Geometría Diferencial
Primer Cuatrimestre — 2019

Primer Parcial

Apellido y nombre: ....
L.U.: .... Hojas: ....

1. Sea M una variedad diferenciable y $\omega \in \Omega^1(M)$ una 1-forma diferencial. Pruebe que cada vez que X e Y son campos tangentes diferenciables sobre M se tiene que

$$d\omega(X,Y) = X\omega(Y) - Y\omega(X) - \omega([X,Y]).$$

Solución. Sea $\omega \in \Omega^1(M)$ y sean X, $Y \in \mathfrak{X}(M)$. Sea $p \in M$ y fijemos una carta $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ definida en un entorno abierto U de P. Si $x^1, \dots, x^n : U \to \mathbb{R}^n$ son las funciones coordenadas de ϕ y $\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}$ los correspondientesa campos coordenados, sabemos que existen funciones $\omega^1, \dots, \omega^n$, $X_1, \dots, X_n$, $Y_1, \dots, Y_n$ en $C^\infty(U)$ tales que

$$\omega = \sum_{i=1}^n \omega^i dx^i, \qquad X = \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial}{\partial x^i}, \qquad Y = \sum_{i=1}^n Y_i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Es

$$d\omega = \sum_{i=1}^n d\omega^i \wedge dx^i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial \omega^i}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^i = \sum_{1 \le i < j \le n} \left(\frac{\partial \omega^j}{\partial x^i} - \frac{\partial \omega^i}{\partial x^j} \right) dx^i \wedge dx^j$$

y cada vez que $1 \le i < j \le n$ es

$$(dx^i \wedge dx^j)(X,Y) = dx^i(X)dx^j(Y) - dx^j(X)dx^i(Y) = X_i Y_j - X_j Y_i,$$

así que

$$\begin{aligned} d\omega(X,Y) &= \sum_{1 \le i < j \le n} \left(\frac{\partial \omega^j}{\partial x^i} - \frac{\partial \omega^i}{\partial x^j} \right) dx^i \wedge dx^j(X,Y) \\ &= \sum_{1 \le i < j \le n} \left(\frac{\partial \omega^j}{\partial x^i} - \frac{\partial \omega^i}{\partial x^j} \right) (X_i Y_j - X_j Y_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial \omega^j}{\partial x^i} - \frac{\partial \omega^i}{\partial x^j} \right) X_i Y_j. \end{aligned} \tag{1}$$

Por otro lado,

$$\omega(Y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \omega^i dx^i \left(Y_j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \sum_{i=1}^n \omega^i Y_i$$

y

$$X\omega(Y) = \sum_{j=1}^n X_j \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\sum_{i=1}^n \omega^i Y_i \right) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n X_j \left(\frac{\partial \omega^i}{\partial x^j} Y_i + \omega^i \frac{\partial Y_i}{\partial x^j} \right).$$

De manera similar,

$$Y\omega(X) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n Y_i \left(\frac{\partial \omega^j}{\partial x^i} X_j + \omega^j \frac{\partial X_j}{\partial x^i} \right),$$

así que

$$\begin{aligned}
&X\omega(Y)-Y\omega(X)\\
&\quad=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}X_j\left(\frac{\partial\omega^i}{\partial x^j}Y_i+\omega^i\frac{\partial Y_i}{\partial x^j}\right)-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}Y_i\left(\frac{\partial\omega^j}{\partial x^i}X_j+\omega^j\frac{\partial X_j}{\partial x^i}\right),\\
&\quad=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\omega^i}{\partial x^j}-\frac{\partial\omega^j}{\partial x^i}\right)X_jY_i+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\omega^i\left(X_j\frac{\partial Y_i}{\partial x^j}-Y_j\frac{\partial X_i}{\partial x^j}\right). \qquad (2)
\end{aligned}$$

Finalmente, usando la expresión en coordenadas para el corchete de Lie vemos que sobre el abierto U es

$$[X,Y]=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(X_j\frac{\partial Y_i}{\partial x^j}-Y_j\frac{\partial X_i}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial x^i},$$

de manera que

$$\begin{aligned}
\omega([X,Y])&=\sum_{k=1}^{n}\omega^k dx^k\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(X_j\frac{\partial Y_i}{\partial x^j}-Y_j\frac{\partial X_i}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial x^i}\right)\\
&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\omega^i\left(X_j\frac{\partial Y_i}{\partial x^j}-Y_j\frac{\partial X_i}{\partial x^j}\right). \qquad (3)
\end{aligned}$$

