sobre $\mathbb{K}^n$ el *producto interno estándard* y, salvo indicación en contrario, cada vez que consideremos a $\mathbb{K}^n$ como un espacio vectorial con producto interno será con respecto a a este producto.

{ej:ck01} **Ejemplo 1.3**. Si $V = C_{\mathbb{K}}[0, 1]$ es el espacio de todas las funciones continuas $[0, 1] \to \mathbb{K}$, definimos $\langle -, -\rangle : V \times V \to \mathbb{K}$ poniendo, para cada f, $g \in V$,

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}\mathrm{d}t.$$

Notemos que esto está bien definido: la integral tiene sentido y existe porque las funciones son continuas. Una verificación completamente análoga a la del ejemplo anterior prueba que $\langle -, -\rangle$ es un producto interno sobre $C_{\mathbb{K}}[0, 1]$.

Ejemplo 1.4. Si V es un producto con espacio interno $\langle -, -\rangle : V \times V \to \mathbb{K}$ y $W \subseteq V$ es un subespacio, entonces la restricción $\langle -, -\rangle|_{W\times W} : W \times W \to \mathbb{K}$ es un producto interno sobre W.

{prop:zero} **Proposición 1.5.** *Sea V un espacio vectorial con producto interno, y sean u, $u' \in V$. Entonces*

(*i*) $\langle u, v\rangle = 0$ *para todo* $v \in V$ *sii* $u = 0$, *y*
(*ii*) $\langle u, v\rangle = \langle u', v\rangle$ *para todo* $v \in V$ *sii* $u = u'$.

Demostración. (*i*) Para ver la necesidad de la condición, notemos que si u la satisface se tiene en particular que $\langle u, u\rangle = 0$, así que $u = 0$. La suficiencia es inmediata.

(*ii*) Basta aplicar el enunciado anterior a la diferencia $u - u'$. □

§2. Normas y distancias

{def:norma}

Definición 2.1. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Una *norma* sobre V es una funcion $\|-\| : V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ tal que para cada u, $v \in V$ y cada $\lambda \in \mathbb{K}$ es

- $\|v\| = 0$ sii $v = 0$;
- $\|\lambda v\| = |\lambda|\|v\|$;
- $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

Un *espacio normado* es un par $(V, \|-\|)$ el que que V es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y $\|-\|$ es una norma sobre V.

{prop:norm}

Proposición 2.2. *Sea V un espacio vectorial con producto interno y consideremos la función*

$$\|-\| : v \in V \mapsto \sqrt{\langle v, v\rangle} \in \mathbb{R}.$$

Entonces $(V, \|-\|)$ es un espacio normado y para cada u, $v \in V$ vale la desigualdad de Cauchy-Schwartz,

{eq:cs}

$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\|\|v\|. \tag{1}$$

Más aún, vale aquí la igualdad sii el conjunto $\{u, v\}$ es linealmente dependiente.

De ahora en adelante consideraremos a todo espacio vectorial con producto interno dotado de la norma que nos provee esta proposición.

Demostración. Tenemos que verificar las tres condiciones de la Definición 2.1. Las dos primeras son inmediatas. Para probar la tercera, mostremos antes la desigualdad (1).

Si $v = 0$, la desigualdad es inmediata, así que podemos suponer que no es ese el caso. Para cada $\lambda \in \mathbb{K}$ es

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|u - \lambda v\|^2 \\ &= \langle u - \lambda v, u - \lambda v\rangle \\ &= \langle u, u\rangle - \lambda\langle v, u\rangle - \overline{\lambda}\big(\langle u, v\rangle - \lambda\langle v, v\rangle\big). \end{aligned}$$

Si tomamos $\lambda = \langle u, v\rangle / \langle v, v\rangle$, la expresión entre paréntesis se anula, así que tenemos que

$$0 \leq \langle u, u\rangle - \frac{\langle u, v\rangle\langle v, u\rangle}{\langle v, v\rangle} = \|u\|^2 - \frac{|\langle u, v\rangle|^2}{\|v^2\|},$$

que es equivalente a (1). Más aún, si vale la igualdad, tenemos que $\|u - \lambda v\|^2 = 0$, así que $u = \lambda v$.

Probemos ahora, usando la desigualdad de Cauchy-Schwartz, que la tercera condición de la Definición 2.1 también se satisface. Si $u, v \in V$, es

$$\begin{aligned}
\|u+v\|^2 &= \langle u+v, u+v\rangle \\
&= \langle u,u\rangle + \langle u,v\rangle + \langle v,u\rangle + \langle v,v\rangle \\
&= \|u\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle u,v\rangle + \|v,v\| \\
&\leq \|u\|^2 + 2|\langle u,v\rangle| + \|v,v\| \\
&\leq \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v,v\| \\
&= (\|u\| + \|v\|)^2.
\end{aligned}$$
□

Corolario 2.3. *Sea V un espacio vectorial con producto interno. Entonces*

(*i*) (Ley del paralelogramo) *si $u, v \in V$, vale que*

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2.$$

(*ii*) *Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, para cada $u, v \in V$ se tiene que*

$$\langle u,v\rangle = \tfrac{1}{4}\|u+v\|^2 - \tfrac{1}{4}\|u-v\|^2.$$

Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, en cambio, es

$$\langle u,v\rangle = \tfrac{1}{4}\|u+v\|^2 - \tfrac{1}{4}\|u-v\|^2 + \tfrac{i}{4}\|u+iv\|^2 - \tfrac{i}{4}\|u-iv\|^2.$$

Demostración. Las tres igualdades del enunciado son consecuencia de un cálculo directo, usando la definición de $\|-\|$. □

La última afirmación de este corolario nos dice que en un espacio con producto interno, el producto interno queda determinado por la norma correspondiente. La segunda, por otro lado, nos dice que la Ley del Paralelogramo es una condición necesaria para que la norma de un espacio normado provenga de un producto interno — de hecho, es posible mostrar que también es suficiente.

Proposición 2.4. *Sea V un espacio vectorial con producto interno y sea $\|-\| : V \to \mathbb{R}$ la norma inducida sobre V. Consideremos la función*

$$d : (v,w) \in V \times V \mapsto \|v-w\| \in \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

Entonces para todo $u, v, w \in V$ se tiene que

(*i*) $d(v,w) = d(w,v)$,

(*ii*) $d(v,w) = 0 \iff v = w$, *y*

(*iii*) $d(u,w) \leq d(u,v) + d(v,w)$.

Demostración. Las tres afirmaciones son consecuencias inmediatas de la definición de la función d y de las propiedades de la norma $\|-\|$. □

§3. Ortogonalidad

Definición 3.1. Sea V un espacio con producto interno. Si u, $v \in V$, decimos que u *y* v *son ortogonales*, y escribimos $u \perp v$, si $\langle u, v\rangle = 0$.

Observación 3.2. (*i*) Es inmediato que $\perp$ es una relación simétrica.
(*ii*) Todo vector de V es ortogonal con 0. Recírpocamente, si $u \in V$ es tal que $u \perp v$ para todo $v \in V$, entonces $u = 0$.

Proposición 3.3. *Sea* $(V, \langle -, -\rangle)$ *es un espacio con producto interno y sean* u, $v \in V$*. Se tiene que*

(*i*) $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle u, v\rangle$, *y*
(*ii*) *si* $u \perp v$, *entonces* $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$.

