Geometría Diferencial

Primer Cuatrimestre — 2019

Segundo Parcial

Apellido y nombre: ....

L.U.: .... Hojas: ....

1. Sea M una variedad riemaniana, sea ∇ la conexión de Levi–Civita de M y sea $f : M \to \mathbb{R}$ una función diferenciable.

(a) Muestre que existe un campo vectorial diferenciable $\operatorname{grad}(f) \in \mathfrak{X}(M)$ y uno solo con la propiedad de que para cada campo $Y \in \mathfrak{X}(M)$ se tiene que

$$\langle \operatorname{grad}(f), Y\rangle = df(Y).$$

Encuentre una expresión en coordenadas para el campo $\operatorname{grad}(f)$.

(b) La función

$$X \in \mathfrak{X}(M) \longmapsto \nabla_X \operatorname{grad}(f) \in \mathfrak{X}(M)$$

es autoadjunta: cada vez que X e Y son elementos de $\mathfrak{X}(M)$ se tiene que

$$\langle \nabla_X \operatorname{grad}(f), Y\rangle = \langle X, \nabla_Y \operatorname{grad}(f)\rangle.$$

Sugerencia: recuerde que la conexión ∇ tiene torsión nula y es compatible con la métrica.

(c) Muestre que si el campo $\operatorname{grad}(f)$ tiene norma constante, entonces para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$ se tiene que $\langle \nabla_{\operatorname{grad}(f)} \operatorname{grad}(f), X\rangle = 0$. Deduzca de esto que bajo esa condición las curvas integrales de $\operatorname{grad}(f)$ son geodésicas.

Solución. Si $p \in M$, la diferencial $d_p f : T_pM \to \mathbb{R}$ es lineal, así que del Teorema de Riesz sabemos que existe un único vector $\operatorname{grad}_p(f) \in T_pM$ tal que $d_p f(v) = \langle \operatorname{grad}_p(f), v\rangle$ para todo $v \in T_pM$. De esta forma obtenemos una una sección posiblemente no diferenciable $\operatorname{grad}(f) : p \in M \mapsto \operatorname{grad}_p(f) \in TM$ de la proyección $\pi : TM \to M$. Si $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ es una carta de M con campos coordenados $\partial_1, \dots, \partial_n$ y sobre U es $\operatorname{grad}(f) = X^i\partial_i$, entonces

$$g_{i,j}X^i = \langle X^i\partial_i, \partial_j\rangle = \langle X, \partial_j\rangle = df(\partial_j) = \partial_j(f),$$

de manera que $X^i = g^{i,j}\partial_j f$ y, por lo tanto, sobre U es $\operatorname{grad}(f) = g^{i,j}\partial_j(f)\partial_i$. Esto nos da una expresión local para el campo $\operatorname{grad}(f)$ y, en particular, hace evidente que se trata de un campo diferenciable.

Sean ahora X e Y dos campos sobre M. Como la conexión ∇ es compatible con la métrica, tenemos que

$$\langle \nabla_X \operatorname{grad}(f), Y\rangle + \langle \operatorname{grad}(f), \nabla_X Y\rangle = X\langle \operatorname{grad}(f), Y\rangle = X(df(Y)) = X(Y(f))$$

y, de manera similar,

$$\langle \nabla_Y \operatorname{grad}(f), X\rangle + \langle \operatorname{grad}(f), \nabla_Y X\rangle = Y(X(f)),$$

así que

$$\begin{aligned}\langle \nabla_X \operatorname{grad}(f), Y\rangle - \langle \nabla_Y \operatorname{grad}(f), X\rangle \\ &= X(Y(f)) - Y(X(f)) - \langle \operatorname{grad}(f), \nabla_X Y - \nabla_Y X\rangle \\ &= [X,Y](f) - \langle \operatorname{grad}(f), [X,Y]\rangle = 0.\end{aligned}$$

Esto nos dice que la función $X \in \mathfrak{X}(M) \mapsto \nabla_X \operatorname{grad}(f) \in \mathfrak{X}(M)$ es autoadjunta.

