Geometría Diferencial

Primer Cuatrimestre — 2019

Práctica 6: Variedades riemannianas

1. (*a*) Consideremos sobre S^2 la métrica riemanniana g inducida por la de $\mathbb{R}^3$ y sea (U, ϕ) la carta de S^2 tal que $\phi(U) = (0, \pi) \times (0, 2\pi)$ y

$$\phi^{-1}(\theta, \phi) = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi\theta)$$

para cada $(\theta, \phi) \in (0, \pi) \times (0, 2\pi)$. Determine la expresión local con respecto a esa carta de la métrica g, la de la correspondiente forma de volumen y la de los símbolos de Cristoffel de la correspondiente conexión de Levi–Civita.

(*b*) Sea $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$, consideremos sobre M a la carta canónica dada por la inclusión $M \to \mathbb{R}^2$, y la métrica riemanniana g que en esa carta tiene expresión

$$g = \frac{1}{y^2} dx^1 \otimes dx^1 + \frac{1}{y^2} dx^2 \otimes dx^2.$$

Llamamos a la variedad riemanniana M el *semiplano de Poincaré*. Determine la conexión de Levi–Civita vía los símbolos de Cristoffel.

2. Sea G un grupo que actúa sobre una variedad M de manera propiamente discontiua y sea g una métrica riemanniana sobre M.

(*a*) Dé una definición de concepto de «métrica G-invariante» sobre M.

(*b*) Muestre que si la métrica g es G-invariante, entonces existe una única métrica riemanniana sobre el cociente M/G de manera tal que la proyección $\pi : M \to M/G$ es una isometría local.

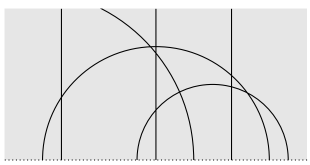
(*c*) Si el grupo G es finito, entonces

$$g = \frac{1}{|G|} \sum_{\gamma \in G} \gamma^*(g)$$

es una métrica riemanniana sobre M que es G-invariante.

(*d*) Muestre que la métrica usual de S^n es invariante con respecto a la acción del grupo cíclico de orden dos C_2 en la que el elemento no trivial actúa vía la función $x \in S^n \mapsto -x \in S^n$ y encuentre la expresión de la métrica inducida sobre $P^n = S^2/C_2$ con respecto a las cartas usuales de P^n.

3. Encuentre la ecuación de las geodésicas en términos de los símbolos de Cristoffel. Muestre que las geodésicas de $\mathbb{R}^n$ con respecto a su métrica usual son las rectas, que las geodésicas de la esfera S^n con respecto a su métrica usual son los círculos máximos, y que las geodésicas del semiplano de Poincaré son las semirrectas perpendiculares al borde o los semicírculos centrados en el borde.



4. Sea M una subvariedad de codimensión 1 de $\mathbb{R}^n$. Dotemos a $\mathbb{R}^n$ de su métrica usual, a M de la métrica g inducida y sea ∇ la conexión de Levi–Civita correspondiente a g. Sean X e Y elementos de $\mathfrak{X}(M)$, sea p un punto de M y sea $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ una curva diferenciable tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = X_p$. Muestre que el valor de $\nabla_X Y$ en p coincide con la proyección ortogonal sobre T_pM del vector

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} Y_{\alpha(t)}$$

de $\mathbb{R}^n$.

5. Sea M una variedad diferenciable, sea $n = \dim M$ y sea ∇ una conexión sobre M. Fijemos una curva diferenciable $c : (a, b) \to M$, un punt $t_0 \in (a, b)$ y y escribamos $\mathfrak{X}^{\|}(c)$ al conjunto de los campos vectoriales a lo largo de c que son paralelos con respecto a ∇.

(a) Muestre que $\mathfrak{X}^{\|}(c)$ es un espacia vectorial con respecto a las operaciones naturales.

(b) Si $v \in T_{c(t_0)}(M)$, hay un campo $X \in \mathfrak{X}^{\|}(c)$ tal que $X_{t_0} = v$.

(c) Si $v_1, \ldots, v_m \in T_{c(t_0)}M$ son vectores linealmente independientes y $X_1, \ldots, X_m$ son los elementos de $\mathfrak{X}^{\|}(c)$ tales que $(X_i)_{t_0} = v_i$ para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, entonces para cada $t \in (a, b)$ los m vectores $(X_1)_t, \ldots, (X_m)_t$ de $T_{c(t)}M$ son linealmente indendientes.

(d) Determine la dimensión de $\mathfrak{X}^{\|}(c)$ como espacio vectorial real.