Usando ahora las expresiones (1), (2) y (3), vemos que sobre U es

$$d\omega(X,Y)=X\omega(Y)-Y\omega(X)-\omega([X,Y]),$$

como queremos. □

Solución. Para cada variedad M escribamos $\mathscr{V}(M)$ al subconjunto de $\Omega^1(M)$ de las 1-formas ω sobre M tales que para cada par de campos X e Y sobre M se tiene que

$$d\omega(X,Y)=X\omega(Y)-Y\omega(X)-\omega([X,Y]).$$

Para probar la afirmación del ejercicio tenemos que mostrar que, de hecho, $\mathscr{V}(M)=\Omega^1(M)$ para cualquier variedad M. Empezemos mostrando que

$$\textit{para cada } M \textit{ el subconjunto } \mathscr{V}(M) \textit{ de } \Omega^1(M) \textit{ es un } S^\infty(M)\textit{-submódulo.} \qquad (4)$$

Sea para ello M una variedad, sean ω y η elementos de $\mathscr{V}(M)$ y sea $f\in C^\infty(M)$. Por un lado, tenemos que si X e Y son elementos de $\mathfrak{X}(M)$, es

$$\begin{aligned}
&d(\omega+\eta)(X,Y)-X(\omega+\eta)(Y)+Y(\omega+\eta)(X)+(\omega+\eta)([X,Y])\\
&\qquad=(d\omega(X,Y)-X\omega(Y)+Y\omega(X)+\omega([X,Y]))\\
&\qquad\qquad+(d\eta(X,Y)-X\eta(Y)+Y\eta(X)+\eta([X,Y]))\\
&\qquad=0,
\end{aligned}$$

y esto implica que $\omega+\eta\in\mathscr{V}(M)$. Por otro lado, para cada par de campos X e Y sobre M

tenemos que

$$\begin{aligned}
&d(f\omega)(X,Y) - X(f\omega)(Y) + Y(f\omega)(X) + f\omega([X,Y]) \\
&\quad = (df \wedge \omega)(X,Y) + f\,d\omega(X,Y) - X(f\omega(Y)) + Y(f\omega(X)) + f\omega([X,Y]) \\
&\quad = df(X)\omega(Y) - df(Y)\omega(X) + f\,d\omega(X,Y) \\
&\qquad\quad - Xf\,\omega(Y) - fX\omega(Y) + Yf\,\omega(X) + fY\omega(X) + f\omega([X,Y]) \\
&\quad = \big(df(X) - Xf\big)\omega(Y) - \big(df(Y)\omega(X) - Yf\big)\omega(X) \\
&\qquad\quad + f\big(d(f\omega)(X,Y) - X(f\omega)(Y) + Y(f\omega)(X) + f\omega([X,Y])\big) \\
&\quad = 0,
\end{aligned}$$

por la forma en que la forma df está definida y la hipótesis de que ω pertenece a $\mathscr{V}(M)$, y esto nos dice que $f\omega \in \mathscr{V}(M)$. Esto completa la prueba de la afirmación (4) de arriba.

En segundo lugar, mostremos que

Una forma $\omega \in \Omega^1(M)$ pertenece a $\mathscr{V}(M)$ si para cada $p \in M$ hay un abierto U tal que $p \in U$ y $\omega|_U \in \mathscr{V}(U)$. (5)

Sea entonces ω una 1-forma sobre M que satisface la condición de (5) y sean X e Y dos campos sobre M. Sea p un punto de M y sea U un entorno abierto de p en M tal que $\omega|_U \in \mathscr{V}(U)$. Sabemos que

$$\begin{aligned}
\big(d\omega(X,Y)\big)\big|_U &= d(\omega|_U)(X|_U, Y_U), \\
\big(X\omega(Y)\big)\big|_U &= (X|_U)(\omega|_U)(Y|_U), \\
\big(Y\omega(X)\big)\big|_U &= (Y|_U)(\omega|_U)(X|_U), \\
\big(\omega([X,Y])\big(\big)\big|_U &= (\omega|_U)([X|_U, Y|_U]),
\end{aligned}$$

porque la diferencial exterior, la evaluación de 1-formas en campos, la evaluación de campos en funciones y el corchete de Lie son operaciones que conmutan con la restricción a abiertos. Se sigue entonces que