Supongamos ahora que la función f es tal que el campo $\operatorname{grad}(f)$ tiene norma constante. Si $X \in \mathfrak{X}(M)$, entonces

$$0 = X\langle \operatorname{grad}(f), \operatorname{grad}(f)\rangle = 2\langle \nabla_X \operatorname{grad}(f), \operatorname{grad}(f)\rangle = 2\langle \nabla_{\operatorname{grad}(f)} \operatorname{grad}(f), X\rangle$$

y como esto es así cualquiera sea X vemos que de hecho se tiene que $\nabla_{\operatorname{grad}(f)} \operatorname{grad}(f) = 0$. Si $c : (a,b) \to M$ es una curva integral del campo $\operatorname{grad}(f)$, de manera que para todo $t \in (a,b)$ se tiene que $c'(t) = \operatorname{grad}_{c(t)}(f)$, entonces

$$(\nabla_{c'} c')_t = (\nabla_{\operatorname{grad}(f)} \operatorname{grad}(f))_{c(t)} = 0$$

y, en consecuencia, c es una geodésica. □

2. Sean M y N dos variedades compactas, conexas, orientadas y de la misma dimensión n y sea $f : M \to N$ una función diferenciable.

(a) Muestre que hay un número real $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que para toda forma $\omega \in \Omega^n(N)$ se tiene

$$\int_M f^*(\omega) = \lambda \int_N \omega.$$

Lo llamamos el *grado* de f y lo escribimos $\deg(f)$.

(b) Supongamos que $q \in N$ es un valor regular de f, de manera que, particular, el conjunto $f^{-1}(q)$ es finito. Si $p \in f^{-1}(q)$ la diferencial $d_p f : T_p M \to T_q N$ es entonces un isomorfismo de espacios vectoriales y podemos considerar el número

$$\operatorname{sgn}_f(p) = \begin{cases} +1 & \text{si } d_p f \text{ preserva la orientación;} \\ -1 & \text{si la invierte;}\end{cases}$$

ya que esas son las dos únicas posibilidades.

Muestre que

$$\deg(f) = \sum_{p \in f^{-1}(q)} \operatorname{sgn}_f(p).$$

3. Muestre que cuando $n \geq 2$ el grado de toda función diferenciable $f : S^n \to T^n$ del n-toro a la n-espera es nulo.

Sugerencia: determine el morfismo $f^* : H^\bullet(T^n) \to H^\bullet(S^n)$ usando el hecho de que se trata de un morfismo de álgebras.

Solución. Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ sea $\pi_i : T^n \to S^1$ la n-ésima proyección y sea $\omega \in \Omega^1(S^1)$ una forma de volumen. Del Teorema de Künneth sabemos que $H^\bullet(T^n)$ está generado como álgebra por las clases de las 1-formas $\omega_1 = \pi_1^*(\omega), \dots, \omega_n = \pi_n^*(\omega)$ y que, en particular, $H^n(T^n)$ está libremente generado por la clase de $\nu = \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_n$. Sea $f : S^n \to T^n$ una función diferenciable. La función $f^* : H^1(T^n) \to H^1(S^n)$ es nula, simplemente porque su codominio es el espacio nulo, y como $f^* : H^\bullet(T^n) \to H^\bullet(S^n)$ es un morfismo de álgebras, se sigue de ello que

$$f^*([\nu]) = f^*([\omega_1]) \wedge \cdots \wedge f^*([\omega_n]) = 0,$$

porque todos los factores se anulan. Esto nos dice que la función $f^* : H^n(T^n) \to H^n(S^n)$ es nula y, por lo tanto, que el grado de f es nulo.

4. Sea M una variedad compacta, orientable y conexa de dimensión n. Sabemos que la cohomología de De Rham de M tiene entonces dimensión total finita, y podemos en consecuencia considerar el entero

$$\chi(M) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \dim H^i(M),$$

al que llamamos la *característica de Euler* de M.