Demostración. La segunda afirmación es consecuencia inmediata de la primera, así que basta probar esta última, que a su vez sigue de un cálculo directo: si u, $v \in V$, la definición de la norma implica que

$$\begin{aligned}\|u + v\|^2 &= \langle u + v, u + v\rangle \\ &= \langle u, u\rangle + \langle u, v\rangle + \langle v, u\rangle + \langle v, v\rangle \\ &= \|u\|^2 + \|v\|^2 + \langle u, v\rangle + \overline{\langle u, v\rangle} \\ &= \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle u, v\rangle. \end{aligned}$$ □

Definición 3.4. Si $(V, \langle -, -\rangle)$ es un espacio con producto interno y $A \subseteq V$, entonces

(*i*) A es *ortogonal* si para cada par u, $v \in A$ de elementos distintos se tiene que $u \perp v$, y
(*ii*) A es *ortonormal* si es ortogonal y además $\|u\| = 1$ par acada $u \in A$.

Proposición 3.5. *Sea* $(V, \langle -, -\rangle)$ *un espacio con producto interno y sea* $A \subseteq V$ *un subconjunto.*

(*i*) *Si* A *es ortogonal y* $0 \notin A$, *entonces* A *es linealmente independiente.*
(*ii*) *Si* A *es ortonormal y si* $u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i$, *con* $a_1, \ldots, a_n \in A$ *distintos y* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in k$, *entonces* $\lambda_j = \langle u, a_j\rangle$ *para todo* $j \in \{1, \ldots, n\}$.
(*iii*) *Si* A *es ortonormal y entonces para cada* $u \in \langle A\rangle$, *entonces el conjunto*

$$A_u = \{a \in A : \langle u, a\rangle \neq 0\}$$

es finito, y $u = \sum_{a\in A_u} \langle u, a\rangle a$.

Demostración. (*i*) Sean $n \geq 1$, $a_1, \ldots, a_n \in A$ distintos y $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tales que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i = 0$. Si $j \in \{1, \ldots, n\}$, entonces

$$0 = \langle 0, a_j\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i, a_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle a_i, a_j\rangle.$$

Como A es ortonormal, en esta última suma el único término que no puede ser no nulo es el que tiene $i = j$, que vale $\lambda_j\langle a_j, a_j\rangle$: así, como $\langle a_j, a_j\rangle \neq 0$, tenemos que $\lambda_j = 0$.

Esto vale para cada $j \in \{1, \dots, n\}$, así que podemos concluir que A es linealmente independiente.

(*ii*) Si $j \in \{1, \dots, n\}$, entonces

$$\langle u, a_j \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i, a_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle a_i, a_j \rangle.$$

Como A es ortonormal, el único término de esta suma que no es inmediatamente nulo es el que tiene $i = j$, que es igual a $\lambda_j \langle a_j, a_j \rangle = \lambda_j$. Esto prueba lo que queremos.

(*iii*) Sea $u \in \langle A \rangle$, de manera que existen $a_1, \dots, a_n \in A$ y $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tales que $u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\lambda_i \neq 0$ si $i \in \{1, \dots, n\}$.

Si $a \in A$, entonces $\langle u, a \rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle a_i, a \rangle$. Como A es ortonormal, esta suma tiene todos sus términos nulos si $a \notin \{a_1, \dots, a_n\}$. Así, vemos que $A_u \subseteq \{a_1, \dots, a_n\}$ y, en particular, que A_u es un conjunto finito. Para terminar, hay que mostrar que $\lambda_i = \langle u, a_i \rangle$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$: esto es consecuencia inmediata de la afirmación (*ii*). □

Teorema 3.6. *Sea V un espacio vectorial con producto interno y sea $\{v_1, \dots, v_n\}$ un subconjunto linealmente independiente de V. Existe entonces un conjunto ortonormal $\{w_1, \dots, w_n\}$ en V tal que para todo $i \in \{1, \dots, n\}$ se tiene que $\langle v_1, \dots, v_i \rangle = \langle w_1, \dots, w_n \rangle$.*

Demostración. Hacemos inducción en n.

Sea primero $n = 1$. Como $\{v_1\}$ es linealmente independiente, $v_1 \neq 0$ y entonces $\|v_1\| \neq 0$: podemos considerar entonces el vector $w_1 = v_1 / \|v_1\|$. Es inmediato que $\langle v_1 \rangle = \langle w_1 \rangle$ y que $\|w_1\| = 1$, de manera que $\{w_1\}$ es un conjunto ortonormal, y la afirmación del teorema es cierta en este caso.

Sea ahora $n > 1$. Como $\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$ es linealmente independiente, podemos suponer inductivamente que existe un conjunto $\{w_1, \dots, w_{n-1}\}$ tal que para cada $i \in \{1, \dots, n-1\}$ es $\langle v_1, \dots, v_i \rangle = \langle w_1, \dots, w_i \rangle$. Sea

$$\tilde{w}_n = v_n - \sum_{i=1}^{n-1} \langle v_n, w_i \rangle w_i.$$

Si fuese $\tilde{w}_n = 0$, tendríamos que

$$v_n = \sum_{i=1}^{n-1} \langle v_n, w_i \rangle w_i \in \langle w_1, \dots, w_{n-1} \rangle \in \langle v_1, \dots, v_{n-1} \rangle,$$

lo que es absurdo ya que $\{v_1, \dots, v_n\}$ es linealmente independiente. Podemos entonces considerar el vector $w_n = \tilde{w}_n / \|w_n\|$, que tiene norma unitaria. Si $j \in \{1, \dots, n-1\}$, entonces

$$\begin{aligned} \|\tilde{w}_n\| \langle w_n, w_j \rangle &= \left\langle v_n - \sum_{i=1}^{n-1} \langle v_n, w_i \rangle w_i, w_j \right\rangle \\ &= \langle v_n, w_j \rangle - \sum_{i=1}^{n-1} \langle v_n, w_i \rangle \langle w_i, w_j \rangle \\ &= \langle v_n, w_j \rangle - \langle v_n, w_j \rangle \\ &= 0, \end{aligned}$$

así que el conjunto $\{w_1, \dots, w_{n-1}, w_n\}$ es ortonormal. Como es claro que

$$\langle w_1, \dots, w_n \rangle = \langle v_1, \dots, v_n \rangle,$$

esto completa la inducción. $\square$

Corolario 3.7. *Un espacio vectorial con producto interno de dimensión finita tiene una base ortonormal.*

Demostración. Si V es un espacio vectorial con producto interno de dimensión finita y $\mathscr{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ es una base de V, el teorema nos da un conjunto ortonormal $\mathscr{B}' = \{w_1, \dots, w_n\}$ que, entre otras cosas, tiene la propiedad de que

$$\langle w_1, \dots, w_n \rangle = \langle v_1, \dots, v_n \rangle = V.$$

Esto implica que $\mathscr{B}'$ es una base de V, que por construcción es ortonormal. $\square$

Definición 3.8. Sea V es un espacio vectorial con producto interno. Si $S \subseteq V$ es un subconjunto no vacío y $v \in V$, definimos

$$d(v, S) = \inf_{w \in S} d(v, w).$$

{prop:vS}

Proposición 3.9. *Sea V es un espacio vectorial con producto interno. Sea $S \subseteq V$ un subespacio y sea $v \in V$. Si $\mathscr{B} = \{w_1, \dots, w_n\}$ es una base ortonormal de S y*

$$v_S = \sum_{j=1}^{n} \langle v, w_j \rangle w_j,$$

entonces

(*i*) $v - v_S \perp S$,
(*ii*) $d(v, S) = d(v, v_S)$, *y*
(*iii*) $d(v, v_S) < d(v, w)$ *para todo* $w \in S \setminus \{w_0\}$.