$$\begin{aligned}
&\big(d(f\omega)(X,Y) - X(f\omega)(Y) + Y(f\omega)(X) + f\omega([X,Y])\big)\big|_U \\
&\qquad = d(\omega|_U)(X|_U, Y_U) - (X|_U)(\omega|_U)(Y|_U) + (Y|_U)(\omega|_U)(X|_U) + (\omega|_U)([X|_U, Y|_U])
\end{aligned}$$

y esta última expresión se anula porque $\omega|_U \in \mathscr{V}(U)$. Vemos así que la función

$$d\omega(X,Y) - X\omega(Y) + Y\omega(X) + \omega([X,Y])$$

se anula en un entorno de cada punto de M, así que es idénticamente nula: esto implica, claro, que $\omega \in \mathscr{V}(M)$.

Finalmente, probemos que

para toda variedad M se tiene que $\mathscr{V}(M) = \Omega^1(M)$,

que es lo que afirma el ejercicio. Sea M una variedad. De acuerdo a (5), es suficiente con mostrar que cada punto de M posee un entorno U tal que $\mathscr{V}(U) = \Omega^1(U)$. Sea, entonces, $p \in M$ y sea $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ una carta de M con $p \in U$ y sean $\phi^1, \ldots, \phi^n : U \to \mathbb{R}$ las funciones coordenadas de ϕ. Queremos probar que $\mathscr{V}(U) = \Omega^1(U)$. Como $\mathscr{V}(U)$ es un $C^\infty(U)$-submódulo de $\Omega^1(U)$ y $\Omega^1(U)$ está generado como $C^\infty(U)$-módulo por las formas coordenadas $d\phi^1, \ldots, d\phi^n$, alcanzará con que probemos que cada una de estas últimas está en $\mathscr{V}(U)$. Sea entonces $i \in \{1, \ldots, n\}$ y sea $\omega = d\phi^i$. Si X e Y son campos sobre U, tenemos que

$$d\omega(X,Y) = dd\phi^1(X,Y) = 0$$

simplemente porque $dd = 0$,

$$X\omega(Y) = X\,d\phi^i(Y) = X(Y(\phi^i))$$

y, de manera similar,

$$Y\omega(X) = Y(X(\phi^i)),$$

y, finalmente,

$$\omega([X,Y]) = d\phi^i([X,Y]) = [X,Y]\phi^i.$$

En vista de todo esto, tenemos que

$$\begin{aligned} &d\omega(X,Y) - X\omega(Y) + Y\omega(X) + \omega([X,Y]) \\ &\quad = -X(Y(\phi^i)) + Y(X(\phi^i)) + [X,Y]\phi^i = 0, \end{aligned}$$

por la forma en que definimos al corchete de Lie. Esto completa la prueba del ejercicio. □

2. Muestre que la función

$$f : (x:y:z) \in \mathbf{P}^2_{\mathbb{R}} \longmapsto (x^2 : y^2 : z^3 : xy : xz : yz) \in \mathbf{P}^5_{\mathbb{R}}$$

es una inmersión, esto eso, que es diferenciable, inyectiva, y que su diferencial es inyectiva en cada punto.

Solución. Mostremos primero que se trata de una función inyectiva. Supongamos que $(x:y:z)$ y $(u:v:w)$ son puntos de $\mathbf{P}^2_{\mathbb{R}}$ que tienen la misma imagen por f, de manera que

$$(x^2 : y^2 : z^3 : xy : xz : yz) = (u^2 : v^2 : w^3 : uv : uw : vw).$$

Existe entonces un escalar no nulo $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$x^2 = \lambda u^2, \quad u^2 = \lambda v^2, \quad z^2 = \lambda w^2, \quad xy = \lambda uv, \quad xz = \lambda uw, \quad yz = \lambda vw. \tag{6}$$

Alguna de las coordenadas x, y y z es no nula: supongamos, por ejemplo, que $x \neq 0$. En ese caso la ecuación $x^2 = \lambda u^2$ nos dice que $u \neq 0$ y que $\lambda = (x/u)^2$. Reemplazando esta expresión para λ en la cuarta y en la quinta ecuación de (6) vemos que

$$uy = xv, \qquad uz = xw, \tag{7}$$

y se sigue de estas dos que $ux \cdot yw = ux \cdot xz$. Como $ux \neq 0$, tenemos entonces que $yw = xzu$. Esta ecuación y las dos de (7) nos dicen que la matriz $\left(\begin{smallmatrix} x & y & z \\ u & v & w \end{smallmatrix}\right)$ tiene rango como mucho 1. Pero cada una de sus filas es no nula, así que el rango es exactamente 1 y, más aún, sus filas son proporcionales: esto significa, precisamente, que $(x:y:z) = (u:v:w)$.