6. Considere sobre $\mathbb{R}^2$ la métrica usual y la carta dada por coordenadas polares (θ, r) y sea ∇ la conexión de Levi–Civita. Calcule los campos

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial r}}\left(\frac{\partial}{\partial r}\right) \qquad \nabla_{\frac{\partial}{\partial r}}\left(\frac{\partial}{\partial \theta}\right), \qquad \nabla_{\frac{\partial}{\partial \theta}}\left(\frac{\partial}{\partial r}\right), \qquad \nabla_{\frac{\partial}{\partial \theta}}\left(\frac{\partial}{\partial \theta}\right).$$

7. Sea M una variedad riemaniana, ∇ la conexión de Levi–Civita correspondiente y sea $c : (a, b) \to M$ una curva diferenciable. Muestre que si X e Y son campos vectoriales a lo largo de c, entonces

$$\frac{d}{dt}\langle X, X\rangle = \langle \nabla_{c'} X, Y\rangle + \langle X, \nabla_{c'} Y\rangle,$$

y deduzca de esto que el transporte paralelo con respecto a la conexión de Levi–Civita preserva normals y ángulos y, en particular, que $\mathsf{Hol}_p \subseteq O(T_pM)$ para cada punto $p \in M$

8. Sea G un grupo de Lie de dimensión n.

(a) Sean $X_1, \ldots, X_n$ campos vectoriales invariantes a izquierda que generan al álgebra de Lie $\mathsf{Lie}(G)$ como espacio vectorial. Muestre que hay exactamente una conexión afín ∇ sobre G tal que $\nabla_{X_i} X_j = 0$ para cada elección de i y j en $\{1, \ldots, n\}$.

(b) Muestre que, de hecho, la conexión ∇ no depende de la elección de los campos invariantes a izquierda $X_1, \ldots, X_n$, mientras éstos generen a $\mathsf{Lie}(G)$. Esto nos dice que la conexión ∇ está canónicamente asociada al grupo G: se la conoce como la $(-)$-conexión de G.

(c) Calcule la curvatura y la torsión de esta conexión.

9. Sea M una variedad riemaniana orientada y sea dV el elemento de volumen riemaniana correspondiente. Si $Xf \in \mathfrak{X}(M)$ es un campo sobre M, llamamos *divergencia* de X a la función $\operatorname{div}(f)$ tal que

$$d(i_X(dV)) = \operatorname{div}(X) \cdot dV.$$

Obtenemos de esta forma una función $\operatorname{div} : \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M)$.

(a) Si M es compacta, para cada $X \in \mathfrak{X}(M)$ se tiene que

$$\int_M \operatorname{div}(X) \cdot dV = \int_{\partial M} \langle X, N \rangle \cdot d\tilde{V},$$

con N la normal unitaria interior a ∂M y $d\tilde{V}$ el elemento de volumen riemaniano sobre ∂M correspondiente a la métrica inducida por la de M.

(b) Si $u \in C^\infty(M)$ y $X \in \mathfrak{X}(M)$, entonces

$$\operatorname{div}(uX) = u \cdot \operatorname{div}(X) + \langle \operatorname{grad}(u), X \rangle.$$

y deducir la fórmula de integración por partes

$$\int_M \langle \operatorname{grad}(u), X \rangle \cdot dV = -\int_M u \cdot \operatorname{div}(X) \cdot dV + \int_{\partial M} u \langle X, N \rangle \cdot d\tilde{V}.$$

10. Si f es una función diferenciable sobre una variedad riemaniana M, el *laplaciano* de f es la función

$$\Delta(f) = \operatorname{div}(\operatorname{grad}(f)).$$

(a) Muestre que el operador laplaciano en $\mathbb{R}^2$ con la métrica usual es el laplaciano clásico. Determine el laplaciano de la esfera S^2 dotada de su métrica usual y del semiplano de Poincaré.

(b) Usando el teorema de Stokes, muestre que si M es una variedad riemanniana orientada, compacta y sin borde, entonces para toda función $f \in C^\infty(M)$ armónica —esto es, tal que $\nabla(f) = 0$— se tiene que

$$\int_M |\operatorname{grad}(f)|^2 \, dV = 0,$$

y concluya que una función armónica sobre M es localmente constante.

11. Si G es un grupo de Lie que posee una métrica riemanniana biinvariante, entonces el tensor de curvatura es tal que

$$R(X, Y)Z = \frac{1}{4}[Z, [X, Y]]$$

cada vez que X, Y y Z son campos vectoriales sobre G invariantes a izquierda.