(a) Si la dimensión n de M es impar, entonces $\chi(M) = 0$.

(b) Si la dimensión n de M es par y la de $H^{n/2}(M)$ es par, entonces $\chi(M)$ es un entero par.

Solución. Como M es conecta, compacta y orientable, el Teorema de Dualidad de Poincaré y el hecho de que la cohomología tiene dimensión total finita implican que para todo $i \in \mathbb{N}_0$ hay un isomorfismo $H^i(M) \cong H^{n-i}(M)$. Si n es impar, digamos $n = 2m+1$, entonces

$$\begin{aligned}
\chi(M) &= \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \dim H^i(M) + \sum_{i=m+1}^{2m+1} (-1)^i \dim H^i(M) \\
&= \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \dim H^i(M) + \sum_{i=0}^{m} (-1)^{n-i} \dim H^{n-i}(M) \\
&= \sum_{i=0}^{m} ((-1)^i + (-1)^{n-i}) \dim H^i(M) = 0,
\end{aligned}$$

ya que cada coeficiente de esta suma se anula. Si en cambio n es par, digamos $n = 2m$, entonces

$$\begin{aligned}
\chi(M) &= \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i \dim H^i(M) + (-1)^m \dim H^m(M) + \sum_{i=m+1}^{2m} (-1)^i \dim H^i(M) \\
&= \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i \dim H^i(M) + (-1)^m \dim H^m(M) + \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^{n-i} \dim H^{n-i}(M) \\
&= 2\sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i \dim H^i(M) + (-1)^m \dim H^m(M),
\end{aligned}$$

de manera que $\chi(M)$ y $\dim H^{n/2}(M)$ tienen la misma paridad. □

5. Sea G un grupo de Lie de dimensión n, sea $\mathfrak{g} = T_e G$ su álgebra de Lie y fijemos un producto interno $g_e : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$ sobre $\mathfrak{g}$

(a) Hay una única métrica riemanniana g sobre G que es invariante a izquierda y cuyo valor en $e \in G$ es g_e.

(b) Sea $\mathscr{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de $\mathfrak{g}$ y sean $X_1, \dots, X_n$ los campos tangentes a G invariantes a izquierda que extienden a los elementos de $\mathscr{B}$. Muestre que para cada i, j, es *constante* la función $g_{i,j} = g(X_i, X_j)$.

Sabemos (porque el corchete de Lie de campos invariantes a izquierda es él mismo invariante a izquierda) que existen constantes $c_{i,j}^k$ tales que

$$[X_i, X_j] = \sum_k c_{i,j}^k X_k.$$

Calcule en términos de los escalares $c_{i,j}^k$ y $g_{i,j}$ los símbolos de Christoffel Γ_{ij}^k de la conexión de Levi-Cività de G con respecto a los campos $X_1, \dots, X_n$, de manera que se tenga

$$\nabla_{X_i} X_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k X_k.$$

(c) Sea $G = \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}$ el grupo de Lie con producto dado por

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac, ad + b)$$

para cada (a, b), $(c, d) \in G$, de manera que G es isomorfo de la forma evidente al grupo de matrices

$$\left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) : a > 0, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

El elemento neutro de G es $e = (1, 0)$, y su álgebra de Lie $\mathfrak{g} = T_e G$ se identifica de manera natural (porque G es un abierto de $\mathbb{R}^2$) con $\mathbb{R}^2$. Dotemos a G de su única métrica invariante a izquierda que en $T_e G$ restringe al producto interno usual de $\mathbb{R}^2$. Encuentre todas las geodésicas pasan por e que pueda.

Calcule (las componentes en una carta del) tensor de curvatura $R(X, Y)Z$ sobre G y la *curvatura escalar*

$$K(p) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{1 \le i, j \le n} g(R(z_i, z_j) z_i, z_j)$$

para cada $p \in G$, con $\{z_1, \dots, z_n\}$ una base ortonormal de $T_p G$.

