DERIVACIONES

MARIANO SUÁREZ-ALVAREZ

1. Derivaciones

1.1. Sean A una k-álgebra y $\sigma : A \to A$ un endomorfismo de álgebras. Sea M un A-bimódulo. Una *σ-derivación* con valores en M es una aplicación k-lineal $\delta : A \to M$ tal que

$$\delta(ab) = \delta(a)\sigma(b) + a\delta(b), \qquad \forall\, a, b \in A. \tag{1}$$

Si $\sigma = \mathsf{id}_A$, decimos que δ es una *derivación*.

1.2. Sea $\delta : A \to M$ es una aplicación k-lineal y sea $\mathscr{B}$ una base de A. Si es

$$\delta(ab) = \delta(a)\sigma(b) + a\delta(b), \qquad \forall\, a, b \in \mathscr{B},$$

entonces δ es una σ-derivación.

1.3. Escribimos $\mathsf{Der}_\sigma(A, M)$ al conjunto de todas las σ-derivaciones con valores en M. Cuando el A-bimódulo M es el bimódulo regular A, escribimos $\mathsf{Der}_\sigma(A)$ en lugar de $\mathsf{Der}_\sigma(A, A)$. De manera similar, si $\sigma = \mathsf{id}_A$, escribimos $\mathsf{Der}(A, M)$ en lugar de $\mathsf{Der}_{\mathsf{id}_A}(A, M)$.

1.4. Si M es un A-bimódulo, notamos M_σ al A-bimódulo que como A-módulo a izquierda coincide con M y sobre el que A actúa a derecha de forma que

$$m \cdot a = m\sigma(a)$$

para todo $m \in M$ y todo $a \in A$.

1.5. Lema. *Cualquiera sea el A-bimódulo M, es $\mathsf{Der}_\sigma(A, M) = \mathsf{Der}(A, M_\sigma)$.* □

Este lema nos permite concentrarnos en las derivaciones, ya que el caso más general de las σ-derivaciones se reduce al de las derivaciones la mayor parte de las veces.

1.6. Lema. *Sea $\delta \in \mathsf{Der}(A, M)$. Entonces $\delta(1) = 0$ y, si $a \in A$, es*

$$\delta(a^n) = \sum_{i=0}^{n-1} a^i \delta(a) a^{n-i-1}$$

para todo $n \geq 0$.

Demostración. La primera afirmación es consecuencia de que

$$\delta(1) = \delta(1 \cdot 1) = \delta(1)1 + 1\delta(1) = 2\delta(1).$$

La segunda sigue por inducción a partir de (1). □

1.7. Lema. *Sea $\delta \in \mathsf{Der}(A)$. Entonces si $a, b \in A$ y $n \geq 0$, es*

$$\delta^n(ab) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \delta^i(a)\delta^{n-i}(b).$$

Demostración. El resultado sigue por una inducción evidente. □

Date: 26 de mayo, 2007.

1.8. Es fácil ver que $\mathsf{Der}(A,M)$ es un subespacio vectorial de $\mathsf{hom}_k(A,M)$. Más generalmente, si $\mathsf{Z}(A)$ es el centro de A, entonces $\mathsf{Der}(A,M)$ resulta un $\mathsf{Z}(A)$-módulo a izquierda si definimos, para $z \in \mathsf{Z}(A)$ y $\delta \in \mathsf{Der}(A)$, $z \cdot \delta : A \to M$ poniendo

$$(z\cdot\delta)(a) = z\delta(a), \qquad \forall a \in A.$$

1.9. Si $f : M \to M'$ es un morfismo de A-bimódulos, hay una aplicación

$$f_* : \delta \in \mathsf{Der}(A,M) \mapsto f \circ \delta \in \mathsf{Der}(A,M').$$

Es claro que si $g : M' \to M''$ es otro morfismo de A-módulos, entonces $(gf)_* = g_* f_*$. Además $(\mathsf{id}_M)_* = \mathsf{id}_{\mathsf{Der}(A,M)}$ para todo A-módulo M.

1.10. Si A es una k-álgebra y a, $b \in A$, escribimos

$$[a,b] = ab - ba.$$

Más generalmente, si M es un A-bimódulo y $m \in M$ y $a \in A$, escribimos

$$[a,m] = am - ma.$$

1.11. Lema. *Sea A una k-álgebra. Consideremos además un A-bimódulo M. Si $m \in M$, la aplicación $\iota_m : a \in A \mapsto [a,m] \in M$ es una derivación con valores en M. Además, la aplicación $\iota_M : m \in M \mapsto \iota_m \in \mathsf{Der}(A,M)$ es un morfismo de espacios vectoriales.*

Demostración. El lema sigue de un cálculo directo. □

1.12. Escribimos $\mathsf{InnDer}(A,M) = \mathsf{im}\,\iota_M$. Por supuesto, se trata de un subespacio de $\mathsf{Der}(A,M)$. Escribimos

$$H^1(A,M) = \mathsf{Der}(A,M)/\,\mathsf{InnDer}(A,M).$$

A veces escribimos también $\mathsf{OutDer}(A,M)$ en lugar de $H^1(A,M)$. Si $M = A$, escribimos $HH^1(A)$ en lugar de $H^1(A,A)$.

Los elementos de $\mathsf{InnDer}(A,M)$ son las *derivaciones interiores*. Abusando un poco del lenguaje, llamamos a $H^1(A,M)$ el espacio de *derivaciones exteriores*.

1.13. Si el A-módulo es simétrico, esto es, si $am = ma$ para todo $a \in A$ y todo $m \in M$, es claro que $\mathsf{InnDer}(A,M) = 0$. En particular, si A es es un álgebra conmutativa, es $HH^1(A) = \mathsf{Der}(A)$.

