LA MEDIA ARITMÉTICO-GEOMÉTRICA

MARIANO SUÁREZ-ALVAREZ

1. La media aritmético-geométrica

1.1. Sean a, $b \in \mathbb{R}^+$, y supongamos que $a \geq b$. Definimos dos sucesiones $(a_n)_{n\geq 0}$ y $(b_n)_{n\geq 0}$ poniendo $a_0 = a$, $b_0 = b$, y, para cada $n \in \mathbb{N}_0$,

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \tag{1}$$

$$b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}. \tag{2}$$

1.2. Observemos que para cada $n \in \mathbb{N}_0$ es

$$a_n \geq a_{n+1} \geq b_{n+1} \geq b_n. \tag{3}$$

En efecto, en vista de la definición de las sucesiones, basta mostrar que esto es cierto cuando $n = 0$, y, en ese caso, tenemos que $a_0 \geq a_1$ y $b_1 \geq b_0$ porque evidentemente

$$\max\{x, y\} \geq \frac{x+y}{2} \geq \min\{x, y\} \qquad \text{y} \qquad \max\{x, y\} \geq \sqrt{xy} \geq \min\{x, y\}$$

si x, $y \in \mathbb{R}_0^+$, y $a_1 \geq b_1$ en vista del siguiente lema:

1.3. Lema. *Sean x, $y \in \mathbb{R}^+$. Entonces es*

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy},$$

y la igualdad es alcanzada sii $a = b$.

Demostración. Es

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - (\sqrt{xy})^2 = (x-y)^2 \geq 0.$$

Las afirmaciones del lema son consecuencias inmediatas de esto. □

1.4. Las desigualdades (3) nos dicen que $(a_n)_{n\geq 0}$ es decreciente, que $(b_n)_{n\geq 0}$ es creciente, y que ambas sucesiones son acotadas, y podemos concluir, en particular, que existen los límites $\alpha = \lim_{n\to\infty} a_n$ y $\beta = \lim_{n\to\infty} b_n$. De hecho, es $\alpha = \beta$ ya que tomando límite para $n \to \infty$ en (1) vemos que

$$\alpha = \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

1.5. Desde ahora escribiremos $M(a, b)$ al valor común de los límites de las sucesiones $(a_n)_{n\geq 0}$ y $(b_n)_{n\geq 0}$. Si fuese $a < b$, ponemos $M(a, b) = M(b, a)$. El número $M(a, b)$ es la *media aritmético-geométrica* de a y b.

Fecha: 26 de agosto, 2004; compilado: 14 de mayo de 2015.

1.6. Proposición. *Si a, b, $\lambda \in \mathbb{R}^+$, tenemos que*

(a) $M(a,b) = M(b,a)$;
(b) $M(\lambda a, \lambda b) = \lambda M(a,b)$;
(c) $M(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}) = M(a,b)$;
(d) $\frac{a+b}{2} \geq M(a,b) \geq \sqrt{ab}$.

Demostración. Todo esto se deduce inmediatamente de la definición de la función M. □

1.7. Definimos una nueva función de *una* variable, que notaremos también M, poniendo $M(x) = M(1,x)$. Es claro que $M(a,b) = aM(b/a)$.

1.8. Notemos finalmente que

$$a_{n+1}^2 - b_{n+1}^2 = \left(\frac{a_n + b_n}{2}\right)^2.$$

En particular,

$$\begin{aligned}|a_{n+1} - b_{n+1}| &\leq \frac{1}{a_{n+1} + b_{n+1}}(a_{n+1}^2 - b_{n+1}^2) \\ &\leq \frac{1}{2\max\{a,b\}}\left(\frac{a_n - b_n}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{8\max\{a,b\}}|a_n - b_n|^2\end{aligned}$$

y vemos que la convergencia de a_n y de b_n a $M(a,b)$ es de orden cuadrático.

2. Una integral elíptica

2.1. Si a, $b \in \mathbb{R}_0^+$, ponemos

$$I(a,b) = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(t^2 + a^2)(t^2 + b^2)}}. \tag{4}$$

Que esta integral converge es una de las afirmaciones de la siguiente proposición.

2.2. Observemos antes que

$$\int_{\sqrt{ab}}^\infty \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(t^2 + a^2)(t^2 + b^2)}} = \int_0^{\sqrt{ab}} \infty \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(t^2 + a^2)(t^2 + b^2)}},$$

de manera que, por ejemplo,

$$I(a,b) = 2\int_{\sqrt{ab}}^\infty \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(t^2 + a^2)(t^2 + b^2)}}.$$

2.3. Proposición. *La integral $I(a,b)$ converge para todo a, $b \in \mathbb{R}^+$, y es I de hecho una función continua sobre $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$. Si $\lambda \in \mathbb{R}^+$, valen:*

(a) $I(a,b) = I(b,a)$;
(b) $I(\lambda a, \lambda b) = \frac{1}{\lambda} I(a,b)$;
(c) $I(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}) = I(a,b)$;
(d) $I(a,a) = \frac{\pi}{2a}$.

Demostración. Sean a, $b \in \mathbb{R}^+$. Sea $c = \min\{a,b\}$ y $\varepsilon = c/2$. Si $(a',b') \in B_\varepsilon(a) \times B_\varepsilon(b)$, es $\varepsilon < a'$ y $\varepsilon < b'$, de manera que

$$\frac{1}{\sqrt{(t^2 + a'^2)(t^2 + b'^2)}} \leq \frac{1}{t^2 + \varepsilon^2}.$$

Como $(t^2 + \varepsilon^2)^{-1}$ es una función integrable en $\mathbb{R}^+$, vemos que la integral impropia $I(a',b')$ converge uniformemente para $(a',b') \in B_\varepsilon(a) \times B_\varepsilon(b)$.