Solución. Sea g_e un producto interno en $T_e G$. Si $p \in G$ y v, $w \in T_p G$, entonces ponemos

$$g_p(v, w) = g_e(dL_{p^{-1}}(v), dL_{p^{-1}}(w)). \tag{1}$$

Como la diferencial $dL_{p^{-1}} : T_p G \to T_e G$ de la traslación $L_p : q \in G \mapsto pq \in G$ es un isomorfismo de espacios vectoriales (porque L_p es un difeomorfismo), es claro que g_p es un producto interno en $T_p G$. Para ver que la asignación $p \in G \mapsto g_p$ define una métrica riemanniana, tenemos que mostrar que es diferenciable, esto es, que cada vez que X e Y son campos sobre G se tiene que la función

$$p \in G \mapsto g_p(X_p, Y_p) \in \mathbb{R} \tag{2}$$

es diferenciable. Ahora bien, todo campo sobre G es combinación lineal de campos invariantes a izquierda con coeficientes en $C^\infty(M)$, así que como la función (2) depende

$C^\infty(M)$-linealmente de X e Y, es suficiente considerar el caso en que X e Y son ellos mismos invariantes izquierda. Pero en ese caso para todo $p \in G$ se tiene que

$$g_p(X_p, Y_p) = g_e(dL_{p^{-1}}(X_p), dL_{p^{-1}}(Y_p)) = g_e(X_e, Y_e),$$

así que la función en cuestión es, de hecho constante. Tenemos así una métrica riemaniana sobre g, como queríamos y, más aun, se trata de una métrica invariante a izquierda: esto es consecuencia inmediata de (1).

Sea ahora $\{X_1, \dots, X_n\}$ una base de campos invariantes a izquierda. Para cada par de índices es constante a función $\langle X_i, X_j \rangle$, como viemos recién, así que

$$\begin{aligned} 0 &= X_i\langle X_j, X_k\rangle - X_k\langle X_i, X_j\rangle - X_j\langle X_k, X_i\rangle \\ &= \langle \nabla_{X_i} X_j, X_k\rangle + \langle X_j, \nabla_{X_i} X_k\rangle - \langle \nabla_{X_k} X_i, X_j\rangle - \langle X_i, \nabla_{X_k} X_j\rangle \\ &\qquad\qquad - \langle \nabla_{X_j} X_k, X_i\rangle - \langle X_k, \nabla_{X_j} X_i\rangle \\ &= \langle [X_i, X_j], X_k\rangle + \langle X_j, [X_i, X_k]\rangle + \langle X_i, [X_j, X_k]\rangle - 2\langle \nabla_{X_j} X_k, X_i\rangle \end{aligned}$$

de manera que

$$\begin{aligned} 2g_{li}\Gamma^l_{jk} = 2\langle \nabla_{X_j} X_k, X_i\rangle &= \langle [X_i, X_j], X_k\rangle + \langle X_j, [X_i, X_k]\rangle + \langle X_i, [X_j, X_k]\rangle \\ &= g_{lk}c^l_{ij} + g_{jl}c^l_{ik} + g_{il}c^l_{jk} \end{aligned}$$

y, por lo tanto,

$$\Gamma^r_{jk} = \frac{1}{2} g^{ri}(g_{lk}c^l_{ij} + g_{jl}c^l_{ik} + g_{il}c^l_{jk}).$$