1.14. Escribimos $M^A = \ker \iota_M = \{m \in M : am = ma, \quad \forall\, a \in A\}$. Se trata de un sub-$\mathsf{Z}(A)$-módulo de M. En vista de las definiciones, hay una sucesión exacta de $\mathsf{Z}(A)$-módulos

$$0 \longrightarrow M^A \hookrightarrow M \xrightarrow{\iota_M} \mathsf{Der}(A,M) \longrightarrow H^1(A,M) \longrightarrow 0$$

1.15. Sea $f : M \to M'$ un morfismo de A-bimódulos. Es claro que $f(M^A) \subset M'^A$, de manera que restringiendo f obtenemos un morfismo de $\mathsf{Z}(A)$-módulos $f_* : M^A \to M'^A$. Conmuta el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M^A \arrow[r, hook] \arrow[d, "f_*"'] & M \arrow[r, "\iota_M"] \arrow[d, "f"'] & \mathsf{Der}(A,M) \arrow[r] \arrow[d, "f_*"] & H^1(A,M) \arrow[r] \arrow[d, dotted, "f_*"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M'^A \arrow[r, hook] & M' \arrow[r, "\iota_{M'}"] & \mathsf{Der}(A,M') \arrow[r] & H^1(A,M') \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Esto implica que existe un morfismo de $\mathsf{Z}(A)$-módulos unívocamente determinado $f_* : H^1(A,M) \to H^1(A,M')$ que completa el diagrama preservando la conmutatividad.

2. Ejemplos

2.1. Secciones de una extensión trivial.

2.1.1. Sea A una k-álgebra y M un A-bimódulo. Dotamos al espacio vectorial $A \oplus M$ de un producto $\cdot$ tal que

$$(a, m) \cdot (a', m') = (aa', am' + ma')$$

para todo (a, m), $(a', m') \in A \oplus M$. Es fácil ver que este producto hace de $A \oplus M$ una k-álgebra, a la que llamamos la *extensión trivial de A por M*.

Notemos que la proyección canónica $p : A \oplus M \to A$ es un morfismo de álgebras.

2.1.2. Proposición. *Sea A una k-álgebra y M un A-bimódulo. Sea*

$$\Sigma(A, M) = \{s \in \mathsf{hom}_{\mathsf{Alg}}(A, A \oplus M) : ps = \mathsf{id}_A\}$$

el conjunto de secciones de p. Entonces hay una biyección $\Sigma(A, M) \cong \mathsf{Der}(A, M)$.

Demostración. Si $s : A \to A \oplus M$ es un morfismo de álgebras tal que $ps = \mathsf{id}_A$, entonces es claro que existe una aplicación $\delta_s : A \to M$ tal que $s(a) = (a, \delta_s(a))$ para todo $a \in A$. Necesariamente δ_s es k-lineal y, como

$$\begin{aligned}(ab, a\delta_s(b) + \delta_s(a)b) &= (a, \delta_s(a))(b, \delta_s(b)) \\ &= s(a)s(b) \\ &= s(ab) \\ &= (ab, \delta_s(ab)),\end{aligned}$$

vemos que δ_s es una derivación.

Esto nos permite definir una aplicación $s \in \Sigma(A, M) \mapsto \delta_s \in \mathsf{Der}(A, M)$. Dejamos al lector la fácil tarea de verificar que se trata de una biyección. □

2.2. Extensiones de bimódulos.

2.2.1. Sea M un A-bimódulo. Una *extensión de A-bimódulos* de A por M es una sucesión exacta corta

$$\mathscr{E} : \qquad 0 \longrightarrow M \longrightarrow E \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

de A-bimódulos. Cuando no dé lugar a confusiones, diremos simplemente que $\mathscr{E}$ es una *extensión*.

2.2.2. Si

$$\mathscr{E} : \qquad 0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} A \longrightarrow 0 \tag{2}$$

y

$$\mathscr{E}' : \qquad 0 \longrightarrow M \xrightarrow{f'} E' \xrightarrow{g'} A \longrightarrow 0 \tag{3}$$

son dos extensiones de A-bimódulos, decimos que $\mathscr{E}$ y $\mathscr{E}'$ son congruentes si existe un morfismo de A-bimódulos $\phi : E \to E'$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] & E \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\phi"] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "f'"] & E' \arrow[r, "g'"] & A \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \tag{4}$$

conmuta. Escribimos $\mathscr{E} \cong \mathscr{E}'$ cuando $\mathscr{E}$ y $\mathscr{E}'$ son congruentes.

2.2.3. Proposición. *La relación de congruencia de extensiones es una relación de equivalencia.*

Demostración. Si (2) y (3) son extensiones y $\phi : E \to E'$ es un morfismo de A-bimódulos tal que (4) conmuta, el lema de los 5 implica que ϕ es un isomorfismo. Usando esto es claro que la relación de congruencia es simétrica. La reflexividad y la transtividad son inmediatas. □

2.2.4. Escribimos $\mathsf{Ext}^1_{A\text{-}A}(A, M)$ al conjunto de clases de congruencia de extensiones de A por M.

2.2.5. Consideremos una extensión

$$\mathscr{E}: \qquad 0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} A \longrightarrow 0$$

Existe un morfismo de espacios vectoriales $s : A \to E$ tal que $gs = \mathsf{id}_A$. Por su parte, s determina un morfismo de espacios vectoriales $r : E \to M$ tal que $\mathsf{id}_E = fr + sg$ y $rf = \mathsf{id}_M$.

Entonces $\phi_s = \left(\begin{smallmatrix} g \\ r \end{smallmatrix}\right) : E \to A \oplus M$ es un isomorfismo de espacios vectoriales tal que conmuta el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] & E \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\phi_s"] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "\binom{0}{1}"] & A \oplus M \arrow[r, "(1\,0)"] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Además, hay una única estructura de A-bimódulo sobre $A \oplus M$ que hace que ϕ_s sea un isomorfismo de A-bimódulos. Con esta estructura, la fila inferior de este diagrama resulta una extensión $\mathscr{E}'$ que es congruente a $\mathscr{E}$.