Demostración. (*i*) Sea $w \in S$. Como $\mathscr{B}$ es una base ortonormal de S, es $w = \sum_{i=1}^{n} \langle w, w_i \rangle w_i$. Entonces

$$\begin{aligned}
\langle v - v_S, w \rangle &= \Big\langle v - \sum_{j=1}^{n} \langle v, w_j \rangle w_j, \sum_{i=1}^{n} \langle w, w_i \rangle w_i \Big\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \overline{\langle w, w_i \rangle} \langle v, w_i \rangle - \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \langle v, w_j \rangle \overline{\langle w, w_i \rangle} \langle w_j, w_i \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \overline{\langle w, w_i \rangle} \langle v, w_i \rangle - \sum_{j=1}^{n} \langle v, w_j \rangle \overline{\langle w, w_j \rangle} = 0.
\end{aligned}$$

Vemos así que $v - v_S \perp S$.

(*ii*) Como $v_S \in S$, es claro que $d(v, S) \leq d(v, v_S)$. Sea, por otro lado $w \in S$: es

$$\begin{aligned}
d(v, w)^2 &= \|v - w\|^2 \\
&= \|(v - v_S) + (v_S - w)\|^2
\end{aligned}$$

y, como $v - v_S \perp v_S - w$, esto es

$$= \|v - v_S\|^2 + \|v_S - w\|^2$$
$$\geq \|v - v_S\|^2,$$

de manera que $d(v, w) \geq d(v, v_S)$. De la definición de $d(v, S)$, entonces, vemos que $d(v, S) \geq d(v, v_S)$.

(*iii*) Si $w \in S \setminus \{v_S\}$, entonces como recién es

$$d(v, w)^2 = d(v, v_S)^2 + d(v_S, w)^2 > d(v, v_S)^2,$$

así que $d(v, w) > d(v, v_S)$. □

Definición 3.10. Sea V es un espacio vectorial con producto interno. Si $S \subseteq V$ es un subconjunto arbitrario, definimos

$$S^\perp = \{v \in V : v \perp s \text{ para todo } s \in S\}.$$

Escribimos, además, $S^{\perp\perp} = (S^\perp)^\perp$ y $S^{\perp\perp\perp} = (S^{\perp\perp})^\perp$.

Proposición 3.11. *Sea V es un espacio vectorial con producto interno. Sean además S, $T \subseteq V$ subconjuntos. Entonces:*

{prop:perp:rev} (*i*) $0^\perp = V$ *y* $V^\perp = 0$*;*

{prop:perp:cap} (*ii*) $S \subseteq T \implies T^\perp \subseteq S^\perp$*;*

(*iii*) $(S + T)^\perp = S^\perp \cap T^\perp$*.*

Demostración. (*i*) Todo vector es ortogonal a 0, así que $V \subseteq 0^\perp$. La primera igualdad es entonces inmediata. Por otro lado, si $v \in V^\perp$, entonces $\langle v, w\rangle = 0$ para todo $w \in V$ y de la Proposición 1.5(*i*), entonces, $v = 0$. Como por supuesto $0 \in V^\perp$, esto prueba la segunda igualdad del enunciado.

(*ii*) Supongamos que $S \subseteq T$ y sea $v \in T^\perp$, de manera que $v \perp t$ para todo $t \in T$. Como $S \subseteq T$, esto nos dice que $v \perp s$ para todo $s \in S$, esto es, que $v \in S^\perp$, y concluimos, como queremos, que $T^\perp \subseteq S^\perp$.

(*iii*) Como S, $T \subseteq S + T$, la parte (*ii*) implica que $(S + T)^\perp \subseteq S^\perp$, $T^\perp$ y entonces que $(S + T)^\perp \subseteq S^\perp \cap T^\perp$. Por otro lado, si $v \in S^\perp \cap T^\perp$ y $w \in S + T$, de manera que existen $s \in S$ y $t \in T$ tales que $w = s + t$, se tiene que

$$\langle v, w\rangle = \langle v, s + t\rangle = \langle v, s\rangle + \langle v, t\rangle = 0.$$

Esto nos dice que $v \in (S + T)^\perp$ y, en definitiva, que $S^\perp \cap T^\perp \subseteq (S + T)^\perp$. □

Proposición 3.12. *Sea V es un espacio vectorial con producto interno. Sean además S, $T \subseteq V$ subconjuntos. Entonces:*

(*i*) $\langle S\rangle^\perp = S^\perp$*;*

{prop:perp2} (*ii*) $S^\perp$ *es un subespacio de* V*;*

(*iii*) $S \cap S^\perp \subseteq 0$*;*

(*iv*) $S \subseteq S^{\perp\perp}$*;*

(*v*) $S^\perp = S^{\perp\perp\perp}$.

Demostración. (*i*) Como $S \subseteq \langle S \rangle$, la Proposición 3.11(*ii*) implica que $\langle S \rangle^\perp \subseteq S^\perp$. Sea, por otro lado, $v \in S^\perp$ y sea $w \in \langle S \rangle$. Existen entonces $n \in \mathbb{N}_0$, $s_1, \dots, s_n \in S$ y $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tales que $w = \sum_{i=1}^n \lambda_i s_i$, y

$$\langle v, w \rangle = \Big\langle v, \sum_{i=1}^n \lambda_i s_i \Big\rangle = \sum_{i=1}^n \overline{\lambda}_i \langle v, s_i \rangle = 0$$

porque $v \in S^\perp$. Esto muestra que $S^\perp \subseteq \langle S \rangle^\perp$.

(*ii*) Sean $u, v \in S^\perp$. Para cada $s \in S$, es $\langle u + v, s \rangle = \langle u, s \rangle + \langle v, s \rangle = 0$ porque ambos términos se anulan. Esto nos dice que $u + v \in S^\perp$.

Por otro lado, si $u \in S^\perp$ y $\lambda \in \mathbb{K}$, entonces para cada $s \in S$ es $\langle \lambda u, s \rangle = \lambda \langle u, s \rangle = 0$. Otra vez, esto implica que $\lambda u \in S^\perp$, y podemos concluir que $S^\perp$ es un subespacio de V.

(*iii*) Si $v \in S \cap S^\perp$, entonces $\langle v, v \rangle = 0$, porque $v \in S$ y $v \in S^\perp$, y en consecuencia $v = 0$.

(*iv*) Si $s \in S$, para cada $t \in S^\perp$ es $s \perp t$. Esto dice que $s \in (S^\perp)^\perp = S^{\perp\perp}$.

(*v*) Acabamos de probar que $S \subseteq S^{\perp\perp}$, así que la Proposición 3.11(*ii*) implica que $S^{\perp\perp\perp} = (S^{\perp\perp})^\perp \subseteq S^\perp$. Por otro lado, según (*vi*), $S^\perp \subseteq (S^\perp)^{\perp\perp} = S^{\perp\perp\perp}$. □

prop:perp2:fin}

Proposición 3.13. *Sea V es un espacio vectorial con producto interno y sea $S \subseteq V$ un subespacio de dimensión finita. Entonces $V = S \oplus S^\perp$ y $S = S^{\perp\perp}$.*

Demostración. De acuerdo a la Proposición 3.9, existe $v_S \in S$ tal que $v - v_S \perp S$, esto es, tal que $v - v_S \in S^\perp$. Entonces $v = v_S + (v - v_S) \in S + S^\perp$ y vemos que $V = S + S^\perp$. Como sabemos que $S \cap S^\perp = 0$, esto implica que $V = S \oplus S^\perp$.