Consideremos ahora $G = \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}$ con la multiplicación descripta en el enunciado. Se trata de un abierto de $\mathbb{R}^2$, así que tenemos un sistema de coordenadas estándar dado por la inclusión $G \hookrightarrow \mathbb{R}^2$. Sea $e(1,0)$ el elemento neutro de G y sean x^1, $x^2 : G \to \mathbb{R}$ las funciones coordenadas. Si $Y = Y^1\partial_1 + Y^2\partial_2$ es un campo sobre G, $g = (a, b)$ un elemento de G y $L_g : G \to G$ la correspondiente translación a izquierda, que tiene $L_g(c, d) = (ac, ad + b)$ para todo $(c, d) \in G$, entonces $dL_g(\partial_1) = x^1\partial_1$ y $dL_g(\partial_2) = x^1\partial_1$, así que

$$dL_g(Y_e) = aY^1(1,0)\partial_1 + aY^2(1,0)\partial_2.$$

Esto nos dice que Y es invariante a izquierda si y solamente si $Y^1(a, b) = aY^1(1,0)$ y $Y^2(a, b) = aY^2(1,0)$ para todo $(a, b) \in G$, y esto ocurre si y solamente si Y es combinación lineal con coeficientes en $\mathbb{R}$ de los campos

$$X_1 = x^1\partial_1, \qquad X_2 = x^1\partial_2.$$

Vemos así que $\{X_1, X_2\}$ es una base del álgebra de Lie de G. Para determinar su corchete de Lie es suficiente calcular que

$$[X_1, X_2] = [x^1\partial_1, x^1\partial_2] = x^1\partial_2 = X_2.$$

Como consecuencia de esto, si escribimos $[X_i, X_j] = c^k_{ij}X_k$, entonces los únicos coeficientes de estructura no nulos son

$$c^2_{12} = 1, \qquad c^2_{21} = -1.$$

Como los vectores $(X_1)_e$ y $(X_2)_e$ son ortonormales y los campos X_1 y X_2 invariantes a izquierda, tenemos que los campos X_1 y X_2 son ortonormales en cada punto de G. En otras palabras, los coeficientes de la métrica riemaniana con respecto a los campos X_1 y X_2 son $g_{i,j} = \delta_{i,j}$. Se sigue de esto que

$$\Gamma^r_{jk} = \frac{1}{2} g^{ri}(g_{lk}c^l_{ij} + g_{jl}c^l_{ik} + g_{il}c^l_{jk}) = \frac{1}{2}\delta^{ri}(\delta_{lk}c^l_{ij} + \delta_{jl}c^l_{ik} + \delta_{il}c^l_{jk}) = \frac{1}{2}(c^k_{rj} + c^j_{rk} + c^r_{jk}).$$

Sabemos no hay exactamente uno de i, j y k quer es igual a 1, entonces $c_{ij}^k = 0$: se sigue que bajo esa condición también $\Gamma_{ij}^k = 0$. Los otros coeficientes de Christoffel que tenemos que calcular son

$$\begin{aligned}
\Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{2}(c_{21}^2 + c_{22}^1 + c_{12}^2) = 0, \\
\Gamma_{21}^2 &= \frac{1}{2}(c_{22}^1 + c_{21}^2 + c_{21}^2) = -1, \\
\Gamma_{22}^1 &= \frac{1}{2}(c_{12}^2 + c_{12}^2 + c_{22}^1) = 1.
\end{aligned}$$

Esto nos dice que

$$\nabla_{X_1} X_1 = \nabla_{X_1} X_2 = 0, \qquad \nabla_{X_2} X_1 = -X_2, \qquad \nabla_{X_2} X_2 = X_1.$$

Si escribimos a las funciones coordenadas u e v en lugar de x^1 y x^2, de esto se sigue que

$$\begin{aligned}
&0 = \nabla_{X_1} X_1 = \nabla_{u\partial_1}(u\partial_1) = u\partial_1 + u^2 \nabla_{\partial_1} \partial_1, \\
&0 = \nabla_{X_1} X_2 = \nabla_{u\partial_1}(u\partial_2) = u\partial_2 + u^2 \nabla_{\partial_1} \partial_2, \\
&-u\partial_2 = -X_2 = \nabla_{X_2} X_1 = \nabla_{u\partial_2}(u\partial_1) = u^2 \nabla_{\partial_2} \partial_1, \\
&u\partial_1 = X_1 = \nabla_{X_2} X_2 = \nabla_{u\partial_2}(u\partial_2) = u^2 \nabla_{\partial_2} \partial_2,
\end{aligned}$$

