Cálculo Avanzado

Segundo Cuatrimestre — 2019

Práctica 10: Diferenciación

1. Una función $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivable con derivada acotada es uniformemente continua.

Solución. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable y sea $M > 0$ tal que $|f'(x)| \leq M$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Sea $\varepsilon > 0$ y pongamos $\delta \coloneqq \varepsilon/2M$. Si x e y son elementos de $\mathbb{R}$ tales que $|x-y| < \delta$, entonces el teorema de Lagrange nos dice que existe ξ entre x e y tal que $f(x)-f(y) = f'(\xi)(x-y)$ y entonces $|f(x)-f(y)| = |f'(\xi)||x-y| \leq M\delta < \varepsilon$. Vemos así que f es uniformemente continua en $\mathbb{R}$. □

2. Sea (a,b) un intervalo abierto, sea $x_0 \in (a,b)$ y sea $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ una función continua que es derivable en $(a,b) \setminus \{x_0\}$ de manera tal que los límites laterales de la derivada f' en x_0 existen y son finitos.

(a) Muestre que f es derivable lateralmente en x_0 y que, más aún, si ambos límites laterales coinciden entonces es derivable en x_0. Determine $f'(x_0)$ en este último caso.

(b) Muestre que las afirmaciones de la parte anterior dejan de ser válidas si se omite la hipótesis de continuidad de f en x_0.

Solución. (a) Supongamos que $\beta = \lim_{x \downarrow x_0} f'(x)$. Sea $\varepsilon > 0$ y sea $\delta > 0$ tal que $x_0 + \delta < b$ y siempre que $x_0 < x < x_0 + \delta$ es $|f'(x) - \beta| < \varepsilon$.

Si ahora $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, entonces la función f es continua en $[x_0, x]$ y derivable en cada punto de (x_0, x), así que el teorema de Lagrange nos dice que existe $\xi_x \in (x_0, x)$ tal que

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(\xi_x)$$

y, por lo tanto, que

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \beta \right| = |f'(\xi_x) - \beta| < \varepsilon,$$

ya que $\xi_x \in (x_0, x) \subseteq (x_0, x_0 + \delta)$. Esto nos dice que f es derivable a derecha en x_0 y que

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \downarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \beta.$$

De la misma forma, si $\alpha = \lim_{x \uparrow x_0} f'(x)$, entonces f es derivable a izquierda en x_0 y $f'_-(x_0) = \beta$. Es claro ahora que si $\alpha = \beta$ entonces $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$ y, por lo tanto, que f es deribable en x_0 y tiene derivada $f'(x_0) = \alpha$.

(b) La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f(x) = -1$ si $x < 0$, $f(0) = 0$ y $f(x) = 1$ si $x > 0$ es continua y derivable en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, y los limites laterales de f' existen en 0 y son finitos e iguales. Sin embargo, f no es derivable lateralmente en 0 en ninguna de las dos direcciones y, por lo tanto, tampoco es derivable en 0. □

3. Sea α, β, a y b números reales tales que $\alpha < a < b < \beta$ y sea $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ una función que es derivable en el intervalo (α, β).

(a) Si $f'(a) < 0 < f'(b)$, entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

(b) Si $\lambda \in \mathbb{R}$ es tal que $f'(a) < \lambda < f'(b)$, entonces existe $d \in (a, b)$ tal que $f'(d) = \lambda$.

(c) La función $g : (-1, 1) \to \mathbb{R}^2$ tal que

$$g(t) = \begin{cases} (t^2 \sin \frac{1}{t}, t^2 \cos \frac{1}{t}) & \text{si } 0 < t < 1; \\ (0, 0) & \text{si } -1 < t \le 0; \end{cases}$$

es derivable en $(-1, 1)$ pero el conjunto $g'((-1, 1))$ no es conexo.

Solución. Supongamos que $f'(a) < 0 < f'(b)$. Como f es continua en $[a, b]$, existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) \le f(x)$ para todo $x \in [a, b]$. Como $a \in (\alpha, b)$ y $f'(a) < 0$, existe $\delta > 0$ tal que $(a - \delta, a + \delta) \subseteq (\alpha, b)$ y $(f(x) - f(a))/(x - a) < -f'(a)/2$ para todo $x \in (a - \delta, a + \delta)$. En particular, $a + \delta/2 \in (a, b)$ y $f(a + \delta/2) < f(a) - \delta f'(a)/4 < f(a)$: esto implica que $c \neq a$. De la misma forma, como $b \in (a, \beta)$ y $f'(b) > 0$ podemos ver que $c \neq b$. Así, es $c \in (a, b)$.

Como f es derivable en c, sabemos que existen los límites $\lim_{x \uparrow x}(f(x) - f(c))/(x - c)$ y $\lim_{x \downarrow x}(f(x) - f(c))/(x - c)$, y que tienen el mismo valor, $f'(c)$. Observemos que por la forma en que elegimos a c, tenemos que si $a < x < c$, entonces $(f(x) - f(c))/(x - c) \le 0$, así que $\lim_{x \uparrow x}(f(x) - f(c))(x - c) \le 0$. Por la misma razón, si $c < x < b$, entonces $(f(x) - f(c))/(x - c) \ge 0$, así que $\lim_{x \downarrow c}(f(x) - f(c))/(x - c) \ge 0$. Juntando todo vemos que $f'(c) = 0$.