Para probar que $S = S^{\perp\perp}$ basta mostrar, en vista de la Proposición 3.12(*iii*), que $S^{\perp\perp} \subseteq S$. Sea entonces $v \in S^{\perp\perp}$. Como $V = S \oplus S^\perp$, existen $s \in S$ y $t \in S^\perp$ tales que $v = s + t$. Como $v \in S^{\perp\perp}$, es

$$0 = \langle v, t \rangle = \langle s + t, t \rangle = \langle s, t \rangle + \langle t, t \rangle = \langle t, t \rangle,$$

así que $t = 0$ y $v = s + t = s \in S$. □

Corolario 3.14. *Sea V un espacio vectorial con producto interno de dimensión finita y sea $S \subseteq V$ un subespacio. Entonces*

$$\dim V = \dim S + \dim S^\perp.$$

Demostración. Esto es consecuencia inmediata de que, de acuerdo a la proposición, $V = S \oplus S^\perp$. □

§4. Proyectores ortogonales

Sabemos ya que si $S \subseteq V$ es un subespacio de un espacio vectorial V, entonces existen proyectores $p : V \to V$ con imagen S, y que para cualquiera de ellos se tiene que $V = \operatorname{im} p \oplus \ker p$. Cuando V es un espacio con producto interno, hay ciertos proyectores particularmente buenos:

Definición 4.1. Sea V un espacio vectorial con producto interno. Si $p : V \to V$ es un proyector tal que $\operatorname{im} p \perp \ker p$, entonces decimos que p es un *proyector ortogonal.*

Proposición 4.2. *Sea V un espacio vectorial con producto interno.*

(*i*) *Si $p : V \to V$ es un proyector ortogonal, entonces $(\operatorname{im} p)^{\perp} = \ker p$ y $(\ker p)^{\perp} = \operatorname{im} p$.*

(*ii*) *Si $S \subseteq V$ es un subespacio de V y existe un proyector ortogonal $p : V \to V$ cuya imagen es S, entonces $S^{\perp\perp} = S$.*

Demostración. (*i*) Como p es un proyector ortogonal, es $\operatorname{im} p \perp \ker p$ y en consecuencia $\operatorname{im} p \subseteq (\ker p)^{\perp}$ y $\ker p \subseteq (\operatorname{im} p)^{\perp}$. Por otro lado, es $V = \operatorname{im} p \oplus \ker p$.

Sea $v \in (\ker p)^{\perp}$ y sean $v' \in \operatorname{im} p$ y $v'' \in \ker p$ tales que $v = v' + v''$. Entonces

$$0 = \langle v, v'' \rangle = \langle v' + v'', v'' \rangle = \langle v', v'' \rangle + \langle v'', v'' \rangle,$$

y, como $\operatorname{im} p \perp \ker p$, esto es igual a $\langle v'', v'' \rangle$. Así, vemos que $v'' = 0$ y que $v = v' \in \operatorname{im} p$. Concluimos de esta forma que $(\ker p)^{\perp} \subseteq \operatorname{im} p$. De manera enteramente similar puede verse que $(\operatorname{im} p)^{\perp} \subseteq \ker p$.

(*ii*) La necesidad de la condición es consecuencia inmediata de la parte (*i*) de la proposición. □

La siguiente proposición muestra que todo subespacio de dimensión finita de un espacio con producto interno es la imagen de exactamente *un* proyector ortogonal:

prop:proyector}

Proposición 4.3. *Si V es un espacio vectorial con producto interno y $S \subseteq V$ es un subespacio de dimensión finita, entonces $V = S \oplus S^{\perp}$ y existe exactamente un proyector ortogonal $p : V \to V$ tal que $\operatorname{im} p = S$ y $\ker p = S^{\perp}$. Más aún, si $\mathscr{B} = \{s_1, \dots, s_n\}$ es una base ortonormal de X, para cada $v \in V$ se tiene que*

$$p(v) = \sum_{i=1}^{n} \langle v, s_i \rangle s_i.$$

Demostración. Definamos $p : V \to V$ usando la expresión del enunciado. Es claro que se trata de una función lineal y, de acuerdo a la Proposición 3.9, es $v - p(v) \in S^{\perp}$ para todo $v \in V$.

Si $v \in \ker p$, entonces $v = v - p(v) \in S^{\perp}$. Recíprocamente, si $v \in S^{\perp}$, de manera que en particular $\langle v, s_i \rangle = 0$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, entonces $p(v) = \sum_{i=1}^{n} \langle v, s_i \rangle s_i = 0$. Así, tenemos que $\ker p = S^{\perp}$.

De la definición de p es claro que $\operatorname{im} p \subseteq S$. Por otro lado, si $s \in S$, entonces $s = \sum_{i=1}^{n} \langle s, s_i \rangle s_i$, porque $\mathscr{B}$ es una base ortonormal de S, y, como consecuencia de esto, $s = p(s) \in \operatorname{im} p$. Luego $\operatorname{im} p = S$. □

prop:proy-perp}

Proposición 4.4. *Sea V un espacio vectorial con producto interno, sean S, $T \subseteq V$ dos subespacios y supongamos que p_S, $p_T : V \to V$ son proyectores ortogonales con imagen S y T, respectivamente. Si $S \perp T$, entonces $p_S \circ p_T = 0$.*

Demostración. Es $\operatorname{im} p_S = S \perp T = \operatorname{im} p_T$, así que $\operatorname{im} p_T \subseteq (\operatorname{im} p_S)^{\perp} = \ker p_S$. Esto implica inmediatamente que $p_S \circ p_T = 0$. □

§5. Teorema de Riesz y funciones adjuntas

Lema 5.1. *Sea V un espacio vectorial con un producto interno $\langle -, - \rangle$. Si $v \in V$, consideramos la función*

$$\phi_v : w \in V \mapsto \langle w, v \rangle \in \mathbb{K}.$$

(*i*) *Para cada $v \in V$, la función ϕ_v es lineal, de manera que $\phi_v \in V^*$.*

{lema:Phi} (*ii*) *Si v, $v' \in V$ y $\lambda \in \mathbb{K}$, entonces $\phi_{v+v'} = \phi_v + \phi_{v'}$ y $\phi_{\lambda v} = \overline{\lambda}\phi_v$.*

(*iii*) *La función $\Phi : v \in V \mapsto \phi_v \in V^*$ está bien definida y es semilineal e inyectiva.*

Demostración. (*i*) Sea $v \in V$. Si w, $w' \in V$ y $\lambda \in \mathbb{K}$, entonces

$$\phi_v(w + w') = \langle w + w', v \rangle = \langle w, v \rangle + \langle w', v \rangle = \phi_v(w) + \phi_v(w'),$$

y

$$\phi_v(\lambda w) = \langle \lambda w, v \rangle = \lambda \langle w, v \rangle = \lambda \phi_v(w).$$

Vemos así que la función ϕ_v es lineal.

(*ii*) Para cada $w \in V$, es

$$\phi_{v+v'}(w) = \langle w, v + v' \rangle = \langle w, v \rangle + \langle w, v' \rangle = \phi_v(w) + \phi_{v'}(w) = (\phi_v + \phi_{v'})(w),$$

así que $\phi_{v+v'} = \phi_v + \phi_{v'}$. De manera similar, para cada $w \in V$ se tiene que

$$\phi_{\lambda v}(w) = \langle w, \lambda v \rangle = \overline{\lambda}\langle w, v \rangle = \overline{\lambda}\phi_v(w) = (\overline{\lambda}\phi_v)(w),$$

de manera que $\phi_{\lambda v} = \overline{\phi}_v$, como afirma el lema.