así que

$$\nabla_{\partial_1} \partial_1 = -\frac{1}{u}\partial_1, \qquad \nabla_{\partial_1} \partial_2 = -\frac{1}{u}\partial_2, \qquad \nabla_{\partial_2} \partial_1 = -\frac{1}{u}\partial_2, \qquad \nabla_{\partial_2} \partial_2 = \frac{1}{u}\partial_1$$

Una curva $c : t \in \mathbb{R} \mapsto (u(t), v(t)) \in G$ es una geodésica, entonces, si y solamente si

$$u'' - \frac{1}{u}u'^2 + \frac{1}{u}v'^2 = 0, \qquad v'' - \frac{2}{u}u'v' = 0.$$

o, equivalentemente,

$$uu'' - u'^2 + v'^2 = 0, \qquad uv'' = 2u'v'. \tag{3}$$

De la segunda ecuación se sigue que

$$(\ln v')' = v''/v' = 2u'/u = (\ln u^2)'$$

así que existe un número real a tal que $\ln v' = a + \ln u^2$ y, por lo tanto, llamando λ a e^a, que es un número positivo,

$$v' = \lambda u^2. \tag{4}$$

Reemplanzando esta expresión para v' en la primera ecuación de (3), vemos que

$$uu'' - u'^2 + \lambda^2 u^4 = 0. \tag{5}$$

En esta ecuación no aparece la variable independiente explícitamente, así que podemos reducir su orden por un cambio de variables estándar. Supongamos que tenemos una solución u definida en un intervalo abierto I que contiene a t_0 y que $u'(t_0) \neq 0$, de manera que, a menos de reemplazar el intervalo por uno más chico, podemos suponer que u es inversible en I. Consideremos la función $p = u' \circ u^{-1}$, que está definida en un entorno abierto J de $s_0 = u(t_0)$. Como $p(u(t)) = u'(t)$ cerca de t_0, derivando tenemos que

$$u''(t) = p'(u(t))u'(t)$$

y, por lo tanto, para s cerca de s_0 es

$$u''(u^{-1}(s)) = p'(s)u'(u^{-1}(s)) = p'(s)p(s).$$

Si evaluamos el miembro izquierdo de la ecuación (5) en $u^{-1}(s)$ vemos que

$$0 = u(u^{-1}(s))u''(u^{-1}(s)) - u'(u^{-1}(s))^2 + \lambda^2 u(u^{-1}(s))^4 = sp'(s)p(s) - p(s)^2 + \lambda^2 s^4.$$

Vemos así que la función $q = p^2$ satisface la ecuación

$$\frac{s}{2}q' - q = -\lambda^2 s^4. \tag{6}$$

Esta es una ecuación diferencial de primer orden lineal no homogénea. La ecuación homogénea correspondiente es

$$\frac{s}{2}q' - q = 0,$$

que se integra d emanera trivial: la solución general es $q = as^2$ con a un número real. Para encontrar una solución de la ecuación no homogénea original, usamos el método de variación de las constantes: buscamos una solución de (6) de la forma $q_0 = \alpha(s)s^2$ con α una cierta función. Reemplazando en (6), vemos que necesitamos elegir la función α de manera que

$$-\lambda^2 s^4 = \frac{s}{2}(\alpha(s)s^2)' - \alpha(s)s^2 = \frac{s}{2}\alpha'(s)s^2 = \frac{s^3}{2}\alpha'(s).$$

