Geometría Diferencial
Primer Cuatrimestre — 2012

Práctica 2: Funciones diferenciables y espacios tangentes

Funciones diferenciables

1. Sean M y N variedades. Una función continua $f : M \to N$ es diferenciable si para todo abierto U de N y toda función diferenciable $g : W \to \mathbb{R}$ se tiene que $g \circ f : f^{-1}(U) \to \mathbb{R}$ es diferenciable.

2. Sean M y N dos variedades de la misma dimensión n. Si $f : M \to N$ es una función diferenciable cuya diferencial en cada punto tiene rango n, entonces $f(M)$ es un abierto de N y la correstricción $f : M \to f(M)$ es un difeomorfismo local.

3. La función

$$(x_0, \dots, x_n) \in S^{n+1} \mapsto (x_0 : \cdots : x_n) \in P^n(\mathbb{R})$$

es diferenciable. Pruebe que S^1 y $P^1(\mathbb{R})$ son variedades difeomorfas.

4. Sea $f : M \to N$ una función diferenciable entre variedades de la misma dimensión y supongamos que su dominio es compacto.

(*a*) Para cada $q \in N$ que es un valor regular de f el conjunto $f^{-1}(q)$ es finito.

(*b*) Sea R el conjunto de los valores regulares de f. El conjunto R es un abierto de N y la función

$$q \in R \mapsto \# f^{-1}(q) \in \mathbb{N}_0$$

es localmente constante. ¿Es necesariamente constante?

5. (*a*) Sean M y N variedades con $\dim M \leq \dim N$ y sea $f : M \to N$ una función diferenciable. Si $p \in M$ es un punto regular de f y (U, x) es una carta de N con $f(p) \in U$, entonces un subconjunto del conjunto $\{x^i \circ f : 1 \leq n \leq \dim N\}$ es un sistema de coordenadas para M en un entorno de p.

(*b*) Sea $f : M \to N$ una función diferenciable entre variedades. Si S una subvariedad de N tal que $f(M) \subseteq S$, entonces la correstricción $f|^S : M \to S$ es diferenciable.

Cocientes

6. Sea G un grupo discreto, sea M una variedad diferenciable y supongamos que G actúa sobre M por difeomorfismos. Decimos que la acción de G es *propiamente discontinua* si

> *todo punto $p \in M$ posee un entorno abierto U de M tal que $U \cap g(U) = \emptyset$ siempre que $g \in G \setminus \{1\}$.*

(a) Si la acción de G es propiamente discontinua, entonces es libre, esto es, vale que

si $p \in M$ y $g \in G$ son tales que $g \cdot p = 0$ entonces $g = 1$.

Recíprocamente, si el grupo G es finito y la acción libre, entonces ésta es propiamente discontinua.

(b) Si la acción de G sobre M es propiamente discontinua, entonces existe una única estructura de variedad diferenciable sobre el conjunto cociente M/G tal que la proyección canónica $\pi : M \to M/G$ es diferenciable y se tiene que

si N es una variedad diferenciable, entonces una función $f : M/G \to N$ es diferenciable si y solamente si la composición $f \circ \pi : M \to N$ es diferenciable.

7. (a) Sea G un grupo cíclico infinito y sea γ un generador de G. Hay una acción propiamente discontinua de G sobre $\mathbb{R}$ por difeomorfismos tal que cada vez que $p \in \mathbb{R}$ es

$$\gamma \cdot p = p + 1.$$

El cociente $\mathbb{R}/G$ es difeomorfo a S^1.

(b) Sea G un grupo cíclico de orden 2 y sea γ un generador de G. Hay una acción propiamente discontinua de G sobre S^n por difeomorfismos tal que para todo $p \in S^n$ es

$$\gamma \cdot p = -p.$$

El cociente S^n/G es difeomorfo al espacio proyectivo $P^n(\mathbb{R})$.

(c) Sea G un grupo cíclico infinito y sea γ un generador de G. Si $M = \mathbb{R} \times (-1, 1)$, entonces hay una accion propiamente discontinua de G sobre M por difeomorfismos tal que para cada $(x, y) \in M$ es

$$\gamma \cdot (x, y) = (-x, y + 1).$$

El cociente M/G es difeomorfo a la bande de Möbius. Si H es el subgrupo de G generado por γ^2, entonces el cociente M/G es difeomorfo a un cilindro $S \times \mathbb{R}$.

8. Sea H el conjunto de matrices de $\mathsf{GL}_2(\mathbb{R})$ de la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{*}$$

con $x, y, z \in \mathbb{R}$.

