DESARREGLOS

MARIANO SUÁREZ-ALVAREZ

1. Desarreglos clásicos

1.1. Una permutación $\pi \in S_n$ es un *desarreglo* si $\pi(i) \neq i$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. Sea $D_n \subset S_n$ el conjunto de todos los desarreglos de S_n.

1.2. Proposición. *Si $n \geq 1$, entonces*

$$|D_n| = n! \left(1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n!}\right).$$

Demostración. Sean $I = \{1, \dots, n\}$ y $L = \mathscr{P}(I)$, y consideremos sobre L el orden parcial $\subseteq$. Para cada $\pi \in S_n$, sea $I^\pi = \{i \in I : \pi(i) = i\}$. Si $X \in L$, sean

$$f(X) = |\{\pi \in S_n : X = I^\pi\}|$$

y

$$g(X) = |\{\pi \in S_n : X \subset I^\pi\}|.$$

Esto define funciones $f, g : L \to \mathbb{Z}$, y es evidente que para cada $Y \in L$ es

$$g(Y) = \sum_{Y \subseteq X} f(X). \tag{1}$$

Recordemos de [1, Chapter 3] que la función de Möbius $\mu : L \times L \to \mathbb{Z}$ de L satisface

$$\mu(X, Y) = \begin{cases} (-1)^{|Y \setminus X|}, & \text{si } X \subseteq Y; \\ 0, & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

y entonces la fórmula de inversión de Möbius junto con (1) implica que para cada $Y \in L$ es

$$f(Y) = \sum_{Y \subseteq X} (-1)^{|X \setminus Y|} g(X).$$

En particular, tomando $Y = \emptyset$ vemos que

$$|D_n| = f(\emptyset) = \sum_{X \in L} (-1)^{|X|} g(X). \tag{2}$$

Ahora bien, si $X \in L$, entonces es claro que una permutación π de I que deja fijos los elementos de X queda determinada por su restricción a $I \setminus X$, que es una biyección de este conjunto. Recíprocamente, toda permutación de $I \setminus X$ puede extenderse de manera única a un elemento de S_n que deja fijos a los elementos de X. Esto nos dice que $g(X) = |S(I \setminus X)| = (n - |X|)!$.

Agrupando los términos de la suma (2) de acuerdo al cardinal de X, vemos entonces que

$$|D_n| = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)! = n! \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{k!}. \qquad \square$$

Date: 16 de Mayo, 2008; compiled: 16 de junio de 2008.

1.3. Corolario. $\lim_{n\to\infty} \frac{|D_n|}{|S_n|} = e^{-1}$. □

Este corolario nos dice que, si n es grande, la probabilidad de que una permutación $\pi \in S_n$ mueva todos los elementos de $\{1, \dots, n\}$ es aproximadamente e^{-1}.

1.4. Sean ahora D_n^+ y D_n^- los subconjuntos de D_n formados por los desarreglos pares e impares, respectivamente.

1.5. Proposición. *Si $n \geq 1$, entonces*

$$|D_n^+| = \tfrac{1}{2}\big(|D_n| - (-1)^n(n-1)\big)$$

y

$$|D_n^-| = \tfrac{1}{2}\big(|D_n| + (-1)^n(n-1)\big)$$

Demostración. Consideremos el determinante

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}. \tag{3}$$

Restando la primera columna a todas las demás, vemos que

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

y sumando ahora a la primera fila todas las demás, que

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} n-1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}(n-1).$$

Por otro lado, si notamos (a_{ij}) a la matrix que aparece en (3), de manera que $a_{ij} = 1 - \delta_{ij}$, el desarrollo del determinante (3) es

$$\Delta_n = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) a_{1\pi(1)} \cdots a_{n\pi(n)}.$$

