Geometría Diferencial
Primer Cuatrimestre — 2019
Primer Parcial – Recuperatorio

APELLIDO Y NOMBRE: ....

L.U.: .... HOJAS: ....

---

1. Sea $\pi : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus 0 \mapsto (x : y : z) \in P^2_{\mathbb{R}}$ la proyección canónica y consideremos el campo

$$X = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial y} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3 \setminus 0).$$

(a) Para cada $p \in \mathbb{R}^3 \setminus 0$ el núcleo de la diferencial $d_p\pi : T_p(\mathbb{R}^3 \setminus 0) \to T_{\pi(p)}P^2_{\mathbb{R}}$ está generado por el vector X_p.

(b) Una 1-forma $\omega \in \Omega^1(\mathbb{R}^2 \setminus 0)$ está en la imagen de $\pi^* : \Omega^1(P^2_{\mathbb{R}}) \to \Omega^1(\mathbb{R}^3 \setminus 0)$ si y solamente si $\omega(X) = 0$.

2. Sean G y H dos grupos de Lie. Si $f : G \to H$ es un morfismo de grupos de Lie, esto es, un morfismo de grupos que es diferenciable, entonces f tiene rango constante: el rango de la diferencial $d_pf : T_pG \to T_{f(p)}H$ no depende de $p \in G$.

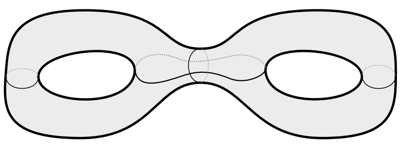
3. Sea p un punto del toro T^2 y sea $\iota : S^1 \to T^2 \setminus \{p\}$ la inclusión de un pequeño círculo alrededor de p.

(a) Muestre que el morfismo $\iota^* : H^1(T^2 \setminus \{p\}) \to H^1(S^1)$ es nulo.

Sugerencia. Recuerde que la función $[\omega] \in H^1(S^1) \to \int_{S^1} \omega \in \mathbb{R}$ es un isomorfismo de espacios vectoriales y use el teorema de Stokes.

(b) Calcule los espacios de cohomología del toro punteado $T^2 \setminus \{p\}$.

(c) Calcule los espacios de cohomología de la superficie



4. Muestre que

$$\Sigma = \{(x : y : z : w) \in P^3_{\mathbb{R}} : x^3 + y^3 + z^3 + w^3 = 0\}$$

es una subvariedad compacta de $P^3_{\mathbb{R}}$. ¿Qué dimension tiene? ¿Es orientable?