Definamos

$$\alpha_s : (a, x, b) \in A \times A \times A \mapsto r(as(x)b) \in M.$$

Claramente α_s es k-trilineal. Es fácil ver que la estructura de A-bimódulo de $A \oplus M$ está dada por

$$a \cdot (x, m) \cdot b = (axb,\ \alpha_s(a, x, b) + amb)$$

para todo $(x, m) \in A \oplus M$ y a, $b \in A$. La asociatividad de esta acción implica que si a, a', b y $b' \in A$ y $(x, m) \in A \oplus M$, entonces

$$\begin{aligned}
(aa'xb'b,\ \alpha_s(aa', x, b'b) + aamb'b) &= (aa') \cdot (x, m) \cdot (b'b) \\
&= a \cdot (a' \cdot (x, m) \cdot b') \cdot b \\
&= a \cdot (a'xb',\ \alpha_s(a', x, b') + a'mb') \cdot b \\
&= (aa'xb'b,\ \alpha_s(a, a'xb', b) + a\alpha_s(a', x, b')b + aa'mb'b)
\end{aligned}$$

de manera que

$$\alpha_s(aa', x, b'b) = \alpha_s(a, a'xb', b) + a\alpha_s(a', x, b')b \tag{5}$$

para cada x, a, a', b y $b' \in A$. Sea $\delta_s : A \to M$ dada por

$$\delta_s(a) = \alpha_s(a, 1, 1) - \alpha_s(1, 1, a)$$

para todo $a \in A$. Usando (5) es fácil ver que $\delta_s \in \mathsf{Der}(A, M)$.

2.2.6. Supongamos ahora que $s' : A \to E$ es otro morfismo de espacios vectoriales tal que $gs' = \mathsf{id}_A$.

Si $a \in A$, entonces $g(s(a) - s'(a)) = 0$, así que existe un único elemento $u(a) \in M$ tal que $s(a) - s'(a) = f(u(a))$. Esto define una aplicación $u : A \to M$. Usando la unicidad, es fácil ver que se trata de un morfismo de espacios vectoriales. Notemos que $s' = s - fu$.

Pongamos $r' = r + ug$. Entonces

$$fr' + s'g = fr + fug + sg - fug = fr + sg = \mathsf{id}_E$$

y

$$r'f = rf + ufg = rf = \mathsf{id}_M.$$

Luego $\alpha_{s'} : A \times A \times A \to M$ está dada por

$$\begin{aligned}\alpha_{s'}(a,x,b) &= r'(as'(x)b)\\ &= r(as(x)b) - r(af(u(x))b) + u(g(as(x)b)) - u(g(af(u(x))b))\\ &= \alpha_s(a,x,b) - r(af(u(x))b) + u(g(as(x)b)),\end{aligned}$$

porque $u(g(af(u(x))b)) = u(g(f(au(x)b))) = 0$. Usando esta fórmula, vemos que $\delta_{s'} : A \to M$ es tal que

$$\begin{aligned}\delta_{s'}(a) &= \alpha_{s'}(a,1,1) - \alpha_{s'}(1,1,a)\\ &= \alpha_s(a,1,1) - r(af(u(1))) + u(g(as(1)))\\ &\qquad - \alpha_s(1,1,a) + r(f(u(1))a) - u(g(s(1)a))\\ &= \delta_s(a) - r(f(au(1) - u(1)a)) + u(ag(s(1)) - u(g(s(1))a)\end{aligned}$$

y como $rf = \mathsf{id}_M$ y $gs = \mathsf{id}_A$, esto es

$$= \delta_s(a) + [u(1), a].$$

Vemos que $\delta_{s'} - \delta_s = [u(1), -] \in \mathsf{InnDer}(A, M)$ y que, en particular, en $H^1(A, M)$ es $[\delta_s] = [\delta_{s'}]$.

Esto muestra que la clase $[\delta_s] \in H^1(A, M)$ depende únicamente de la extensión de partida $\mathscr{E}$ y no de la sección $s : A \to E$ elegida para construir δ_s. Llamamos a $[\delta_s]$ la *clase característica* de la extensión $\mathscr{E}$ en $H^1(A, M)$ y la notamos $\mathsf{ch}(\mathscr{E})$.

2.2.7. Consideremos extensiones de A-bimódulos

$$\mathscr{E} : \qquad 0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} A \longrightarrow 0$$

y

$$\mathscr{E}' : \qquad 0 \longrightarrow M \xrightarrow{f'} E' \xrightarrow{g'} A \longrightarrow 0$$

y supongamos que son congruentes, de manera que existe un isomorfismo de A-bimódulos $\phi : E \to E'$ tal que conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] & E \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\phi"] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "f'"] & E' \arrow[r, "g'"] & A \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Sea $s : A \to E$ un morfismo de espacios vectoriales tal que $gs = \mathsf{id}_A$ y sea $r : E \to M$ el morfismo de espacios vectoriales determinado por s tal que $\mathsf{id}_E = fr + sg$ y $rf = \mathsf{id}_M$.

Pongamos $s' = \phi s : A \to E'$ y $r' = r\phi^{-1} : E \to M$. Entonces es inmediato que $g's' = \mathrm{id}_A$, $\mathrm{id}_{E'} = f'r' + s'g'$ y $r'f' = \mathrm{id}_M$. Como ϕ es un morfismo de A-bimódulos, es

$$\alpha_{s'}(a,x,b) = r'(as'(x)b) = r(\phi^{-1}(a\phi(s(x))b)) = r(as(x)b) = \alpha_s(a,x,b),$$

así que, por supuesto, $\delta_s = \delta_{s'}$ y, en consecuencia, $\mathrm{ch}(\mathscr{E}) = \mathrm{ch}(\mathscr{E}')$. Vemos así que la clase característica de una extensión depende únicamente de su clase de congruencia.

2.2.8. Teorema. *Sea A una k-álgebra y M un A-bimódulo. Entonces tomar clases características de clases de congruencia de extensiones determina una biyección*

$$\mathrm{ch} : \mathrm{Ext}^1_{A\text{-}A}(A,M) \to H^1(A,M).$$

Demostración. Que la aplicación ch del enunciado está bien definida es consecuencia de **2.2.6** y **2.2.7**. Para ver que se trata de una biyección construiremos una aplicación inversa $\Phi : H^1(A,M) \to \mathrm{Ext}^1_{A\text{-}A}(A,M)$.

