Geometría Diferencial
Primer Cuatrimestre — 2012

Práctica 3: Campos

1. (*a*) Sea $S^1 \subseteq \mathbb{C}$ la circunferencia unitaria, sea $k \in \mathbb{Z}$ y consideremos la función $f : z \in S^1 \mapsto z^k \in S^1$. Muestre que la función f es diferenciable y describa explíctamente su diferencial f_{*p} para cada $p \in S^1$.

(*b*) Sea $S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ la esfera unitaria y sea $f : (x, y, z) \in S^2 \mapsto z \in \mathbb{R}$. Muestre que se trata de una función diferenciable y para cada $p \in S^2$ determine la diferencial f_{*p} y calcule su rango.

2. Sean M una variedad y $f \in C^\infty(M)$. Si f tiene un máximo local en $p \in M$, entonces $f_{*p} = 0$.

3. Sean M una variedad, X, $Y \in \mathfrak{X}(M)$ y $f \in C^\infty(M)$. Muestre que

$$[X, fY] = Xf\, Y + f[X, Y]$$

primero usando las propiedades de las derivaciones y del corchete de Lie, y después usando la expresión en coordenadas del corchete de Lie.

4. Sea G un grupo de Lie, e su elemento neutro y $\mathfrak{g}$ su álgebra de Lie, esto es, el subespacio de $\mathfrak{X}(G)$ de los campos invariantes a izquierda. Muestre que hay un isomorfismo lineal $q : \mathfrak{g} \to T_eG$ tal que $q(X) = X_e$ para cada $X \in \mathfrak{g}$.

5. Muestre que el conjunto

$$G = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) : a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0 \right\}$$

es un subgrupo de Lie de $\mathsf{GL}(2, \mathbb{R})$ que tiene a la función

$$\phi : \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in G \mapsto (a, b) \in \mathbb{R}^2$$

como carta global. Con respecto al sistema de coordenadas correspondiente a esta carta, consideremos un campo $X = f(a, b)\partial_a + g(a, b)\partial_b \in \mathfrak{X}(G)$. ¿Qué condiciones tienen que satisfacer las funciones f, $g \in C^\infty(G)$ para que X sea un campo vectorial invariante a izquierda? ¿Y a derecha? Determine la estructura de Lie del álgebra de Lie de G.

Flujos

6. (*a*) Describa las curvas integrales del campo $X = -y\partial_x + x\partial_y$ definido sobre $\mathbb{R}^2$ y determine si se trata de un campo completo.

(*b*) Sea $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R})$ una matriz real y considere sobre $\mathbb{R}^n$ el campo vectorial $X = \sum_{i,j=1}^n a_{i,j} x_i \partial_{x_j}$. Describa sus curvas integrales y su flujo.

7. Sea M una variedad diferenciable conexa y sea $\mathsf{Diff}(M)$ el grupo de los difeomorfismos $M \to M$.

(a) La función

$$(f,p) \in \mathsf{Diff}(M) \times M \mapsto f(p) \in M$$

define una acción del grupo $\mathsf{Diff}(M)$ sobre M por difeomorfismos.

(b) La acción de $\mathsf{Diff}(M)$ sobre M es *transitiva*.

Sugerencia. Como M es conexa, es suficiente con mostrar que las órbitas de $\mathsf{Diff}(M)$ en M son abiertas, ya que M es la unión disjunta de esas órbitas. Muestre que para cada punto p de M hay un entorno U de p tal que U está contenido en la órbita de p construyendo difeomorfismos como flujos de campos completos.

†(c) Si $m \in \mathbb{N}$ y $p_1, \ldots, p_m$ y $q_1, \ldots, q_m$ son puntos de M tales que $p_i \neq p_j$ y $q_i \neq q_j$ siempre que $i \neq j$, entonces existe un difeomorfismo $f : M \to M$ tal que $f(p_i) = q_i$ para cada $i \in \{1, \ldots, b\}$.

8. Sea G un grupo de Lie, $\mathfrak{g}$ su álgebra de Lie y $X \in \mathfrak{g}$ un campo vectorial invariante a izquierda. Pruebe que X es *completo* y describa el flujo asociado.

Sugerencia. Muestre que si $g, h \in G$ y $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to G$ es una curva integral de X que arranca en $g = \gamma(0)$ entonces la curva $\eta : t \in (-\varepsilon, \varepsilon) \mapsto h\gamma(t) \in G$ es una curva integral de X que arranca en hg. Use esta observación para probar que el intervalo maximal de definición de todas las curvas integrales de X es $\mathbb{R}$.

9. Sea G un grupo de Lie, e su elemento neutro y $\mathfrak{g}$ su álgebra de Lie.

(a) Si $v \in T_eG$ es un vector tangente a G en e y $X \in \mathfrak{g}$ es el único campo vectorial invariante a izquierda tal que $X_e = v$, sea $\gamma_v : \mathbb{R} \to G$ la única curva integral de X tal que $\gamma_v(0) = e$. Entonces γ_v es un homomorfismo de grupos, esto es,

$$\gamma_v(t + t') = \gamma_v(t) \cdot \gamma_v(t'), \qquad \forall t, t' \in \mathbb{R}.$$

(b) Definimos una función $\exp : T_eG \to G$ poniendo, para cada $v \in T_eG$,

$$\exp(v) = \gamma_v(1).$$

Determine la diferencial $\exp_{*0} : T_eG \to T_eG$ y muestre que $\exp$ es localmente un difeomorfismo alrededor de 0.

(c) Muestre que si v, $w \in T_eG$ son tales que $[v, w] = 0$, entonces

$$\exp(v + w) = \exp(v) \cdot \exp(w).$$

10. Sea $G = \mathsf{GL}(n, \mathbb{R})$. Recordemos que podemos identificar T_IG con $M_n(\mathbb{R})$.

(a) Para cada $A \in M_n(\mathbb{R})$, describa explicitamente el campo tangente X_A sobre G que es invariante a izquierda y tal que $(X_A)_I = A$.

(b) Determine la función $\exp : T_eG \to G$.

(c) Muestre que $\exp : T_eG \to G$ no es un homomorfismo de grupos.

Marius Sophus Lie
1842–1899, Noruega