En particular, $I(a,b)$ converge, y, como el integrando en (4) es una función continua de sus parámetros a y b, la uniformidad implica que I es una función continua.

La igualdad en ((a)) es evidente. Para ver ((b)), calculamos

$$I(\lambda a, \lambda b) = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(t^2+\lambda^2 a^2)(t^2+\lambda^2 b^2)}}$$

que, haciendo el cambio de variables $u = t/\lambda$,

$$= \int_0^\infty \frac{\lambda \mathrm{d}t}{\sqrt{(\lambda^2 u^2+\lambda^2 a^2)(\lambda^2 u^2+\lambda^2 b^2)}} = \frac{1}{\lambda} I(a,b).$$

Para ver ((c)) tenemos que calcular $I(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab})$, y para esto vamos a hacer en esta integral el cambio de variables

$$u = t + \sqrt{t^2+ab}. \tag{5}$$

Observemos que será

$$\mathrm{d}u = \left(1 + \frac{t}{\sqrt{t^2+ab}}\right)\mathrm{d}t = \frac{u}{\sqrt{t^2+ab}}\mathrm{d}t$$

de manera que

$$\frac{\mathrm{d}u}{u} = \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2+ab}};$$

por otro lado, de (5) vemos que $u - t = \sqrt{t^2+ab}$, así que elevando al cuadrado ambos miembros de esta igualdad y reordenando, llegamos a

$$t = \frac{1}{2}\left(u - \frac{ab}{u}\right).$$

Luego

$$\begin{aligned} I(\tfrac{a+b}{2}, \sqrt{ab}) &= \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(t^2+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2)(t^2+ab)}} \\ &= \int_{\sqrt{ab}}^\infty \frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{\frac{1}{4}\left(u-\frac{ab}{u}\right)^2+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}} \\ &= 2\int_{\sqrt{ab}}^\infty \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(t^2+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2)(t^2+ab)}} \end{aligned}$$

Ahora bien, el cambio de variables $t \rightsquigarrow ab/t$ muestra que

$$\int_{\sqrt{ab}}^\infty \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(t^2+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2)(t^2+ab)}} = \int_0^{\sqrt{ab}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(t^2+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2)(t^2+ab)}},$$

así que es

$$2\int_{\sqrt{ab}}^\infty \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(t^2+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2)(t^2+ab)}} = I(a,b)$$

y entonces $I(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}) = I(a,b)$, que es lo que queríamos mostrar.

Finalmente, ya que
$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = \frac{\pi}{2},$$
tenemos que si $a \in \mathbb{R}^+$,
$$I(a,a) = \frac{1}{a} I(1,1) = \frac{1}{a}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)} = \frac{\pi}{2a}.$$
Esto es lo que se afirma en ((d)), así que la proposición queda probada. □

2.4. Teorema. *Sean a, $b \in \mathbb{R}^+$. Entonces es*
$$M(a,b)I(a,b) = \frac{\pi}{2}.$$

Demostración. Sea $\alpha = M(a,b)$, y sean $(a_n)_{n\geq 0}$ y $(b_n)_{n\geq 0}$ las sucesiones contruídas a partir de a y b como en **1.1**. De la proposición **2.3** vemos que $I(a,b) = I(a_n, b_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$, y como $(a_n, b_n) \to (\alpha, \alpha)$ e I es continua, vemos que
$$I(a,b) = I(\alpha,\alpha) = \frac{\pi}{2\alpha},$$
y esta igualdad es esencialmente la del enunciado. □

3. M en la naturaleza

3.1. Otras fórmulas integrales.

3.1.1. Si en
$$I(1,b) = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(t^2+1)(t^2+b^2)}}$$
hacemos el cambio de variable $t = \tan\theta$, vemos que es
$$I(1,b) = \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1+(b^2-1)\cos^2\theta}}$$

3.2. La longitud de arco de la lemniscata.

3.2.1. La *lemniscata* es el lugar de puntos del plano tal que el producto de sus distancias a $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ y a $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ es $\frac{1}{2}$. Se trata de la curva cuya ecuación cartesiana es
$$(x^2+y^2)^2 = x^2 - y^2.$$

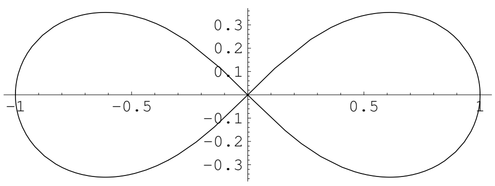

Figura 1. La lemniscata

3.2.2. No es difícil ver que
$$x = \frac{\cos\theta}{1+\sin^2\theta} \qquad y = \frac{\cos\theta\sin\theta}{1+\sin^2\theta},$$
con $\theta \in [0, 2\pi]$, es una parametrización de la lemniscata.

3.2.3. Usando esta parametrización, vemos que la longitud total l de la curva es

$$l = \sqrt{2}\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{3-\cos 2\theta}}$$

y, recordando que $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$, esto es

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\cos^2\theta}} = 2\sqrt{2}I(1, \tfrac{1}{\sqrt{2}})$$

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires, Ciudad Universitaria, Pabellón I, Buenos Aires (1428) Argentina.

E-mail address: `mariano@dm.uba.ar`