Los términos correspondiente a permutaciones que no son desarreglos evidentemente se anulan, así que

$$\Delta_n = \sum_{\pi \in D_n} \operatorname{sgn}(\pi) a_{1\pi(1)} \cdots a_{n\pi(n)} = |D_n^+| - |D_n^-|.$$

Luego tenemos que

$$|D_n^+| - |D_n^-| = (-1)^{n-1}(n-1)$$

y, por supuesto, que

$$|D_n^+| + |D_n^-| = |D_n|.$$

Estas dos relaciones dan inmediatamente las fórmulas del enunciado. □

2. q-Desarreglos

2.1. Sea q una variable. Si $n \geq 0$, sean

$$(n)_q = \begin{cases} 1, & \text{si } n = 0; \\ \frac{q^n-1}{q-1}, & \text{si } n > 0; \end{cases}$$

$$(n)_q! = (n)_q(n-1)_q \cdots (1)_q, \tag{4}$$

y

$$\binom{n}{k}_q = \frac{(n)_q}{(k)_q(n-k)_q}. \tag{5}$$

2.2. Proposición. (q-Pascal) *Si $0 \leq k \leq n$, es*

$$\binom{n}{k}_q = \binom{n-1}{k-1}_q + q^k\binom{n-1}{k}_q = q^{n-k}\binom{n-1}{k-1}_q + \binom{n-1}{k}_q \tag{6}$$

y

$$\binom{n}{k}_q = \binom{n}{n-k}_q. \tag{7}$$

Demostración. Ambas identidades siguen inmediatamente de un cálculo directo usando las definciones. □

2.3. Corolario. *Si $0 \leq k \leq n$, entonces $\binom{n}{k}_q$ es un polinomio en q con coeficientes enteros cuyo valor cuando $q = 1$ es $\binom{n}{k}$.*

Demostración. Es $\binom{n}{0}_q = \binom{n}{n}_q = 1$ para todo $n \geq 0$. Ambas afirmaciones siguen de ésto y de (6) vía una inducción evidente. □

2.4. Si V es un espacio vectorial, sea $\mathsf{GL}(V)$ el grupo de automorfismos de V y sea, para cada $k \in \{0, \dots, n\}$, $\binom{V}{k}$ el conjunto de los subespacios de V de dimensión k.

2.5. Proposición. *Sea $\Bbbk$ un cuerpo finito de q elementos y V un $\Bbbk$-espacio vectorial de dimensión n. Entonces V posee*

$$q^{k(k-1)/2}(q^n-1)(q^{n-1}-1)\cdots(q^{n-k+1}-1) \tag{8}$$

conjuntos ordenados linealmente independientes de k elementos. Además

$$|GL(V)| = q^{n(n-1)/2}(n)_q! \tag{9}$$

y

$$\left|\binom{V}{k}\right| = \binom{n}{k}_q. \tag{10}$$

En (9) y (10), los miembros derechos son las evaluaciones de los polinomios (4) y (5) en $q = |\Bbbk|$.

Demostración. Para contruir una secuencia de k elementos de V linealmente independientes tenemos $q^n - 1$ opciones al elegir el primer elemento, $q^n - q$ opciones al elegir el segundo y, en general, $q^n - q^{i-1}$ opciones al elegir el i-ésimo. La fórmula (8) sigue inmediatamente de esto, ya que

$$\begin{aligned}(q^n-1)(q^n-q)\cdots(q^n-q^{k-1}) \\ &= q^{0+1+\cdots+(k-1)}(q^n-1)(q^{n-1}-1)\cdots(q^{n-k+1}-1) \\ &= q^{k(k-1)/2}(q^n-1)(q^{n-1}-1)\cdots(q^{n-k+1}-1),\end{aligned}$$

y tomando $k = n$ obtenemos también (9).

