GEOMETRÍA DIFERENCIAL
Primer Cuatrimestre — 2012

Práctica 4: Orientabilidad, formas diferenciales y cohomología de De Rham

Orientabilidad

1. Muestre que el plano proyectivo y la banda de Moebius no son orientables.

2. Una variedad que posee un atlas con exactamente dos cartas cuyos dominios se intersecan en un conexo es orientable. ¿Puede relajar alguna de estas hipótesis manteniendo la conclusión?

3. Si M es una variedad de dimensión dos que tiene un atlas tal que todas las funciones de transición correspondientes son funciones holomorfas, entonces M es orientable.

4. Si M es una variedad, entonces las variedades TM y T^*M son orientables.

5. Una variedad paralelizable es orientable. En particular, un grupo de Lie es orientable.

6. Si M y N son variedades no vacías, entonces $M \times N$ es orientable sii M y N lo son.

7. *El revestimiento de orientaciones* Sea M una variedad, sea $\tilde{M}$ el conjunto de pares (x, o) con $x \in M$ y o una orientación de T_xM y sea $p : \tilde{M} \to M$ la función tal que $p(x, o) = x$ para todo $(x, o) \in \tilde{M}$.

- (a) Muestre que $\tilde{M}$ es, de manera natural, una variedad. Con respecto a esa estructura, la función $p : \tilde{M} \to M$ es un revestimiento diferenciable de dos hojas.
- (b) La variedad $\tilde{M}$ es orientable.
- (c) La variedad M es orientable si y solamente si existe una función diferenciable $s : M \to \tilde{M}$ tal que $p \circ s = \mathrm{id}_M$.
- (d) Una variedad simplemente conexa es orientable.
- (e) Una variedad cuyo grupo fundamental no contiene subgrupos de índice 2 es orientable.

Formas

8. (a) Si $f : M \to N$ es una función diferenciable entre variedades, los pull-backs $f^* : \Omega^k(N) \to \Omega^k(M)$ son tales que

$$f^*(\omega_1 + \omega_1) = f^*(\omega_1) + f^*(\omega_2),$$
$$f^*(h \cdot \omega_1) = h \circ f \cdot f^*(\omega_1)$$

y

$$f^*(\omega_1 \wedge \omega_2) = f^*(\omega_1) \wedge f^*(\omega_2)$$

para cada ω_1, $\omega_2 \in \Omega^\bullet(N)$ y $h \in C^\infty(N)$.

(b) Si U y V son abiertos de $\mathbb{R}^n$ y $f : U \to V$ es diferenciable, entonces

$$f^*(\mathrm{d}x_i) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_k} \mathrm{d}x_k$$

y

$$f^*(g \cdot \mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n) = g \circ f \cdot \det\Big(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\Big)_{i,j} \cdot \mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n$$

para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ y cada $g \in C^\infty(V)$.

9. Sea M una variedad de dimensión n y sean ω_1, $\omega_2 \in \Omega^n(M)$ dos n-formas sobre M que no se anulan en ningún punto.

(a) Para cada $\omega \in \Omega^n(M)$ existe una única función $f \in C^\infty(M)$ tal que $\omega = f \cdot \omega_1$.

(b) Las formas ω_1 y ω_2 inducen la misma orientación de M si y solo si la función $f \in C^\infty(M)$ tal que $\omega_1 = f \cdot \omega_2$ es positiva.

10. Sea M una variedad. Decimos que una forma $\omega \in \Omega^k(M)$ es *cerrada* si $\mathrm{d}\omega = 0$ y que es *exacta* si existe una forma $\eta \in \Omega^{k-1}(M)$ tal que $\mathrm{d}\eta = \omega$.

(a) Una forma exacta es cerrada.

(b) Si ω y ω' son formas cerradas y ω'' es exacta, entonces $\omega \wedge \omega'$ es cerrada y $\omega \wedge \omega''$ es exacta.

(c) Si $f : M \to N$ es una función diferenciable entre variedades y $\omega \in \Omega^\bullet(N)$ es una forma cerrada (exacta), entonces $f^*(\omega)$ es cerrada (exacta).

Cohomología de De Rham

11. Calcule la cohomología de los siguientes espacios:

(a) el complemento en $\mathbb{R}^n$ de un conjunto finito de puntos;

(b) el cilindro $S^1 \times \mathbb{R}$ y de la banda de Möbius;

(c) el plano proyectivo real;

(d) un producto cartesiano de dos esferas.