Veamos, en segundo lugar, que la función f es diferenciable. Para ello bastará ver que sus restricciones a los tres abiertos coordenados usuales de $\mathbf{P}^2_{\mathbb{R}}$ son diferenciables y, por simetría, bastará que consideremos su restricción al abierto $U = \{(x:y:z) \in \mathbf{P}^2_{\mathbb{R}} : x \neq 0\}$. Ahora bien, la función $\phi : (x:y:z) \in U \mapsto (y/x, z/x) \in \mathbb{R}^2$ es una carta con inversa $\phi^{-1} : (s,t) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (1:s:t) \in U$. Por la forma de f, es evidente que la imagen de U por f está contenida en el abierto

$$V = \{(q_0 : \cdots : q_5) \in \mathbf{P}^5_{\mathbb{R}} : q_0 \neq 0\},$$

que es el dominio de la carta

$$\psi : (q_0 : \cdots : q_5) \in V \mapsto (q_1/q_0, \ldots, q_5/q_0) \in \mathbb{R}^5.$$

Para ver que f es diferenciable en U, entonces, es suficiente observar que la composición

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1} : (s,t) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (s^2, t^2, s, t, st) \in \mathbb{R}^5$$

es diferenciable. Más aún, esta última composición tiene matriz jacobiana

$$\begin{pmatrix} 2s & 0 \\ 0 & 2t \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ t & s \end{pmatrix},$$

que evidentemente tiene rango 2: esto implica que la diferenciable de f en cada punto de U es inyectiva. □

3. Sea M una variedad. Muestre que TM es una variedad orientable y que para cada difeomorfismo $f : M \to M$ la diferencial $df : TM \to TM$ preserva orientaciones.

4. Si M es una variedad y $\omega \in \Omega^1(M)$, decimos que una curva $\gamma : (a,b) \to M$ definida en un intervalo abierto (a,b) no vacío de $\mathbb{R}$ es una ***curva integral*** de ω si se tiene que $\gamma^*(\omega) = 0$.

(a) Si $f \in C^\infty(M)$, entonces toda curva integral de la 1-forma $df \in \Omega^1(M)$ tiene imagen contenida en una superficie de nivel de f.

(b) Determine las curvas integrales de la 1-forma

$$2x\cos(y)dx - x^2\sin(y)dy \in \Omega^1(\mathbb{R}^2).$$

Solución. (a) Sea $f \in C^\infty(M)$ y sea $\gamma : (a,b) \to M$ una curva integral de la 1-forma df. Sea t la función coordenada estándar de (a,b) y sea $\frac{\partial}{\partial t}$ el correspondiente campo coordenado. Si $s \in (a,b)$, entonces

$$0 = \gamma_s^*(df)\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = df\left(\gamma_{*s}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\right) = \left(\gamma_{*s}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\right)(f) = \frac{\partial}{\partial t}\Big|_s (f\circ\gamma) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=s} f(\gamma(t)).$$

Esto nos dice que la función $f \circ \gamma : (a,b) \to \mathbb{R}$ tiene derivada nula en cada uno de los puntos de su dominio, así que, como éste último es conexo, es constante: en otras palabras, la función γ toma todos sus valores en una curva de nivel de f.

(b) La forma del enunciado coincide con df para $f(x,y) = x^2\cos(y)$ y entonces, de acuerdo a la primera parte, toda curva integral de df está contenida en una curva de nivel de f. Recíprocamente, toda curva $\gamma : (a,b) \to \mathbb{R}^2$ cuya imágen está contenida en una curva de nivel de f es una curva integral para df: esto es consecuencia del cálculo que hicimos en la parte anterior. Vemos así que las curvas integrales de df son precisamente las funciones diferenciables $(a,b) \to \mathbb{R}^2$ que tienen imagen contenida en las curvas de nivel de f.

5. Una función $f : M \to N$ entre variedades es un difeomorfismo si y solamente si es biyectiva y localmente un difeomorfismo.

6. Sea $r \in \mathbb{N}_0$ y sea

$$M_r = \mathbb{R}^2 \setminus \{(k,0) : k \in \mathbb{N}, 1 \le k \le r\}.$$

Determine la cohomología de de Rham de M_r.