Sabemos ya que hay $q^{k(k-1)/2}(q^n-1)(q^{n-1}-1)\cdots(q^{n-k+1}-1)$ secuencias de k elementos de V linealmente independientes y cada subespacio de dimensión k de V tiene $q^{k(k-1)/2}(k)_q!$ bases, vemos que

$$\left|\binom{V}{k}\right| = \frac{(q^n-1)(q^{n-1}-1)\cdots(q^{n-k+1}-1)}{(k)_q!} = \frac{(n)_q!}{(k)_q!(n-k)_q!} = \binom{n}{k}_q. \square$$

2.6. Si V es un espacio vectorial y $g \in \mathsf{GL}(V)$, escribimos $V^g = \{v \in V : gv = v\}$ y decimos que g es un *desarreglo* si $V^g = 0$. Notemos $D(V) \subseteq \mathsf{GL}(V)$ al conjunto de desarreglos de V.

2.7. Proposición. *Sea $\Bbbk$ un cuerpo finito de q elementos y sea V un $\Bbbk$-espacio vectorial de dimensión n. Entonces*

$$|D(V)| = q^{n(n-1)/2}(n)_q! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(k)_q!}.$$

Demostración. Sea L el conjunto de todos los subespacios vectoriales de V ordenados por inclusión. Entonces la función de Möbius $\mu : L \times L \to L$ de L es

$$\mu(X, Y) = \begin{cases} (-1)^k q^{k(k-1)/2}, & \text{si } X \subseteq Y \text{ y } k = \dim Y - \dim X; \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Sean $f, g : L \to \mathbb{Z}$ dadas, para $X \in L$, por

$$f(X) = |\{g \in \mathsf{GL}(V) : X = V^g\}|$$

y

$$g(X) = |\{g \in \mathsf{GL}(V) : X \subseteq V^g\}|$$

Es claro que

$$g(Y) = \sum_{Y \subseteq X} f(X)$$

para todo $Y \in L$, de manera que

$$f(Y) = \sum_{Y \subseteq X} \mu(Y, X) g(X).$$

En particular,

$$|D(V)| = f(0) = \sum_{X \in L} \mu(0, X) g(X) \tag{11}$$

Sea $X \in L$ de dimensión k y sea $\mathscr{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V tal que $\{v_1, \dots, v_k\}$ es una base de X. La matriz con respecto a $\mathscr{B}$ de todo elemento $g \in \mathsf{GL}(V)$ tal que $X \subseteq V^g$ tiene forma

$$\begin{pmatrix} I_k & B \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

con $A \in \mathsf{GL}_{n-k}(\Bbbk)$ y $B \in \mathsf{M}_{k,n-k}(\Bbbk)$. Recíprocamente, toda tal matriz deja fijo a X punto a punto. Esto nos dice que

$$g(X) = q^{k(n-k)} q^{(n-k)(n-k-1)/2}(n-k)_q! = q^{n(n-1)/2 - k(k-1)/2}(n-k)_q!$$

y entonces de (11) vemos que

$$\begin{aligned} |D(V)| &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}_q (-1)^k q^{k(k-1)/2} q^{n(n-1)/2 - k(k-1)/2}(n-k)_q! \\ &= q^{n(n-1)/2}(n)_q! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(k)_q!}. \end{aligned}$$ $\square$

2.8. Definimos la *función q-exponencial* poniendo

$$\mathsf{exp}_q(z) = \sum_{k \geq 0} \frac{z^n}{(n)_q!}.$$

2.9. Corolario. $\mathsf{lim}_{n\to\infty} \frac{|D(\Bbbk^n)|}{|\mathsf{GL}(\Bbbk^n)|} = \mathsf{exp}_q(-1)$.

Demostración. Esto sigue inmediatamente de (9) y 2.7. □

Referencias

[1] R. P. Stanley, *Enumerative combinatorics. Vol. 1*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 49, Cambridge University Press, Cambridge, 1997. MR1442260 (98a:05001) ↑1

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires, Ciudad Universitaria, Pabellón I, Buenos Aires (1428) Argentina.
E-mail address: mariano@dm.uba.ar