Sea $\delta \in \mathrm{Der}(A,M)$. Definimos $\alpha : A \times A \times A \to M$ poniendo

$$\alpha(a,x,b) = \delta(a)xb$$

para todo a, x, $b \in A$. Es fácil ver que

$$\alpha(aa',x,b'b) = \alpha(a,a'xb',b) + a\alpha(a',x,b')b \tag{6}$$

para todo a, a', b, b', $x \in A$. Notemos ademas que $\alpha(1,x,b) = 0$ cualesquiera sean x, $b \in A$.

Consideremos sobre el espacio vectorial $A \oplus M$ acciones a izquierda y a derecha de A definidas por

$$a \cdot (x,m) = (ax, \alpha(a,x,1) + am)$$

y

$$(x,m) \cdot b = (xb, mb),$$

respectivamente, si a, $b \in A$ y $(x,m) \in A \oplus M$. Es fácil ver que esto hace de $A \oplus M$ un A-bimódulo: la asociatividad de la acción a izquierda es consecuencia directa de (6) y para ver que las acciones a derecha e izquierda conmutan, calculamos que por un lado es

$$(a \cdot (x,m)) \cdot b = (axb,\ \alpha(a,x,1)b + amb)$$

y por el otro

$$a \cdot ((x,m) \cdot b) = (axb, \alpha(a,xb,1), amb)$$

y observamos que, en vista de (6), es

$$\begin{aligned}
&\alpha(a,x,1)b - \alpha(a,xb,1) \\
&\qquad = \big(\alpha(a,x,1)b - \alpha(a,x,b) + \alpha(1,ax,b)\big) \\
&\qquad\qquad\qquad - \big(a\alpha(1,x,b) - \alpha(a,x,b) + \alpha(a,xb,1)\big) \\
&\qquad = 0
\end{aligned}$$

porque $\alpha(1,ax,b) = a\alpha(1,xb) = 0$. Notamos $A \oplus_\delta M$ al A-bimódulo resultante.

Sabiendo que $A \oplus M$ con esta estructura es un A-bimódulo, es fácil verificar que obtenemos una extensión $\mathscr{E}_\delta$:

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f=\binom{0}{1}} A \oplus_\delta M \xrightarrow{g=(1\,0)} A \longrightarrow 0$$

Sea $u : A \to M$ una derivación interior, de manera que existe $u_0 \in M$ tal que $u(a) = au_0 - u_0 a$ para todo $a \in A$ y sea $\delta' = \delta + s$. Entonces hay un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "\binom{0}{1}"] \arrow[d, equal] & A \oplus_\delta M \arrow[r, "(1\,0)"] \arrow[d, "\phi"] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "\binom{0}{1}"] & A \oplus_{\delta'} M \arrow[r, "(1\,0)"] & A \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

en el que el morfismo $\phi : A \oplus_\delta M \to A \oplus_{\delta'} M$ es tal que

$$\phi(x, m) = (x, u(x) + m)$$

para todo $(x, m) \in A \oplus_\delta M$. Dejamos al lector la tarea de verificar que se trata en efecto de un morfismo de A-bimódulos.

Esto nos dice que la clase de congruencia de la extensión $\mathscr{E}_\delta$ depende únicamente de la clase de δ en $H^1(A, M)$. Podemos entonces definir una aplicación

$$\Phi : [\delta] \in H^1(A, M) \mapsto [\mathscr{E}_\delta] \in \mathsf{Ext}^1_{A\text{-}A}(A, M).$$

Sea otra vez $\delta \in \mathsf{Der}(A, M)$ y consideremos la extensión $\mathscr{E}_\delta$. Es fácil ver que las aplicaciones $s = \binom{1}{0} : A \to A \oplus M$ y $r = (0\,1) : A \oplus M \to M$ son tales que $gs = \mathsf{id}_A$, $fr + sg = \mathsf{id}_{A\oplus M}$ y $rf = \mathsf{id}_M$. Usándolas para calcular $\partial(\mathscr{E}_\delta)$ como en **2.2.5**, vemos que $\alpha_s : A \times A \times A \to M$ es tal que $\alpha_s = \alpha$. Esto implica que

$$\delta_s(a) = \alpha_s(a, 1, 1) - \alpha_s(1, 1, a) = \delta(a) - \delta(1)a = \delta(a)$$

cualquiera sea $a \in A$. Así, vemos que $\delta_s = \delta$ y que $\mathsf{ch}([\mathscr{E}_\delta]) = [\delta]$ en $H^1(A, M)$. Concluímos que $\mathsf{ch} \circ \Phi = \mathsf{id}_{H^1(A,M)}$.

Para terminar la prueba, hay que mostrar que $\Phi \circ \mathsf{ch} = \mathsf{id}_{\mathsf{Ext}^1_{A\text{-}A}(A,M)}$. Dejamos esto al lector. □

2.3. Automorfismos y derivaciones.

2.3.1. Supongamos que $k = \mathbb{R}$ o $k = \mathbb{C}$ y sea A una k-álgebra de dimensión finita. Sea $\varepsilon > 0$ y sea $I_\varepsilon = \{x \in k : |x| < \varepsilon\}$.

2.3.2. Consideremos una aplicación $\phi : t \in I_\varepsilon \mapsto \phi_t \in \mathsf{Aut}(A)$ tal que $\phi_0 = \mathsf{id}_A$ y supongamos que ϕ es diferenciable. Notemos que esto tiene sentido, porque $\mathsf{Aut}_{\mathsf{Alg}}(A) \subset \mathsf{End}_k(A)$ y $\mathsf{End}_k(A)$ es un k-espacio vectorial de dimensión finita.

La hipótesis de diferenciabilidad implica claramente que podemos definir una aplicación

$$\delta_\phi : a \in A \mapsto \lim_{t\to 0} \frac{\phi_t(a) - a}{t} \in A.$$

Es inmediato que se trata de una aplicación k-lineal. Más aún, es una derivación: si $a, b \in A$ y $t \in I_\varepsilon \setminus 0$, entonces

$$\frac{\phi_t(ab) - ab}{t} = \frac{\phi_t(a) - a}{t}\,\phi_t(b) + a\,\frac{\phi_t(b) - b}{t}$$

así que

$$\delta_\phi(ab) = \lim_{t\to 0} \frac{\phi_t(ab) - ab}{t} = \delta_\phi(a)b + a\delta_\phi(b)$$

porque el producto de A es una aplicación continua y $\lim_{t\to 0} \phi_t(b) = b$.