(*iii*) La parte (*i*) nos dice precisamente que para todo $v \in V$ es $\phi_v \in V^*$, así que Φ está bien definida. Que es semilineal es precisamente el contenido de la parte (*ii*). Finalmente, si v, $v' \in V$ son tales que $\Phi(v) = \Phi(v')$, entonces para cada $w \in V$ se tiene que

$$\langle w, v - v' \rangle = \langle w, v \rangle - \langle w, v' \rangle = \Phi(v)(w) - \Phi(v')(w) = 0,$$

y entonces $v - v' = 0$, esto es, $v = v'$. Vemos así que Φ es inyectiva. □

{teorema:riesz}

Teorema 5.2. (F. Riesz) *Sea V un espacio vectorial con producto interno de dimensión finita. Si $f \in V^*$, entonces existe un único vector $v_f \in V$ tal que $\phi_{v_f} = f$, esto es, tal que para todo $v \in V$ se tiene que*

{eq:riesz}

$$f(v) = \langle v, v_f \rangle. \tag{2}$$

Demostración. Fijemos una base ortonormal $\mathscr{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ de V y sea

$$v_f = \sum_{i=1}^{n} \overline{f(v_i)} v_i.$$

Si $v \in V$, entonces $v = \sum_{i=1}^{n} \langle v, v_i \rangle v_i$ y

$$f(v) = f\Bigl(\sum_{i=1}^{n} \langle v, v_i \rangle v_i\Bigr) = \sum_{i=1}^{n} \langle v, v_i \rangle f(v_i) = \Bigl\langle v, \sum_{i=1}^{n} \overline{f(v_i)} v_i \Bigr\rangle = \langle v, v_f \rangle.$$

Esto nos dice que v_f saytisface la condición (2).

Por otro lado, si $v'_f \in V$ es *otro* vector que la satisface, entonces para todo $v \in V$ se tiene que

$$\langle v, v_f - v'_f \rangle = \langle v, v_f \rangle - \langle v, v'_f \rangle = f(v) - f(v) = 0.$$

Esto es solo posible si $v_f - v'_f = 0$. □

Corolario 5.3. *La función $\Phi : V \to V^*$ del Lema 5.1(iii) es una biyección.*

Demostración. En efecto, el teorema nos dice que es sobreyectiva. □

Definición 5.4. Sea V un espacio vectorial con producto interno y sea $f : V \to V$ una transformación lineal. Decimos que una transformación lineal $g : V \to V$ es *adjunta* a f si para tofo v, $w \in V$ se tiene que

$$\langle f(v), w \rangle = \langle v, g(w) \rangle.$$

Lema 5.5. *Sea V un espacio vectorial con producto interno. Una transformación lineal $f : V \to V$ posee a lo sumo* una *transformación lineal adjunta.*

En vista de este lema, si una transformación lineal $f : V \to V$ tiene una transformación adjunta, tiene una sola: podemos en ese caso denotarla sin ambigüedad f^*.

Demostración. Supongamos que g, $g' : V \to V$ son transformaciones lineales adjuntas a f. Si $w \in V$, entonces para todo $v \in V$ se tiene que

$$\langle v, g(w) - g'(w) \rangle = \langle v, g(w) \rangle - \langle v, g'(w) \rangle = \langle f(v), w \rangle - \langle f(v), w \rangle = 0,$$

así que $g(w) = g'(w)$. Esto nos dice que $g = g'$. □

Ejemplo 5.6. En general, un endomorfismo de un espacio vectorial con producto interno no tiene adjunta.

Ejemplo 5.7. Sea $C_{\mathbb{K}}[0,1]$ el espacio vectorial de las funciones $[0,1] \to \mathbb{K}$ que son continuas, dotado del producto interno introducido en el Ejemplo 1.3. Sea $V \subseteq C_{\mathbb{K}}[0,1]$ el subespacio de las funciones $f : [0,1] \to \mathbb{K}$ infinitamente diferenciables para las que existe $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$ tal que $f(t) = 0$ si $t \in [0, \varepsilon) \cup (1-\varepsilon, 1]$.

Si $f \in V$, entonces también $f' \in V$,así que podemos definir una transformación lineal $D : f \in V \mapsto f' \in V$. Si f, $g \in V$, entonces las fórmula de integración por partes nos dice que

$$\int_0^1 Df(t)\overline{g(t)}\mathrm{d}t = -\int_0^1 f(t)\overline{Dg(t)}\mathrm{d}t,$$

porque f y g se anulan en los extremos del intervalo de integración. Esto significa precisamente que

$$\langle Df, g\rangle = \langle f, -Dg\rangle$$

y, entonces, que D tiene a $D^* = -D$ como transformación adjunta.

Teorema 5.8. *Sea V un espacio vectorial con producto interno de dimensión finita. Toda transformación lineal $f : V \to V$ posee una transformación adjunta $f^* : V \to V$.*

Demostración. Si $w \in V$, la función

$$\psi_w : v \in V \mapsto \langle fv, w\rangle \in \mathbb{K}$$

es claramente lineal, así que el Teorema 5.2 nos dice que existe un único un vector $f^*(w) \in V$ con la propiedad de que para todo $v \in V$ es $\psi_w(v) = \langle v, f^*(w)\rangle$, esto es,

$$\langle f(v), w\rangle = \langle v, f^*(w)\rangle.$$

De esta forma tenemos definida una función $f^* : V \to V$. Para terminar la prueba del teorema resta únicamente mostrar que f^* es lineal.

Sean w, $w' \in V$. Para todo $v \in V$ se tiene que

$$\begin{aligned}
&\langle v, f^*(w + w') - f^*(w) - f^*(w')\rangle \\
&\quad = \langle v, f^*(w + w')\rangle - \langle v, f^*(w)\rangle - \langle v, f^*(w')\rangle \\
&\quad = \langle f(v), w + w'\rangle - \langle f(v), w\rangle - \langle f(v), w'\rangle \\
&\quad = 0,
\end{aligned}$$

así que $f^*(w + w') - f^*(w) - f^*(w') = 0$, esto es, $f^*(w + w') = f^*(w) + f^*(w')$.

Por otro lado, si $w \in W$ y $\lambda \in \mathbb{K}$, para cada $v \in W$ tenemos que

$$\begin{aligned}
&\langle v, f^*(\lambda w) - \lambda f^*(w)\rangle = \langle v, f^*(\lambda w)\rangle - \overline{\lambda}\langle v, f^*(w)\rangle \\
&\quad = \langle f(v), \lambda w\rangle - \overline{\lambda}\langle f(v), w\rangle \\
&\quad = \overline{\lambda}\langle f(v), \lambda w\rangle - \overline{\lambda}\langle f(v), w\rangle \\
&\quad = 0,
\end{aligned}$$

de manera que $f^*(\lambda w) = \lambda f^*(w)$. Concluímos que f^* es lineal, como queríamos. □

{prop:adj-mat}

Proposición 5.9. *Sea V un espacio vectorial con producto interno de dimensión finita y sea $f : V \to V$ una transformación lineal. Si $\mathscr{B}$ es una base ortonormal de V y $f^* : V \to V$ es la transformación adjunta, entonces*

$$[f^*]_{\mathscr{B}} = \overline{([f]_{\mathscr{B}})^{\mathrm{t}}}.$$

Demostración. Supongamos que $\mathscr{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$. Como $\mathscr{B}$ es una base *ortonormal*, para cada $v \in V$ se tiene que $v = \sum_{i=1} \langle v, v_i\rangle v_i$. En particular, si i, $j \in \{1, \dots, n\}$, el coeficiente (i, j)-ésimo de la matriz $[f]_{\mathscr{B}}$, esto es, el coeficiente de v_i en la escritura de $f(v_j)$ en la base $\mathscr{B}$, es

$$([f]_{\mathscr{B}})_{i,j} = \langle f(v_j), v_i\rangle = \langle v_j, f^*(v_i)\rangle = \overline{\langle f^*(v_i), v_j\rangle} = \overline{([f^*]_{\mathscr{B}})_{j,i}}.$$

Esto nos dice que la matriz $[f]_{\mathscr{B}}$ se obtiene transponiendo y conjugando a la matriz $[f^*]_{\mathscr{B}}$, que es precisamente lo que afirma la proposición. □

Es importante observar que la igualdad del enunciado no es cierta, en general, si $\mathscr{B}$ no es una base ortonormal.

