DESARREGLOS

MARIANO SUÁREZ-ALVAREZ

1. Desarreglos clásicos

1.1. Una permutación $\pi \in S_n$ es un *desarreglo* si $\pi(i) \neq i$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. Sea $D_n \subset S_n$ el conjunto de todos los desarreglos de S_n.

1.2. Proposición. *Si $n \geq 1$, entonces*

$$|D_n| = n! \left(1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n!} \right).$$

Demostración. Sean $I = \{1, \dots, n\}$ y $L = \mathscr{P}(I)$, y consideremos sobre L el orden parcial $\subseteq$. Para cada $\pi \in S_n$, sea $I^\pi = \{i \in I : \pi(i) = i\}$. Si $X \in L$, sean

$$f(X) = |\{\pi \in S_n : X = I^\pi\}|$$

y

$$g(X) = |\{\pi \in S_n : X \subset I^\pi\}|.$$

Esto define funciones $f, g : L \to \mathbb{Z}$, y es evidente que para cada $Y \in L$ es

$$g(Y) = \sum_{Y \subseteq X} f(X). \tag{1}$$

Recordemos de [1, Chapter 3] que la función de Möbius $\mu : L \times L \to \mathbb{Z}$ de L satisface

$$\mu(X, Y) = \begin{cases} (-1)^{|Y \setminus X|}, & \text{si } X \subseteq Y; \\ 0, & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

y entonces la fórmula de inversión de Möbius junto con (1) implica que para cada $Y \in L$ es

$$f(Y) = \sum_{Y \subseteq X} (-1)^{|X \setminus Y|} g(X).$$

En particular, tomando $Y = \emptyset$ vemos que

$$|D_n| = f(\emptyset) = \sum_{X \in L} (-1)^{|X|} g(X). \tag{2}$$

Ahora bien, si $X \in L$, entonces es claro que una permutación π de I que deja fijos los elementos de X queda determinada por su restricción a $I \setminus X$, que es una biyección de este conjunto. Recíprocamente, toda permutación de $I \setminus X$ puede extenderse de manera única a un elemento de S_n que deja fijos a los elementos de X. Esto nos dice que $g(X) = |S(I \setminus X)| = (n - |X|)!$.

Agrupando los términos de la suma (2) de acuerdo al cardinal de X, vemos entonces que

$$|D_n| = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)! = n! \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{k!}. \qquad \square$$

Date: 16 de Mayo, 2008; compiled: 14 de mayo de 2015.

1.3. Corolario. $\lim_{n\to\infty} \frac{|D_n|}{|S_n|} = e^{-1}$. □

Este corolario nos dice que, si n es grande, la probabilidad de que una permutación $\pi \in S_n$ mueva todos los elementos de $\{1, \dots, n\}$ es aproximadamente e^{-1}.

1.4. Sean ahora D_n^+ y D_n^- los subconjuntos de D_n formados por los desarreglos pares e impares, respectivamente.

1.5. Proposición. *Si $n \geq 1$, entonces*

$$|D_n^+| = \tfrac{1}{2}\big(|D_n| - (-1)^n(n-1)\big)$$

y

$$|D_n^-| = \tfrac{1}{2}\big(|D_n| + (-1)^n(n-1)\big)$$

Demostración. Consideremos el determinante

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}. \tag{3}$$

Restando la primera columna a todas las demás, vemos que

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

y sumando ahora a la primera fila todas las demás, que

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} n-1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}(n-1).$$

Por otro lado, si notamos (a_{ij}) a la matrix que aparece en (3), de manera que $a_{ij} = 1 - \delta_{ij}$, el desarrollo del determinante (3) es

$$\Delta_n = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) a_{1\pi(1)} \cdots a_{n\pi(n)}.$$

Los términos correspondiente a permutaciones que no son desarreglos evidentemente se anulan, así que

$$\Delta_n = \sum_{\pi \in D_n} \operatorname{sgn}(\pi) a_{1\pi(1)} \cdots a_{n\pi(n)} = |D_n^+| - |D_n^-|.$$

Luego tenemos que

$$|D_n^+| - |D_n^-| = (-1)^{n-1}(n-1)$$

y, por supuesto, que

$$|D_n^+| + |D_n^-| = |D_n|.$$

Estas dos relaciones dan inmediatamente las fórmulas del enunciado. □

Referencias

[1] R. P. Stanley, *Enumerative combinatorics. Vol. 1*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 49, Cambridge University Press, Cambridge, 1997. MR1442260 (98a:05001) ↑1

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires, Ciudad Universitaria, Pabellón I, Buenos Aires (1428) Argentina.

E-mail address: `mariano@dm.uba.ar`