2.3.3. Recíprocamente, consideremos una derivación $\delta \in \mathsf{Der}(A)$ y $t \in k$. Podemos definir un endomorfismo

$$\phi_t^\delta = \sum_{n\geq 0} \frac{t^n}{n!}\,\delta^n \in \mathsf{End}_k(A)$$

porque la serie converge absolutamente. Como $\delta(1) = 0$, es claro que $\phi_t(1) = 1$. Por otro lado, si a, $b \in A$ entonces, como las series convergen absolutamente, es

$$\begin{aligned}
\phi_t^\delta(a)\phi_t^\delta(b) &= \sum_{n\geq 0} \frac{t^n}{n!}\,\delta^n(a) \sum_{m\geq 0} \frac{t^m}{m!}\,\delta^m(b) = \sum_{l\geq 0} \sum_{\substack{n,m\geq 0\\ l=n+m}} \frac{t^n}{n!}\,\delta^n(a)\,\frac{t^m}{m!}\,\delta^m(b)\\
&= \sum_{l\geq 0} \frac{t^l}{l!} \sum_{i=0}^{l} \binom{l}{i} \delta^i(a)\delta^{l-i}(b) = \sum_{l\geq 0}\sum_{i=0}^{l} \frac{t^l}{l!}\,\delta^l(ab)\\
&= \phi_t^\delta(ab).
\end{aligned}$$

Vemos así que $\phi_t^\delta \in \mathsf{Aut}_{\mathsf{Alg}}(A)$. Notemos que $\phi_0^\delta = \mathsf{id}_A$.

Esto nos permite definir una aplicación $\phi^\delta : t \in k \mapsto \phi_t^\delta \in \mathsf{Aut}_{\mathsf{Alg}}(A)$. Se trata claramente de una función derivable. Más aún, no es dificil mostrar que se trata de un morfismo de grupos, si dotamos a k de su estructura de grupo aditivo.

2.3.4. En término de estas construcciones, podemos dar una interpretación para el espacio vectorial $\mathsf{Der}(A)$:

Proposición. *Consideremos el conjunto*

$$\Phi(A) = \{\phi : k \to \mathsf{Aut}_{\mathsf{Alg}}(A) : \phi \textit{ es un morfismo de grupos diferenciable}\}.$$

Entonces la aplicación $d : \phi \in \Phi(A) \mapsto \delta_\phi \in \mathsf{Der}(A)$ *es una biyección.*

Demostración. Consideremos la aplicación $e : \delta \in \mathsf{Der}(A) \mapsto \phi^\delta \in \Phi(A)$ construida arriba. Queremos mostrar que se trata de la inversa de d.

Si $\delta \in \mathsf{Der}(A)$, entonces

$$e(\delta) : t \in k \mapsto \sum_{n\geq 0} \frac{t^n}{n!}\delta^n \in \mathsf{Aut}_{\mathsf{Alg}}(A),$$

así que es evidente que $d(e(\delta)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} e(\delta)(t)\big|_{t=0} = \delta$. Para ver que $e \circ d = \mathsf{id}_{\Phi(A)}$ vamos a mostrar que si $\phi \in \Phi(A)$ y $\delta = d(\phi) \in \mathsf{Der}(A)$, entonces tanto ϕ como $e(\delta)$ son soluciones al siguiente problema de valores iniciales

$$\begin{cases} f' = f\delta,\\ f(0) = \mathsf{id}_A, \end{cases}$$

para funciones $f : k \to \mathsf{End}_k(A)$ diferenciables. Esto implicará que $\phi = e(\delta)$ por el teorema de unicidad de soluciones para este tipo de problemas.

Lo único que no es inmediato es que ϕ satisface la ecuación diferencial. Para verlo, sean $t_0 \in k$ y $a \in A$. Calculamos que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi_t(a)\Big|_{t_0} = \lim_{h\to 0} \frac{\phi_{t_0+h}(a) - \phi_{t_0}(a)}{h} = \phi_{t_0}(a)\, \lim_{h\to 0}\frac{\phi_h(a) - a}{h} = \phi_{t_0}(a)\,\delta(a),$$

así que $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi_t\big|_{t_0} = \phi_t\,\delta$, como queríamos. □

2.3.5. Las derivaciones interiores corresponden, bajo la biyección de la proposición, a las familias de automorfismos interiores:

Proposición. *Si $\phi \in \Phi(A)$ es tal que $d(\phi) \in \mathsf{InnDer}(A)$, entonces existe una función diferenciable $\alpha : k \to A$ tal que $\alpha(t)$ es inversible para cada $t \in k$ y*

$$\phi_t(a) = \alpha_t\, a\, \alpha_t^{-1}.$$

Demostración. Escribamos $\delta = d(\phi)$. Por hipótesis, existe $a_0 \in A$ tal que $\delta(a) = [a_0, a]$ para todo $a \in A$. Consideremos la función $\alpha : k \to A$ tal que

$$\alpha_t = \sum_{n\geq 0} \frac{t^n}{n!} a_0^n;$$

notemos que esto converge absolutamente. Es claro que α es una función diferenciable. Más aún, se puede ver sin dificultad que $\alpha_0 = \mathsf{id}_A$ y que $\alpha_s \alpha_t = \alpha_{s+t}$ para cualquier s, $t \in k$. Esto implica que α toma valores en el grupo multiplicativo $A^\times$ de las unidades de A y que $\alpha : k \to A^\times$ es un morfismo de grupos.