{prop:adj}

Proposición 5.10. *Sea V un espacio vectorial con producto interno. Si f, $g : V \to V$ son transformaciones lineales que poseen transformaciones adjuntas f^* y g^*, y $\lambda \in \mathbb{K}$, entonces las transformaciones lineales $f+g$, λf, $f \circ g$ y f^* también poseen adjuntas y vale que*

(i) $(f+g)^* = f^* + g^*$;

(ii) $(\lambda f)^* = \overline{\lambda} f^*$;

(iii) $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$;

(iv) $(f^*)^* = f$.

Finalmente, $\mathrm{id}_V : V \to V$ *posee adjunta, y*

(v) $\mathrm{id}_V^* = \mathrm{id}_V$.

Demostración. Bastará mostrar que las funciones $f^* + g^*$, $\overline{\lambda} f^*$, $g^* \circ f^*$, f e id_V son funciones adjuntas de $f+g$, λf, $f \circ g$, f^* e id_V, respectivamente. Esto es consecuencia de que para cada v, $w \in W$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\langle (f+g)(v), w\rangle &= \langle f(v) + g(v), w\rangle \\
&= \langle f(v), w\rangle + \langle g(v), w\rangle \\
&= \langle v, f^*(w)\rangle + \langle v, g^*(w)\rangle \\
&= \langle v, f^*(w) + g^*(w)\rangle \\
&= \langle v, (f^* + g^*)(w)\rangle, \\
\langle (\lambda f)(v), w\rangle &= \langle \lambda f(v), w\rangle \\
&= \lambda \langle f(v), w\rangle \\
&= \lambda \langle v, f^*(w)\rangle \\
&= \langle v, \overline{\lambda} f^*(w)\rangle \\
&= \langle v, (\overline{\lambda} f^*)(w)\rangle, \\
\langle (f \circ g)(v), w\rangle &= \langle f(g(v)), w\rangle \\
&= \langle g(v), f^*(w)\rangle \\
&= \langle v, g^*(f^*(w))\rangle \\
&= \langle v, (g^* \circ f^*)(w)\rangle, \\
\langle f^*(v), w\rangle &= \overline{\langle w, f^*(v)\rangle} \\
&= \overline{\langle f(w), v\rangle} \\
&= \langle v, f(w)\rangle,
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\langle \mathrm{id}_V(v), w\rangle &= \langle v, w\rangle \\
&= \langle v, \mathrm{id}_V(w)\rangle.
\end{aligned}$$

□

Proposición 5.11. *Sea V un espacio vectorial con producto interno y sea $f : V \to V$ una transformación lineal que posee adjunta. Entonces*
(*i*) $\ker f^* = (\operatorname{im} f)^\perp$, *y*
(*ii*) $\operatorname{im} f^* \subseteq (\ker f)^\perp$.
Si V tiene dimensión finita, entonces se tiene además que
(*iii*) $\operatorname{im} f^* = (\ker f)^\perp$.

Demostración. (*i*) Sea $v \in \ker f^*$. Si $w \in \operatorname{im} f$, de manera que existe $u \in V$ tal que $f(u) = w$, entonces

$$\langle w, v \rangle = \langle f(u), v \rangle = \langle u, f^*(v) \rangle = 0.$$

Esto nos dice que $v \in (\operatorname{im} f)^\perp$. Recíprocamente, si $v \in (\operatorname{im} f)^*$, se tiene que para todo $w \in V$ es

$$\langle u, f^*(v) \rangle = \langle f(u), v \rangle = 0,$$

así que $f^*(v) = 0$, esto es, $v \in \ker f^*$.

(*ii*) Sea $v \in \operatorname{im} f^*$; en particular, existe $u \in V$ tal que $v = f^*(u)$. Para cada $w \in \ker f$ es

$$\langle w, v \rangle = \langle w, f^*(u) \rangle = \langle f(w), u \rangle = 0,$$

así que $v \in (\ker f)^\perp$: vemos que $\operatorname{im} f^* \subseteq (\ker f)^\perp$.

(*iii*) Sea $v \in (\operatorname{im} f^*)^\perp$. Si $w \in V$, entonces

$$\langle f^*(v), w \rangle = \langle v, f(w) \rangle = 0,$$

así que $f^*(v) = 0$. Vemos de esta forma que $(\operatorname{im} f^*)^\perp \subseteq \ker f^*$ y entonces, como V tiene dimensión finita y usando la Proposición 3.11(*ii*) y la Proposición 3.13, que $(\ker f^*)^\perp \subseteq (\operatorname{im} f^*)^{\perp\perp} = \operatorname{im} f^*$. □

§6. Transformaciones lineales autoadjuntas

Definición 6.1. Sea V un espacio vectorial con producto interno. Si $f : V \to V$ es una función lineal que posee adjunta f^*, decimos que f es *autoadjunta* si $f^* = f$.

{prop:auto}

Proposición 6.2. *Sea V un espacio vectorial con producto interno de dimensión finita y sea $\mathscr{B}$ una base ortonormal de V. Sea $f : V \to V$ una transformaciones lineal. Entonces f es autoadjunta sii $[f]_{\mathscr{B}} = \overline{([f]_{\mathscr{B}})^{\mathrm{t}}}$. En particular,*
(*i*) *si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, f es autoadjunta sii la matriz $[f]_{\mathscr{B}}$ es simétrica, y*
(*ii*) *si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, f es autoadjunta sii la matriz $[f]_{\mathscr{B}}$ es hermitiana.*

Demostración. Esto es consecuencia inmediata de la Proposición 5.9 y de que dos transformaciones lineales $V \to V$ son iguales si y solamente si sus matrices con respecto a la base $\mathscr{B}$ coinciden. □

Proposición 6.3. *Sea V un espacio vectorial con producto interno de dimensión finita y sea $p : V \to V$ un proyector. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(*a*) *p es un proyector ortogonal;*

(*b*) *p es autoadjunto.*

Demostración. (*a* $\Longrightarrow$ *b*) Sean v, $w \in V$. Como $V = \operatorname{im} p \oplus \ker p$, existen v', $w' \in \operatorname{im} p$ y v'', $w'' \in \ker p$ tales que $v = v' + v''$ y $w = w' + w''$. Más aún, $p(v) = v'$, $p(w) = w'$ y, como por hipótesis es $\operatorname{im} p \perp \ker p$, es $\langle v', w''\rangle = \langle v'', w'\rangle = 0$. Usando todo esto, vemos que

$$\langle p(v), w\rangle = \langle v', w' + w''\rangle = \langle v', w'\rangle + \langle v', w''\rangle = \langle v', w'\rangle,$$

mientras que

$$\langle v, p(w)\rangle = \langle v' + v'', w'\rangle = \langle v', w'\rangle + \langle v'', w'\rangle = \langle v', w'\rangle.$$

Así, es $\langle p(v), w\rangle = \langle v, p(w)\rangle$. Esto muestra que $p^* = p$.

(*b* $\Longrightarrow$ *a*) Sean $v \in \operatorname{im} p$ y $w \in \ker p$. Como p es autoadjunto, es

$$\langle v, w\rangle = \langle p(v), w\rangle = \langle v, p(w)\rangle = 0.$$

Esto nos dice que $v \perp w$ y, entonces, que $\operatorname{im} p \perp \ker p$. □

Un corolario inmediato de esta proposición y de la Proposición 4.3 es que si S es un subespacio de un espacio vectorial V con producto interno de dimensión finita, entonces existe exactamente un proyector $p : V \to V$ autoadjunto tal que $\operatorname{im} p = S$.

