Cálculo Avanzado

Segundo Cuatrimestre — 2019

Práctica 10: Diferenciación

1. Una función $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivable con derivada acotada es uniformemente continua.

2. Sea (a, b) un intervalo abierto, sea $x_0 \in (a, b)$ y sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una función continua que es derivable en $(a, b) \setminus \{x_0\}$ de manera tal que los límites laterales de la derivada f' en x_0 existen y son finitos.

(a) Muestre que f es derivable lateralmente en x_0 y que, más aún, si ambos límites laterales coinciden entonces es derivable en x_0. Determine $f'(x_0)$ en este último caso.

(b) Muestre que las afirmaciones de la parte anterior dejan de ser válidas si se omite la hipótesis de continuidad de f en x_0.

3. Sea α, β, a y b números reales tales que $\alpha < a < b < \beta$ y sea $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ una función que es derivable en el intervalo (α, β).

(a) Si $f'(a) < 0 < f'(b)$, entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

(b) Si $\lambda \in \mathbb{R}$ es tal que $f'(a) < \lambda < f'(b)$, entonces existe $d \in (a, b)$ tal que $f'(d) = \lambda$.

(c) La función $g : (-1, 1) \to \mathbb{R}^2$ tal que

$$g(t) = \begin{cases} (t^2 \sin \frac{1}{t}, t^2 \cos \frac{1}{t}) & \text{si } 0 < t < 1; \\ (0, 0) & \text{si } -1 < t \leq 0; \end{cases}$$

es derivable en $(-1, 1)$ pero el conjunto $g'((-1, 1))$ no es conexo.

4. Sea $f : A \to \mathbb{R}^n$ una función definida en un abierto no vacío de $\mathbb{R}^n$ y sea $x_0 \in A$. Si f es diferenciable en x_0, entonces existen números $\delta > 0$ y $c \geq 0$ tales que $B_\delta(x_0) \subseteq A$ y $\|f(x) - f(x_0)\| \leq c\|x - x_0\|$ para todo $x \in B_\delta(x_0)$.

5. Sean x_1 y x_2 dos puntos de $\mathbb{R}^n$ y sea A un abierto que contiene al segmento cerrado S que une x_1 con x_2.

(a) Si $f : A \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable, entonces existe $x \in S$ tal que $f(x_1) - f(x_2) = Df(x)(x_1 - x_2)$.

(b) La afirmación de la primera parte es falsa si el codominio de la función f es $\mathbb{R}^m$ con $m \geq 2$.

(c) Si $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ es una función continua que es diferenciable en el interior de su dominio, entonces existe $t \in (a, b)$ tal que $\|\gamma(b) - \gamma(a)\| \leq \|\gamma'(t)\|(b - a)$.

Sugerencia. Ponga $z = \gamma(b) - \gamma(a)$ y $g : t \in [a, b] \mapsto \langle z, \gamma(t)\rangle \in \mathbb{R}$ y use el teorema de Lagrange.

(d) Si $f : A \to \mathbb{R}^m$ es una función diferenciable tal que $\|Df(x)\| \leq M$ para todo $x \in A$, entonces $\|f(x_1) - f(x_2)\| \leq M\|x_1 - x_2\|$.

6. Una función $A \to \mathbb{R}^n$ definida en un abierto conexo A de $\mathbb{R}^m$ que es diferenciable y que tiene diferencial nula es constante.

7. Sea A un abierto conexo de $\mathbb{R}^n$ y sea $f : A \to \mathbb{R}^m$ una función. Si para toda elección de x e y en A se tiene que $\|f(x) - f(y)\| \leq \|x - y\|^2$, entonces f es constante.

8. Sea A un abierto de $\mathbb{R}^n$. Una función $f : A \to \mathbb{R}$ que tiene derivadas parciales en todo su dominio y tal que estas son acotadas es necesariamente continua.

9. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que para todo $t \in \mathbb{R}$ es

$$f(t) = \begin{cases} t + 2t^2 \sin \frac{1}{t} & \text{si } t \neq 0; \\ 0 & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

Pruebe que f es derivable, que $f'(0) = 1$ y que f' es acotada en $(-1, 1)$, pero que sin embargo f no es biyectiva en ningún entorno de 0.

Como la derivada f' no es continua en 0 esto nos da un ejemplo que muestra que la hipótesis de continuidad de la derivada no es inútil en el teorema de la función inversa.

10. Muestre que la función $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (e^x \cos y, e^x \sin y) \in \mathbb{R}^2$ no es inyectiva pero que el jacobiano de f es no nulo en todo punto de $\mathbb{R}^2$, de manera que f es localmente inyectiva.

11. Sea U un abierto de $\mathbb{R}^n$ y sea $f : U \to \mathbb{R}^n$ una función de clase C^1. Si el jacobiano de f es no nulo en todo U, entonces f es abierta y para cada $y \in \mathbb{R}^n$ el conjunto $f^{-1}(y)$ es discreto en U.

12. Sea $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función tal que $(1, 2, 0)$ es una solución a la ecuación $F(xz, y - 2x) = 0$.

(a) Dé condiciones suficientes para que haya un entorno abierto W de $(1, 0)$ $\mathbb{R}^2$ y una función $\phi : W \to \mathbb{R}$ de clase C^1 con $\phi(1, 0) = 2$ y $F(xz, \phi(x, z) - 2x) = 0$ para todo $(x, z) \in W$.

(b) Muestre que bajo esas condiciones se tiene que $x \frac{\partial \phi}{\partial x}(x, z) - z \frac{\partial \phi}{\partial z}(x, z) = 2x$ idénticamente sobre W.

13. Consideremos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x^2 + \sin x - y^2 + z^3 = 0, \\ -\log(1 + x) + y^2 z = 1, \end{cases}$$

(a) Muestre que este sistema define dos funciones $y = y(x)$ y $z = z(x)$ definidas en un entorno I de 0 en $\mathbb{R}$ con $y(0) = z(1) = 1$.

(*b*) Sea $\alpha : x \in I \mapsto (x, y(x), z(x)) \in \mathbb{R}^3$ y sea

$$g : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto 2xyz + z \tan x \in \mathbb{R}.$$

Calcule la derivada de g en $(0, 1, 1)$ en la dirección del vector tangente a C en el punto $x = 0$.