Podemos definir entonces $\psi : k \to \mathsf{Aut}_{\mathsf{Alg}}(A)$ poniendo $\psi_t(a) = \alpha_t\, a\, \alpha_{-t}$ para todo $t \in k$ y todo $a \in A$. Entonces $\psi \in \Phi(A)$ y es fácil ver que

$$\psi_t(a) = \sum_{l\geq 0} \frac{t^l}{l!} \sum_{n=0}^{l} \binom{l}{n} a_0^n a a_0^{l-n}.$$

En particular, $d(\psi) = [a_0, -] = d(\phi)$. Como ϕ es inyectiva, concluimos que $\psi = \phi$. Esto prueba la proposición. □

3. Álgebras de polinomios

3.1. Proposición. *Sea M un $k[X]$-bimódulo. Entonces la aplicación*

$$\phi : \delta \in \mathsf{Der}(A, M) \mapsto \delta(X) \in M$$

es un isomorfismo de $\mathsf{Z}(A)$-módulos izquierdos.

Demostración. Que ϕ es $\mathsf{Z}(A)$-lineal a izquierda es fácil de ver.

Sea $m \in M$ y consideremos la aplicación k-lineal $\delta_m : A \to M$ tal que $\delta_m(1) = 0$ y para cada $n \geq 0$ es

$$\delta_m(X^n) = \sum_{i=0}^{n-1} X^i m X^{n-i-1}.$$

Se tiene que

$$\begin{aligned}
\delta_m(X^n X^{n'}) &= \sum_{i=0}^{n+n'-1} X^i m X^{n+n'-i-1} \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} X^i m X^{n-i-1} X^{n'} + \sum_{i=n}^{n+n'-1} X^n X^{i-n} m X^{n+n'-i-1} \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} X^i m X^{n-i-1} X^{n'} + \sum_{i=n}^{n'-1} X^n X^i m X^{n'-i-1} \\
&= \delta(X^n) X^{n'} + X^n \delta(X^{n'}).
\end{aligned}$$

Usando la observación **1.2**, vemos que $\delta_m \in \mathsf{Der}(k[X], M)$. Podemos entonces definir una nueva aplicación

$$\psi : m \in M \mapsto \delta_m \in \mathsf{Der}(A, M).$$

Dejamos al lector la tarea de mostrar que ϕ y ψ son funciones inversas. □

3.2. Corolario. *Sea $\sigma : k[X] \to k[X]$ un endomorfismo de álgebras. El $k[X]$-módulo $\mathsf{Der}_\sigma(k[X])$ es libre de rango 1, con generador libre $\psi(1)$.*

Demostración. En efecto, $\mathsf{Der}_\sigma(k[X]) = \mathsf{Der}(k[X], k[X]_\sigma)$ en vista de **1.5**, y la proposición implica que $\mathsf{Der}(k[X], k[X]_\sigma)$ es isomorfo a $k[X]_\sigma$ como $k[X]$-módulo a izquierda. □

3.3. *Ejemplo.* Sea $q \in k$ y sea $\sigma_q : f \in k[X] \mapsto f(qX) \in k[X]$. Notemos que si $q = 1$, entonces es $\sigma_q = \mathsf{id}_{k[X]}$. Sea $\delta_q = \psi(1)$ el generador libre de $\mathsf{Der}_{\sigma_q}(k[X])$ del enunciado. Si $n \geq 1$, es

$$\delta_q(X^n) = \sum_{i=0}^{n-1} X^i\, 1\, \sigma_q(X^{n-i-1}) = \sum_{i=0}^{n-1} q^{n-i-1} X^{n-1} = (n)_q X^{n-1}.$$

Aquí estamos escribiendo $(n)_q = \sum_{i=0}^{n-1} q^i$ para cada $n \geq 0$.

Por supuesto, si $q \neq 1$, se tiene que $(n)_q = (1 - q^n)/(1 - q)$. Es fácil verificar, usando esto, que

$$\delta_q(f) = \frac{f(qX) - f(X)}{qX - X}$$

para todo $f \in k[X]$. Por otro lado, si $q = 1$, es $(n)_q = n$ y en ese caso claramente

$$\delta_1(f) = f'$$

para todo $f \in k[X]$.

3.4. *Ejemplo.* Sea $\lambda \in k$ y sea $\sigma_\lambda : f \in k[X] \mapsto f(X + \lambda) \in k[X]$. Si $\lambda = 0$, claramente $\sigma_\lambda = \mathsf{id}_{k[X]}$. El generador libre $\delta_\lambda = \psi(1)$ de $\mathsf{Der}_{\sigma_\lambda}(k[X])$ es tal que para cada $n \geq 1$ es

$$\delta_\lambda(X^n) = \sum_{i=0}^{n-1} X^i (X + \lambda)^{n-i-1} = (X + \lambda)^n - X^n.$$

así que en general si $f \in k[X]$ es $\delta_\lambda(f) = f(X + \lambda) - f(X)$.

4. Propiedades de exactitud

4.1. La siguiente propiedad de exactitud es casi evidente:

Proposición. *Si*

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta de A-bimódulos, entonces

$$0 \longrightarrow \mathsf{Der}(A, M') \xrightarrow{f_*} \mathsf{Der}(A, M) \xrightarrow{g_*} \mathsf{Der}(A, M'')$$

es una sucesión exacta de $\mathsf{Z}(A)$-módulos izquierdos. □

4.2. En las condiciones de la proposición, el morfismo g_* no es necesariamente sobreyectivo. Veamos un ejemplo de esto.

Sea k un cuerpo tal que $\mathsf{char}\, k \neq 2$ y sea $A = k[X]/(X^2)$. Sea $x \in A$ la clase de X. Un cálculo directo muestra que $\{\mathsf{id}_A\}$ es una base de $\mathsf{Der}(A)$. Por otro lado, consideremos el A-bimódulo $M = A/(x)$. Otra vez calculando directamente vemos que si $\tau : A \to M$ está determinada por $\tau(1) = 0$ y $\tau(x) = [1]$, $\{\tau\}$ es una base para $\mathsf{Der}(A, M)$. Sea $p : A \to M$ la proyección canónica. El morfismo $p_* : \mathsf{Der}(A) \to \mathsf{Der}(A, M)$ es tal que $p_*(\mathsf{id}_A) = 0$, así que en particular no es sobreyectivo.