Proposición 6.4. *Sea V un espacio vectorial con producto interno y sea $f : V \to V$ una transformación lineal autoadjunta.*

(*i*) *Todo autovalor de f es real.*

(*ii*) *Si v, $w \in V$ son autovectores de f correspondientes a autovalores distintos, entonces $v \perp w$.*

Demostración. (*i*) Sea $\lambda \in \mathbb{K}$ un autovalor y sea $v \in V$ tal que $f(v) = \lambda v$. Entonces

$$\lambda\langle v, v\rangle = \langle \lambda v, v\rangle = \langle f(v), v\rangle = \langle v, f(v)\rangle = \langle v, \lambda v\rangle = \overline{\lambda}\langle v, v\rangle$$

y, como $\langle v, v\rangle \neq 0$, esto implica que $\lambda = \overline{\lambda}$, esto es, que $\lambda \in \mathbb{R}$.

(*ii*) Supongamos que v, $w \in V$ son autovectores para λ, $\mu \in \mathbb{K}$, respectivamente y que $\lambda \neq \mu$; de la parte (*i*) sabemos que λ, $\mu \in \mathbb{R}$. Entonces

$$\lambda\langle v, w\rangle = \langle \lambda v, w\rangle = \langle f(v), w\rangle = \langle v, f(w)\rangle = \langle v, \mu w\rangle = \overline{\mu}\langle v, w\rangle, = \mu\langle v, w\rangle,$$

de manera que $(\lambda - \mu)\langle v, w\rangle = 0$. Como $\lambda \neq \mu$, esto nos dice que $\langle v, w\rangle = 0$. □

Proposición 6.5. *Sea V un espacio vectorial con producto interno de dimensión finita. Toda transformación lineal $f : V \to V$ que es autoadjunta posee un autovalor.*

Demostración. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, ya sabemos que todo endomorfismo de un espacio vectorial de dimensión finita tiene un autovalor: el cuerpo $\mathbb{C}$ es algebraicamente cerrado. Supongamos entonces que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Sea $\mathscr{B}$ una base ortonormal de V, sea $n = \dim_{\mathbb{R}} V$ y sea $A = [f]_{\mathscr{B}} \in M_n(\mathbb{R})$; como f es autoadjunta, A es una matriz simétrica. Si $g : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ es la transformación $\mathbb{C}$-lineal que tiene matriz $[g]_{\mathscr{E}} = A$ con respecto a la base canónica $\mathscr{E}$ de $\mathbb{C}^n$. Como la base $\mathscr{E}$ es ortonormal para el producto interno estándard de $\mathbb{C}^n$, esto implica que g es autoadjunta y, en particular, todos sus autovalores son reales. Ahora bien, los autovalores de g son las raíces del polinomio característico de la matriz A. Vemos así que A tiene autovalores *reales* y, entonces, f tiene autovalores. □

Proposición 6.6. *Sea V un espacio vectorial con producto interno de dimensión finita. Para cada transformación lineal $f : V \to V$ autoadjunta, existe una base ortonormal $\mathscr{B}$ cuyos elementos son autovectores de f. En particular, la matriz $[f]_{\mathscr{B}}$ es diagonal.*

Demostración. Hacemos inducción en $\dim V$; es claro que cuando $\dim V = 0$ no hay nada que probar, así que supongamos que $n = \dim V > 0$.

Sea $f : V \to V$ una transformación lineal autoadjunta. De acuerdo a la proposición anterior, existe un autovalor $\lambda \in \mathbb{K}$ y, entonces, existe $v_1 \in V \setminus 0$ tal que $f(v_1) = \lambda v_1$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\|v_1\| = 1$; si ese no fuese el caso, podríamos simplemente reemplazar a v_1 por $v_1/\|v_1\|$.

Sea $W = \langle v_1 \rangle^{\perp}$. Si $w \in W$, entonces

$$\langle f(w), v_1 \rangle = \langle w, f(v_1) \rangle = \langle w, \lambda v_1 \rangle = \lambda \langle w, v_1 \rangle = 0,$$

de manera que $f(w) \in W$. Así, el subespacio W es f-invariante. Si dotamos a W del producto interno $\langle -, - \rangle|_{W \times W} : W \times W \to \mathbb{K}$ obtenido restringiendo al de V a $W \times W$, la restricción $f|_W : W \to W$ es autoadjunta. Como $\dim W = \dim V - 1 < \dim V$, podemos suponer inductivamente que existe base ortonormal $\mathscr{B}' = \{v_2, \dots, v_n\}$ de W cuyos elementos son autovectores de $f|_W$. Si ponemos $\mathscr{B} = \{v_1\} \cup \mathscr{B}'$, es inmediato que $\mathscr{B}$ es una base ortonormal de V cuyos elementos son autovectores de f: esto completa la inducción y termina la prueba de la proposición. □

Corolario 6.7. *Sea V un espacio vectorial con producto interno de dimensión finita y sea $f : V \to V$ una transformación lineal. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(*a*) *f es autoadjunta.*

(*b*) *Existe una base ortonormal de V formada por autovectores de f con autovalores correspondientes reales.*

Demostración. La implicación ($a \implies b$) es precisamente el contenido de la proposición anterior. La recíproca es consecuencia inmediata de la Proposición 6.2. □

rop:adj-lambda}

orema:normales}

§7. Transformaciones lineales normales

Definición 7.1. Sea V un espacio vectorial con producto interno y sea $f : V \to V$ una transformación lineal que admite adjunta f^*. Si $f^*f = ff^*$, decimos que f es *normal.*

Es claro que si $f : V \to V$ es autoadjunta, de manera que $f^* = f$, entonces f es normal: en ese caso es $f^*f = f^2 = ff^*$. La implicación recíproca es falsa.

Ejemplo 7.2. Consideremos a $\mathbb{R}^2$ dotado de su producto interno usual, y sea $\mathscr{E}$ la base canónica. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal tal que

$$[f]_{\mathscr{E}} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Entonces, como $\mathscr{E}$ es una base ortnonormal, sabemos que

$$[f^*]_{\mathscr{E}} = \overline{([f]_{\mathscr{E}})^{\mathrm{t}}} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix},$$

y es fácil ver que $[f^*]_{\mathscr{E}}[f]_{\mathscr{E}} = [f]_{\mathscr{E}}[f^*]_{\mathscr{E}} = I$, la matriz identidad, de manera que $f^*f = ff^* = \mathrm{id}_V$. Así, f es normal cualquiera sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Es claro, por otro lado, que $f^* \neq f$ si α no es un múltiplo entero de π.

Proposición 7.3. *Sea V un espacio vectorial con producto interno y de dimensión finita. Sea $f : V \to V$ una transformación lineal normal y sean $v \in V$ y $\lambda \in \mathbb{K}$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(*a*) *v es un autovector para f de autovalor λ.*
(*b*) *v es un autovalor para f^* de autovalor $\overline{\lambda}$.*

Demostración. Sea $g = f - \lambda\mathrm{id}_V$. Sabemos, de la Proposición 5.10, que $g^* = f^* - \overline{\lambda}\mathrm{id}_V$ y, como f es normal, es inmediato verificar que g es normal. Usando esto,

$$\|g(v)\|^2 = \langle g(v), g(v)\rangle = \langle v, g^*(g(v))\rangle = \langle v, g(g^*(v))\rangle = \langle g^*(v), g^*(v)\rangle = \|g^*(v)\|^2.$$

Esto nos dice que $g(v) = 0$ sii $g^*(v) = 0$, es decir, que $f(v) = \lambda v$ sii $f^*(v) = \overline{\lambda}v$, que es precisamente lo que afirma la proposición. □

Teorema 7.4. *Sea V un espacio vectorial complejo con producto interno y de dimensión finita. Si $f : V \to V$ es una transformación lineal normal, entonces existe una base ortonormal de V formada por autovectores de f.*

Demostración. Como $\mathbb{C}$ es algebraicamente cerrado, sabemos que existen $\lambda \in \mathbb{C}$ y $v \in V$ tales que $\|v\| = 1$ y $f(v) = \lambda v$. De la Proposición 7.3, entonces, $f^*(v) = \overline{\lambda}v$.

