# Geometría Diferencial
## Primer Cuatrimestre — 2019

## Práctica 1: Variedades

**1.** Sea $V$ un espacio vectorial real de dimensión $n \geq 1$ y sea $\mathscr{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de $V$. Sea $\phi_{\mathscr{B}} : \mathbb{R}^n \to V$ la función tal que $\phi_{\mathscr{B}}(t_1, \dots, t_n) = \sum_{i=1}^n t_i v_i$ para cada $(t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$.

($a$) Hay una única topología que hace que $\phi_{\mathscr{B}}$ sea un homeomorfismo y esa topología no depende de la base $\mathscr{B}$ elegida.

($b$) El conjunto $\mathscr{A}_{\mathscr{B}} = \{(V, \phi_{\mathscr{B}}^{-1})\}$ es un atlas sobre $V$ y la estructura diferenciable que determina no depende de la base $\mathscr{B}$ elegida.

**2.** ($a$) Si $M$ es una variedad de dimensión $m$ y $N \subseteq M$ es un abierto no vacío, entonces $N$ tiene una estructura de variedad diferenciable de dimensión $m$ con respecto a la cual la inclusión $N \hookrightarrow M$ es una función diferenciable.

($b$) Si $n \geq 1$, el conjunto $\mathsf{GL}(n, \mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{R})$ de las matrices inversibles es una variedad diferenciable de dimensión $n^2$ de manera natural.

**3.** Construya explícitamente un atlas sobre los siguientes espacios topológicos:

($a$) el cilindro $Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$;

($b$) el toro $T^n = \underbrace{S^1 \times \cdots \times S^1}_{n \text{ factores}}$;

($c$) los espacios proyectivos $P^n(\mathbb{R})$ y $P^n(\mathbb{C})$.

**4.** ($a$) El conjunto de vectores normales unitarios a una curva regular en $\mathbb{R}^3$ tiene una estructura natural de variedad diferenciable de dimensión 2.

($b$) Sea $\Omega$ un abierto de $\mathbb{R}^n$ y sea $F : \Omega \to \mathbb{R}$ una función diferenciable que tiene a 0 como valor regular, de manera que el conjunto $M = F^{-1}(0)$ es una subvariedad de $\mathbb{R}^n$. Muestre que el conjunto $SM$ de vectores unitarios tangentes a $M$ tiene una estructura natural de variedad de dimensión $2n - 3$.

**5.** Muestre que los siguientes espacios son variedades diferenciales y determine sus dimensiones.

($a$) $\mathsf{GL}(n, \mathbb{C}) \subset M_n(\mathbb{C})$, el conjunto de las matrices complejas $n \times n$ inversibles;

($b$) $\mathsf{SL}(n, \mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{R})$, el conjunto de las matrices reales $n \times n$ de determinante 1;

($c$) $\mathsf{SL}(n, \mathbb{C}) \subset M_n(\mathbb{C})$, el conjunto de las matrices complejas $n \times n$ de determinante 1;

($d$) $\mathsf{O}(n, \mathbb{R}) \subseteq M_n(\mathbb{R})$, el conjunto de las matrices reales $n \times n$ que son ortogonales, esto es, las matrices $A$ tales que $AA^t = I$.

($e$) $\mathsf{U}(n, \mathbb{R}) \subseteq M_n(\mathbb{C})$, el conjunto de las matrices complejas $n \times n$ que son unitarias, esto es, las matrices $A$ tales que $AA^* = I$.

($f$) $\mathsf{Sp}(2n, \mathbb{R})$, el conjunto de las matrices $A \in M_{2n}(\mathbb{R})$ tales que $A\Omega A^t = \Omega$, con

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix},$$

y el conjunto $\mathsf{Sp}(2n,\mathbb{C})$ definido de manera similar pero empezando con matrices con coeficientes complejos.

**6.** Sea $M = \mathbb{R}$.

($a$) Los conjuntos $\mathscr{A} = \{(M, \mathsf{id} : M \to \mathbb{R})\}$ y $\mathscr{A}' = \{(M, \phi : t \in M \mapsto t^3 \in \mathbb{R})\}$ son dos atlas sobre $M$ que no son compatibles, de manera que los atlas maximales que los contienen son distintos y determinan variedades diferenciales $(M, \mathscr{A})$ y $(M, \mathscr{A}')$ distintas.

($b$) Las variedades diferenciales $(M, \mathscr{A})$ y $(M, \mathscr{A}')$ son difeomorfas.

**7.** Sean $M$ y $N$ variedades de dimensiones $m$ y $n$, respectivamente.

($a$) El espacio producto $M \times N$ tiene una estructura natural de variedad diferenciable de dimensión $m + n$ y con respecto a esta estructura las proyecciones $p_1 : M \times N \to M$ y $p_2 : M \times N \to N$ son funciones diferenciables.

($b$) Si $P$ es una variedad y $f : P \to M$ y $g : P \to N$ son funciones diferenciables, entonces existe exactamente una función diferenciable $h : P \to M \times N$ tal que $p_1 \circ h = f$ y $p_2 \circ h = g$.

($c$) Si $M$ es una variedad, las funciones $\mathsf{id} : M \to M$ y $\Delta : x \in M \mapsto (x, x) \in M \times M$ son diferenciables.

**8.** ($a$) Las variedades $\mathsf{GL}(n,\mathbb{R})$, $\mathsf{GL}(n,\mathbb{C})$, $\mathsf{SL}(n,\mathbb{R})$, $\mathsf{SL}(n,\mathbb{C})$, $\mathsf{O}(n,\mathbb{R})$, $\mathsf{O}(n,\mathbb{C})$, $\mathsf{Sp}(2n,\mathbb{R})$ y $\mathsf{Sp}(2n,\mathbb{C})$ son grupos de Lie cuando los dotamos del producto dado por la multiplicación matricial.

($b$) Si $G$ es un grupo de Lie, entonces la componente conexa que contiene al elemento identidad es un subgrupo abierto y cerrado de $G$.

($c$) Los grupos $\mathsf{GL}(n,\mathbb{R})$ y $\mathsf{O}(n,\mathbb{R})$ tienen dos componentes conexas y $\mathsf{GL}(n,\mathbb{R})$ y $\mathsf{SL}(n,\mathbb{R})$ son conexos.

†**9.** Sean $M$ y $N$ dos variedades. Una función $f : M \to N$ es diferenciable si y solamente si para cada función diferenciable $g : N \to \mathbb{R}$ la composición $g \circ f : M \to \mathbb{R}$ es diferenciable.

†**10.** Una variedad conexa de dimensión 1 es difeomorfa a $\mathbb{R}$ o a $S^1$.

## La topología de las variedades

**11.** Una variedad diferenciable es localmente conexa y localmente compacta.

**12.** Si $M$ es una variedad, entonces existe una sucesión $(K_n)_{n\geq1}$ de subespacios compactos de $M$ tales que $M = \bigcup_{n\geq1} M_n$ y $K_i \subseteq \operatorname{int} K_{i+1}$ para cada $i \in \mathbb{N}$.

**13.** Una variedad diferenciable es paracompacta.