4.3. Teorema. *Sea*

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

una sucesión exacta corta de A-bimódulos. Existe un morfismo $\partial : M''^A \to H^1(A, M)$ de $\mathsf{Z}(A)$-módulos tal que el diagrama

$$0 \longrightarrow M'^A \xrightarrow{f_*} M^A \xrightarrow{g_*} M''^A \xrightarrow{\partial}$$
$$\longrightarrow H^1(A, M') \xrightarrow{f_*} H^1(A, M) \xrightarrow{g_*} H^1(A, M'')$$

es una sucesión exacta.

Demostración. Consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\iota_{M'}"'] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\iota_M"'] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "\iota_{M''}"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathsf{Der}(A, M') \arrow[r, "f_*"] & \mathsf{Der}(A, M) \arrow[r, "g_*"] & \mathsf{Der}(A, M'') & \end{tikzcd}$$

En el que la fila superior es la sucesión exacta de partida, la inferior la sucesión exacta construida en **4.1** y los morfismos $\iota_{M'}$, ι_M y $\iota_{M''}$ son los morfismos de **1.11** correspondientes a M', M y M'', respectivamente. Notemos que los cuadrados conmutan. El teorema sigue del lema de la serpiente aplicado a este diagrama. □

4.4. El morfismo $g_* : H^1(A, M) \to H^1(A, M'')$ de la proposición no es en general sobreyectivo. Para verlo basta considerar el mismo ejemplo que en **4.2**.

5. Cambio de anillos

5.1. Sean A y B dos k-álgebra y $\phi : B \to A$ un morfismo de k-álgebras. Cada A-bimódulo M puede ser dotado de una estructura de B-bimódulo restringiendo escalares vía h y hay una aplicación

$$\phi^* : \delta \in \mathsf{Der}(A, M) \mapsto \delta \circ h \in \mathsf{Der}(B, M).$$

5.2. Si $\phi : B \to A$ es un morfismo de k-álgebras sobreyectivo e $I = \ker \phi$, entonces el espacio vectorial I/I^2 es un A-bimódulo de forma natural: si $x \in I$ con clase $[x] \in I/I^2$, entonces para cada a, $a' \in A$, existen b, $b' \in B$ tales que $a = \phi(b)$ y $a' = \phi(b')$ y la estructura de A-bimódulo sobre I/I^2 es tal que

$$a \cdot [x] \cdot b = [axb].$$

Es fácil ver que esto está bien definido, esto es, que no depende ni de la elección del representante x para la clase $[x]$ no de las elecciones de b y b'.

5.3. Proposición. *Sea $\phi : B \to A$ un morfismo de k-álgebras sobreyectivo y sea $I = \ker \phi$. Entonces para cada A-bimódulo hay una sucesión exacta*

$$0 \longrightarrow \mathsf{Der}(A, M) \xrightarrow{\phi^*} \mathsf{Der}(B, M) \xrightarrow{\partial} \mathsf{hom}_{A\text{-}A}(I/I^2, M)$$

para un cierto morfismo de espacios vectoriales ∂.

Demostración. Sea M es un A-bimódulo. Como la estructura de B-bimódulo que consideramos sobre M se obtiene por restricción de escalares a lo largo de ϕ, tenemos que

$$xm = 0 = mx, \qquad \forall\, x \in I,\ m \in M. \tag{7}$$

Sea $\delta \in \mathsf{Der}(B, M)$. Si $x, y \in I$, entonces

$$\delta(xy) = \delta(x)y + x\delta(y) = 0$$

en vista de la observación recién hecha ya que $y, x \in I$. Esto nos dice que $\delta(I^2) = 0$ y, en particular, que δ induce un morfismo de espacios vectoriales $\bar{\delta} : I/I^2 \to M$. Si $\xi \in I/I^2$ es la clase de $x \in I$, entonces $\bar{\delta}(\xi) = \delta(x)$.

Afirmamos que la aplicación $\bar{\delta} : I/I^2 \to M$ es un morfismo de A-bimódulos. En efecto, si $\xi \in I/I^2$ es la clase de $x \in I$ y $a, a' \in A$, entonces existen $b, b' \in B$ tales que $\phi(b) = a$, $\phi(b') = a'$, de manera que $a\xi a' = [bxb']$ y

$$\bar{\delta}(a\xi a') = \bar{\delta}([bxb']) = \delta(bxb') = \delta(b)xb' + b\delta(x)b' + bx\delta(b').$$

Como $xb', bx \in I$, (7) implica que el primer y el tercer término en esta suma se anulan y vemos que $\bar{\delta}(a\xi a') = b\delta(x)b' = a\delta(x)a'$. Esto nos dice que $\bar{\delta} : I/I^2 \to M$ es A-lineal a izquierda y a derecha.

Podemos entonces definir

$$\partial : \delta \in \mathsf{Der}(B, M) \mapsto \bar{\delta} \in \mathsf{hom}_{A\text{-}A}(I/I^2, M).$$

Veamos que con esta elección de ∂, la sucesión del enunciado resulta exacta en $\mathsf{Der}(B, M)$.

En primer lugar, si $\delta \in \mathsf{Der}(A, M)$, es evidente que $\phi^*(\delta) : B \to M$ se anula sobre $I = \ker \phi$, así que es inmediato que $\partial(\phi^*(\delta)) = 0$. Esto eso, $\ker \partial \supset \operatorname{im} \phi^*$.

Por otro lado, supongamos que $\delta : B \to M$ es un elemento de $\mathsf{Der}(B, M)$ tal que $\partial(\delta) = 0$. Esto implica claramente que $\delta(I) = 0$ y entonces δ induce un morfismo de espacios vectoriales $\delta' : A = B/I \to M$ que, por supuesto, es tal que $\phi^*(\delta') = \delta$. Es fácil ver que $\delta' \in \mathsf{Der}(A, M)$, así que $\ker \partial \subset \operatorname{im} \phi^*$.

