GEOMETRÍA DIFERENCIAL
Primer Cuatrimestre — 2012

Práctica 5: Variedades con borde y teorema de Stokes

1. Muestre que el producto de una variedad con una variedad con borde es una variedad con borde. ¿Qué puede decir del producto de dos variedades con borde?

2. Si $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable que tiene a 0 por valor regular, entonces el conjunto $M = \{x \in \mathbb{R}^n : F(x) \geq 0\}$ tiene una estructura natural de variedad con borde tal que la inclusión $M \to \mathbb{R}^n$ es diferenciable.

3. ¿Puede ser que la variedad subyacente a un grupo de Lie tenga borde no vacío?

4. Sea M una variedad con borde. Muestre que existe un campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ tal que para cada $p \in \partial M$ el vector $X_p \in T_pM$ apunta «hacia afuera».

5. Sea M una variedad compacta y sin borde de dimensión n. Si $\omega \in \Omega^n(M)$ es una forma de volumen, entonces ω no es exacta.

6. Sea M una variedad y sea $\omega \in \Omega^k(M)$.

(a) Si S es una subvariedad de dimensión k compacta, sin borde y orientada de M tal que existe una subvariedad T de M con $S = \partial T$, entonces $\int_S \omega = 0$.

(b) Si W es una subvariedad de M compacta y orientada tal que $\partial W = S \sqcup T$, con S y T subvariedades de M dotadas de la orientación inducida por W, entonces $\int_S \omega = -\int_T \omega$.

7. Si M es una variedad compacta, orientada y con borde, no existe una retracción diferenciable $M \to \partial M$.

8. Una variedad conexa y compacta M de dimension n es orientable si y solamente si $H^n(M) \cong \mathbb{R}$, y si no lo es tiene $H^n(M) \cong 0$.