(a) Muestre que H es un subgrupo de $\mathsf{GL}_2(\mathbb{R})$ y que tiene una estructura de variedad que hace de él un grupo de Lie de dimensión 3 difeomorfo a $\mathbb{R}^3$.

(b) El subconjunto Γ de H de las matrices de la forma (*) con $x, y, z \in \mathbb{Z}$ es un subgrupo discreto. La función

$$(g, h) \in \Gamma \times H \mapsto gh \in H$$

es una acción propiamente discontinua de Γ sobre H por difeomorfismos. Muestre que la variedad cociente H/Γ es compacta. Descríbala geométricamente.

El fibrado tangente

9. Sea M una variedad diferenciable de dimensión n y $\mathscr{A}$ su atlas maximal. Sea $TM = \bigcup_{p\in M} M_p$ y sea $\pi : TM \to M$ la función tal que $\pi(v) = p$ si $v \in M_p$. Para cada $(U, x) \in \mathscr{A}$, sea $TU = \bigcup_{p\in U} M_p \subset TM$ y $\overline{x} : TU \to x(U) \times \mathbb{R}^n$ la función tal que

$$\overline{x}(v) = (x(\pi(v)), v(x^1), \dots, v(x^n))$$

cada vez que $v \in TU$.

(a) La función $\overline{x} : TU \to x(U) \times \mathbb{R}^n$ es una biyección con inversa tal que

$$\overline{x}^{-1}(a, b^1, \dots, b^n) = \sum_{i=1}^{n} b^i \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{x^{-1}(a)}$$

para cada $a \in x(U)$.

(b) Si (U, x), $(V, y) \in \mathscr{A}$ y $U \cap V \neq \emptyset$, entonces $\overline{x}(TU \cap TV) \times \mathbb{R}^n$ es un abierto de $\mathbb{R}^{2n}$ y la biyección $\overline{x} \circ \overline{y}^{-1} : y(U \cap V) \times \mathbb{R}^n \to x(U \cap V) \times \mathbb{R}^n$ es un difeomorfismo.

(c) El conjunto TM admite una estructura diferenciable que lo transforma en una variedad diferenciable de dimensión $2n$, con atlas

$$\overline{\mathscr{A}} = \{(TU, \overline{x}) : (U, x) \in \mathscr{A}\}.$$

(d) Con respecto a esta estructura diferenciable, la proyección $\pi : TM \to M$ es diferenciable.

10. Sea M una variedad diferenciable de dimensión n y $f \in C^\infty(M)$. La aplicación $df : TM \to \mathbb{R}$ es diferenciable.

11. Sea M una variedad diferenciable de dimensión n y (U, x) una carta de M. Sean $p \in U$ y $a = x(p)$. Entonces la aplicación $(x^{-1})_{*a} : \mathbb{R}^n_a \to M_p$ es tal que

$$(x^{-1})_{*a}(D_i\big|_a) = \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p$$

para todo $1 \le i \le n$.

12. Sean M y N variedades diferenciables y sea $f : M \to N$ una función diferenciable.

(a) Si f es constante, entonces $f_{*p} = 0$ para todo $p \in M$.

(b) Si M es conexa y $f_{*p} = 0$ para todo $p \in M$, entonces f es constante.

13. Calcule f_{*p} para

(a) $f = \pi_1 : M \times N \to M$;

(b) $f : S^n \to S^n_\rho$ con $f(u) = \rho u$;

(c) $f : E \to F$, una transformación lineal entre espacios vectoriales de dimensión finita dotados de su estructura usual de variedades.

14. Sean $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ y $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ las funciones definidas por

$$f(x, y) = (x^2 - 2y, 4x^3y^2),$$
$$g(u, v) = (u^2v + v^2, u - 2v^3, v\exp(u)).$$

Encuentre la matriz de $f_{*(1,2)}$ y de $g_{*(u,v)}$ y calcule $g_{*(0,1)}(4\frac{\partial}{\partial u}\big|_{(0,1)} - \frac{\partial}{\partial v}\big|_{(0,1)})$.

15. Sea M una variedad de dimensión n. Sean $\pi : TM \to M$ la proyección natural y $v \in TM$. Calcular $\pi_{*v}(\frac{\partial}{\partial \overline{x}^i}\,|_v)$ si $(TU, \overline{x})$ es la carta de TM asociada a la carta (U, x) de $\pi(v)$.

16. La variedad TS^1 es difeomorfa a $S^1 \times \mathbb{R}$.

Hassler Whitney
1907–1989, Estados Unidos