Para terminar la prueba, hay que mostrar que ϕ^* es inyectiva, pero esto es consecuencia directa de que ϕ es sobreyectiva. $\square$

5.4. Corolario. *Sea $f \in k[X]$ un polinomio no constante y $A = k[X]/(f)$. Si M es un A-bimódulo simétrico, hay una sucesión exacta*

$$0 \longrightarrow \mathsf{Der}(A, M) \longrightarrow M \xrightarrow{L_{f'}} M$$

con $L_{f'} : m \in M \mapsto f'm \in M$ la multiplicación a izquierda por f'.

Demostración. Si $\phi : k[X] \to A$ es la proyección canónica, $I = (f) = \ker \phi$ y M es un A-bimódulo simétrico, la proposición nos da una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathsf{Der}(A, M) \longrightarrow \mathsf{Der}(k[X], M) \xrightarrow{\partial} \mathsf{hom}_{A\text{-}A}(I/I^2, M)$$

En vista de la proposición **3.1**, hay un isomorfismo

$$r : \delta \in \mathsf{Der}(k[X], M) \mapsto \delta(X) \in M.$$

Por otro lado, $I/I^2 \cong A$ como A-bimódulo. En efecto, notemos que $I^2 = (f^2)$ y consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & k[X] \arrow[r, "L_f"] \arrow[d, "L_{f^2}"'] & k[X] \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "L_f"'] & A \arrow[r] \arrow[d, dotted, "\iota"] & 0 \\
0 \arrow[r] & (f^2) \arrow[r, hook] & (f) \arrow[r] & (f)/(f^2) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

en el que L_f (en cada caso) y L_{f^2} son la multiplicación a izquierda por f y por f^2, respectivamente. Como $k[X]$ es un dominio, las filas son exactas y las flechas verticales son isomorfismos. Como es claro que el cuadrado conmuta, existe una flecha $\iota : A \to (f)/(f^2)$ que preserva la conmutatividad y, por el lema de los 5,

ι es un isomorfismo. Notemos que si $a \in A$ es la imagen de $g \in k[X]$ por ϕ, entonces $\iota(a) = [fg] \in (f)/(f^2)$. Usando esto, es inmediato verificar que ι es un isomorfismo de A-bimódulos.

Es fácil ver que, como M es un A-bimódulo simétrico, hay un isomorfismo

$$u : h \in \mathsf{hom}_{A\text{-}A}(A, M) \mapsto h(1) \in M.$$

Llamemos s a la composición

$$\mathsf{hom}_{A\text{-}A}(I/I^2, M) \xrightarrow{\iota^*} \mathsf{hom}_{A\text{-}A}(A, M) \xrightarrow{u} M$$

Es $s(h) = u(\iota^*(h)) = \iota^*(h)(1) = h([f])$ para todo $h \in \mathsf{hom}_{A\text{-}A}(I/I^2, M)$. Notemos que s es un isomorfismo.

Tenemos entonces un diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathsf{Der}(A, M) \arrow[r] \arrow[d, dotted, "\bar{r}"'] & \mathsf{Der}(k[X], M) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "r"'] & \mathsf{hom}_{A\text{-}A}(I/I^2, M) \arrow[d, "s"] \\
0 \arrow[r] & \ker L_{f'} \arrow[r, hook] & M \arrow[r, "L_{f'}"] & M
\end{tikzcd}$$

con filas exactas. El cuadrado conmuta: si $\delta \in \mathsf{Der}(k[X], M)$, entonces

$$s(\partial(\delta)) = \partial(\delta)([f]) = \delta(f) = f'\delta(1) = L_{f'}(r(\delta)).$$

Entonces existe un isomorfismo $\bar{r} : \mathsf{Der}(A, M) \to \ker L_{f'}$ que preserva la conmutatividad. Esto nos dice que hay una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathsf{Der}(A, M) \longrightarrow M \xrightarrow{L_{f'}} M$$

en la que la flecha $\mathsf{Der}(A, M) \to M$ es la composición de $\bar{r}$ con la inclusión $\ker L'_f \hookrightarrow M$. $\square$

5.5. Corolario. *Con las notaciones del corolario anterior, pongamos $d = \mathsf{gcd}(f, f')$. Entonces hay un isomorfismo de espacios vectoriales $\mathsf{Der}(A) \cong k[X]/(d)$.*

Demostración. Supongamos que $q \in k[X]$ es tal que $f = qd$. Entonces la multiplicación por q induce un morfismo inyectivo $L_q : k[X]/(d) \to k[X]/(f)$. En vista de **5.4** para probar el corolario basta mostar que la sucesión

$$0 \longrightarrow \frac{k[X]}{(d)} \xrightarrow{L_q} \frac{k[X]}{(f)} \xrightarrow{L_{f'}} \frac{k[X]}{(f)}$$

es exacta. Dejamos esto al lector. $\square$

5.6. Si calculamos explícitamente el isomorfismo $\mathsf{Der}(A) \cong k[X]/(d)$ del corolario, vemos que tiene inverso $\psi : k[X]/(d) \to \mathsf{Der}(A)$ determinado de la siguiente manera: si $p \in k[X]$ tiene clase $[p]$ en $k[X]/(d)$, entonces la derivación $\psi([p]) \in \mathsf{Der}(A)$ está determinada por la condición de ser

$$\psi([p])(x) = qp'.$$

Aquí x es la clase de $X \in k[X]$ es A y q está elegido como en la prueba del corolario.

5.7. Usando **5.5** es inmediato que si $f \in k[X]$ no tiene raíces múltiples, entonces $\mathsf{Der}(A) = 0$. Por otro lado, si $f = X^n$ es un monomio, entonces $f' = nX^{n-1}$ y

$$\mathsf{gcd}(f, f') = \begin{cases} X^{n-1}, & \text{si } n \neq 0 \text{ en } k; \\ X^n, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

de manera que

$$\dim_k \mathsf{Der}(A) = \begin{cases} n-1, & \text{si } n \neq 0 \text{ en } k; \\ n, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires, Ciudad Universitaria, Pabellón I, Buenos Aires (1428) Argentina.

E-mail address: `mariano@dm.uba.ar`