Por supuesto, podemos elegir

$$\alpha(s) = -\lambda^2 s^2.$$

La correspondiente solución de (6) es $q_0(s) = -\lambda^2 s^4$. Concluimos así que la solución general de la ecuación no homogénea es de la forma

$$q(s) = as^2 - \lambda^2 s^4$$

con $a \in \mathbb{R}$ un número arbitrario. Esto significa que

$$u'(u^{-1}(s))^2 = p(s)^2 = as^2 - \lambda^2 s^4.$$

Evaluando esto en $s = u(t)$, vemos que

$$u'^2 = au^2 - \lambda u^4.$$

En esta ecuación podemos separar las variables, obteniendo la ecuación equivalente

$$\frac{du}{u\sqrt{a - \lambda u^2}} = dt$$

e integrando vemos que

$$\frac{1}{\sqrt{a}} \ln \frac{u}{a + \sqrt{a^2 - a\lambda u}} =$$

Es fácil despejar en esta ecuación u en función de t:

$$u(t) = \frac{2ae^{\sqrt{a}t}}{a\lambda e^{2\sqrt{a}t} + 1}$$

Recordando ahora la ecuación (4), tenemos que

$$v' = \lambda \frac{4a^2 e^{2\sqrt{a}t}}{(a\lambda e^{2\sqrt{a}t} + 1)^2}$$

e, integramdo,

$$v(t) = -\frac{2\sqrt{a}}{a\lambda e^{2\sqrt{a}t} + 1}$$

6. Sea M una variedad compacta y orientable de dimensión $4k$.

(a) Muestre que hay una función bilineal no degenerada y simétrica

$$\sigma : H^{2k}(M) \times H^{2k}(M) \to \mathbb{R}$$

tal que si ω y η son elementos cerrados de $\Omega^{2k}(M)$ entonces

$$\beta([\omega],[\eta]) = \int_M \omega \wedge \eta.$$

Llamamos a la signatura[1] de la forma bilineal σ la *signatura* de M.

(b) Determine la signatura de S^4, de $S^2 \times S^2$, del toro T^4, del espacio proyectivo $P^2_{\mathbb{C}}$ y el producto $P^2_{\mathbb{C}} \times P^2_{\mathbb{C}}$.

7. Sea $M \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie orientada y sin borde dotada de su métrica riemanianna inducida por la de $\mathbb{R}^3$ y supongamos que hay un campo vectorial $Z \in \mathfrak{X}(M)$ sobre M que no se anula en ningún punto.

(a) Muestre que existe una única forma de elegir campos X, $Y \in \mathfrak{X}(M)$ tales que para cada $p \in M$ se tiene que (X_p, Y_p) es una base ortonormal positiva de T_pM y $Z_p = \|Z_p\| X_p$.

(b) Hay 1-formas α, $\beta \in \Omega^1(M)$ tales que $\alpha(X) = \beta(Y) = 1$ y $\alpha(Y) = \alpha(X) = 0$. Más aún, existe una forma $\eta \in \Omega^1(M)$ tal que

$$d\alpha = \eta \wedge \beta, \qquad d\beta = -\eta \wedge \alpha.$$

La forma $\sigma = \alpha \wedge \beta$ no depende de la elección de Z, es una forma de volumen sobre M que determina su orientación y es, de hecho, la forma de volumen riemanianno sobre M.

(c) Existe una función diferenciable $K : M \to \mathbb{R}$ tal que

$$d\eta = -K \cdot \sigma$$

y esta función no depende de la elección del campo Z.

(d) Si M es compacta, entonces $\displaystyle\int_M K \cdot \sigma = 0$.

(e) Usando los resultados anteriores, muestre que no hay sobre S^2 un campo vectorial tangente que no se anula en ningún punto.

[1] Sea $\sigma : V \to V \to \mathbb{R}$ una forma bilineal simétrica y no degenerada definida sobre un espacio vectorial real V de dimensión finita y sea $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V y sea $A = (a_{i,j})$ la matriz con $a_{i,j} = \sigma(v_i, v_j)$. La signatura de σ es la diferencia $r - s$, con r el número de autovalores positivos de A y s el de autovalores negativos de A.