Sea $W = \langle v\rangle^\perp$. Si $w \in W$, entonces $w \perp v$ y tenemos que

$$\langle f(w), v\rangle = \langle w, f^*(v)\rangle = \langle w, \overline{\lambda}v\rangle = \lambda\langle w, v\rangle = 0$$

y

$$\langle f^*(w), v\rangle = \langle w, f(v)\rangle = \langle w, \lambda v\rangle = \overline{\lambda}\langle w, v\rangle = 0.$$

Vemos así que W es f- y f^*-invariante y que, en particular, podemos considerar las restricciones $f|_W$, $f^*|_W : W \to W$. Más aún, es inmediato verificar que $(f|_W)^* = f^*|_W$, así que $f|_W$ es una transformación lineal normal.

Como $\dim W = \dim V - 1$, podemos suponer inductivamente que el teorema el cierto para $f|_W$ y, entonces, que existe una base ortonormal $\mathscr{B}'$ de W formada por autovectores de $f|_W$. Es claro entonces que $\mathscr{B} = \{v\} \cup \mathscr{B}'$ es una base ortonormal de V formada por autovectores de f. □

Corolario 7.5. *Sea V un espacio vectorial complejo con producto interno y de dimensión finita y sea $f : V \to V$ una transformación lineal. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(*a*) *f es normal.*

(*b*) *Existe una base ortonormal $\mathscr{B}$ de V formada por autovectores de f.*

Demostración. La implicación (*a* $\Longrightarrow$ *b*) es el contenido del teorema. Veamos la recíproca. Si $\mathscr{B}$ es una base ortonormal formada por autovectores de f, entonces la matriz $[f]_{\mathscr{B}}$ es diagonal y lo mismo es cierto de la matriz $[f^*]_{\mathscr{B}} = \overline{[f]^{\mathsf{t}}_{\mathscr{B}}}$. Esto implica que $[f]_{\mathscr{B}}$ y $[f^*]_{\mathscr{B}}$ conmutan, así que f y f^* conmutan: en otras palabras, f es normal. □

ema:resolucion}

Teorema 7.6. (Teorema espectral para transformaciones normales) *Sea V un espacio vectorial complejo con productpo interno y de dimensión finita y sea $f : V \to V$ una transformación lineal normal. Sean $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ los autovalores distintos de f, y para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ sea $W_i = \ker(f - \lambda_i \mathrm{id}_V)$ y $P_i : V \to V$ el proyector ortogonal de imagen W_i. Entonces:*

(*i*) *Si $i, j \in \{1, \dots, n\}$ son distintos, entonces $W_i \perp W_j$ y $P_i P_j = 0$.*

(*ii*) *Hay una descomposición en suma directa $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_n$ y $\sum_{i=1}^n P_i = \mathrm{id}_V$.*

(*iii*) *Se tiene que $f = \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_n P_n$.*

Demostración. Si $i, j \in \{1, \dots, n\}$ y $v \in W_i \setminus 0$ y $w \in W_j \setminus 0$, entonces v y w son autovectores de f de autovalores λ_i y λ_j, que son distintos. La Proposición 7.3 nos dice entonces que $f^*(w) = \overline{\lambda}_j w$ y que, en consecuencia,

{eq:pnf}

$$\lambda_i \langle v, w \rangle = \langle f(v), w \rangle = \langle v, f^*(w) \rangle = \lambda_j \langle v, w \rangle. \tag{3}$$

Como $\lambda_i \neq \lambda_j$, esto implica que $\langle v, w \rangle = 0$. Concluimos de esta forma que $W_i \perp W_j$ y, usando la Proposición 4.4, que $P_i P_j = 0$. Más aún, de acuerdo al Teorema 7.4, hay una base de autovectores de V así que, de hecho, es $V = \bigoplus_{i=1}^n W_i$.

Sea $j \in \{1, \dots, n\}$. Es $P_i|_{W_j} = 0$ si $i \neq j$ y $P_j|_{W_j} = \mathrm{id}_{W_j}$, así que

$$\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i P_i \right) \Bigg|_{W_j} = \sum_{i=1}^n \lambda_i P_i|_{W_j} = \lambda_j \mathrm{id}_{W_j} = f|_{W_j}.$$

Como $V = \sum_{i=1}^n W_i$, esto implica que $f = \sum_{i=1}^n \lambda_i P_i$. □

{lema:eval}

Lema 7.7. *Sea V un espacio vectorial, sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ escalares y $P_1, \ldots, P_n : V \to V$ proyectores tales que $\sum_{i=1}^n P_i = \mathrm{id}_V$ y $P_i P_j = 0$ siempre que $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ son distintos. Si $f = \sum_{i=1}^n \lambda_i P_i$, entonces para cada $p \in \mathbb{K}[X]$ es*

$$p(f) = \sum_{i=1}^{n} p(\lambda_i) P_i.$$

Demostración. Ambos miembros de la igualdad que queremos probar dependen linealmente de $p \in \mathbb{K}[X]$ así que, como el conjunto $\mathscr{B} = \{X^i : i \geq 0\}$ es una base de $\mathbb{K}[X]$ como $\mathbb{K}$-espacio vectorial, basta probar el lema cuando $p = X^r$ para algún $r \in \mathbb{N}_0$.

Hacemos inducción en r. Cuando $r = 0$, de manera que $p(X) = 1$, la igualdad (3) vale porque por hipótesis es $\mathrm{id}_V = \sum_{i=1}^n P_i$. Por otro lado, si $p(X) = X^{r+1}$ es

$$p(f) = f^{r+1} = f^r f = \Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^r P_i\Big)\Big(\sum_{j=1}^{n} \lambda_i P_i\Big) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \lambda_i^r \lambda_j P_i P_j.$$

Por hipótesis, $P_i P_j = 0$ si $i \neq j$, así que

$$p(f) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^{r+1} P_i. = \sum_{i=1}^{m} p(\lambda_i) P_i.$$

Esto completa la inducción. □

Corolario 7.8. *Sea V un espacio vectorial complejo con producto interno y de dimensión finita, y sea $f : V \to V$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(*a*) *f es normal.*

(*b*) *Existe un polinomio $p \in \mathbb{C}[X]$ tal que $f^* = p(f)$.*

Demostración. (*b* $\Longrightarrow$ *a*) Si existe $p = \sum_{k=0}^r p_k X^k \in \mathbb{C}[X]$ tal que $f^* = p(f)$, entonces

$$f^* p(f) = \Big(\sum_{k=0}^{r} p_k f^k\Big) f = \sum_{k=0}^{r} p_k f^{k+1} = f\Big(\sum_{k=0}^{r} p_k f^k\Big) = f p(f) = f f^*,$$

así que f es normal.

(*a* $\Longrightarrow$ *b*) De acuerdo al Teorema 7.6, existen escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ distintos y proyectores ortogonales $P_1, \ldots, P_n : V \to V$ tales que $P_i P_j = 0$ cada vez que $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ son distintos. Consideremos el polinomio

$$p(X) = \sum_{i=1}^{n} \overline{\lambda}_i \prod_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \frac{X - \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j} \in \mathbb{C}[X].$$

Es inmediato verificar que $p(\lambda_i) = \overline{\lambda}_i$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ y entonces, de acuerdo al Lema 7.7, es

$$p(f) = \sum_{i=1}^{n} p(\lambda_i) P_i = \sum_{i=1}^{n} \overline{\lambda}_i P_i.$$

Por otro lado, como los proyectores P_i son ortogonales y, entonces, autoadjuntos, tenemos que

$$f^* = \Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} \overline{\lambda}_i P_i,$$

Así, vemos que $p(f) = f^*$. $\square$