(b) Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $f'(a) < \lambda < f'(b)$ y consideremos la función

$$g : t \in (\alpha, \beta) \mapsto f(t) - \lambda t \in \mathbb{R}.$$

Es claro que g es derivable en todo su dominio y que $g'(t) = f'(t) - \lambda$ para todo $t \in (\alpha, \beta)$. En particular, tenemos que $g'(a) = f'(a) - \lambda < 0 < f'(b) - \lambda = g'(b)$, así que por la primera parte del ejercicio existe $d \in (a, b)$ tal que $g'(d) = 0$, esto es, tal que $f'(d) = \lambda$.

(c) Es claro que si $t \in (-1, 1)$ no es 0, entonces g es derivable en t y que

$$g'(t) = \left(2t \sin \frac{1}{t} - \cos \frac{1}{t}, 2t \cos \frac{1}{t} + \sin \frac{1}{t}\right).$$

Por otro lado, si $t \in (-1, 1)$ no es nulo, entonces

$$\frac{g(t) - g(0)}{t} = \left(t \sin \frac{1}{t}, t \cos \frac{1}{t}\right),$$

así que claramente

$$g'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} = 0.$$

Observemos que cuando $t \in (-1, 1) \setminus \{0\}$ es

$$\|g'(t)\|^2 = \left(2t \sin \frac{1}{t} - \cos \frac{1}{t}\right)^2 + \left(2t \cos \frac{1}{t} + \sin \frac{1}{t}\right)^2 = 1 + 4t^2 \ge 1.$$

Esto implica que $g'(0)$ no pertenece a la clausura de la imagen de $(-1, -1) \setminus \{0\}$ por g' y, por lo tanto, que la imagen de $(-1, 1)$ por g' no es conexa. $\square$

4. Sea $f : A \to \mathbb{R}^n$ una función definida en un abierto no vacío de $\mathbb{R}^n$ y sea $x_0 \in A$. Si f es diferenciable en x_0, entonces existen números $\delta > 0$ y $c \geq 0$ tales que $B_\delta(x_0) \subseteq A$ y $\|f(x) - f(x_0)\| \leq c\|x - x_0\|$ para todo $x \in B_\delta(x_0)$.

Solución. Supongamos que la función f es diferenciable en x_0, de manera que hay una función lineal $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ y una función $h : A \to \mathbb{R}^n$ tales que $f(x)-f(x_0) = T(x-x_0)+h(x)$ y $\lim_{x\to x_0} h(x)/\|x - x_0\| = 0$. Esto último implica que existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(x_0) \subseteq A$ tal que $\|h(x)\| \leq \|x-x_0\|$ siempre que $x \in B_\delta(x_0)$. Por otro lado, como la función T es lineal, es continua y existe una constante k tal que $\|T(x - x_0)\| \leq k\|x - x_0\|$. Juntando todo tenemos entonces que $\|f(x)-f(x_0)\| \leq \|T(x-x_0)\|+\|h(x)\| \leq (k+1)\|x-x_0\|$ para cada $x \in B_\delta(x_0)$. Esto es lo que queremos. □

5. Sean x_1 y x_2 dos puntos de $\mathbb{R}^n$ y sea A un abierto que contiene al segmento cerrado S que une x_1 con x_2.

(a) Si $f : A \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable, entonces existe $x \in S$ tal que $f(x_1) - f(x_2) = Df(x)(x_1 - x_2)$.

(b) La afirmación de la primera parte es falsa si el codominio de la función f es $\mathbb{R}^m$ con $m \geq 2$.

(c) Si $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ es una función continua que es diferenciable en el interior de su dominio, entonces existe $t \in (a, b)$ tal que $\|\gamma(b)-\gamma(a)\| \leq \|\gamma'(t)\|(b-a)$.

Sugerencia. Ponga $z = \gamma(b) - \gamma(a)$ y $g : t \in [a, b] \mapsto \langle z, \gamma(t)\rangle \in \mathbb{R}$ y use el teorema de Lagrange.

(d) Si $f : A \to \mathbb{R}^m$ es una función diferenciable tal que $\|Df(x)\| \leq M$ para todo $x \in A$, entonces $\|f(x_1) - f(x_2)\| \leq M\|x_1 - x_2\|$.

Solución. (a) Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. La función

$$\sigma : t \in \mathbb{R} \mapsto (1 - t)x_2 + tx_1 \in \mathbb{R}^n$$

es diferenciable, así que la composición $f \circ \sigma$, que está definida sobre el abierto $\sigma^{-1}(A)$ de $\mathbb{R}$ que contiene a $[0, 1]$, también lo es. El teorema de Lagrange nos dice que existe $s \in (0, 1)$ tal que $f(\sigma(1))-f(\sigma(1)) = (f \circ \sigma)'(s)$. Usando la regla de la cadena y poniendo $x \in \sigma(s)$, vemos que

$$(f \circ \sigma)'(s) = Df(\sigma(s))(\sigma'(s)) = Df(\sigma(s))(x_1 - x_2) = Df(x)(x_1 - x_2).$$

(b) Fijemos $m \geq 1$ y pongamos $A = \mathbb{R}$ y $f : A \to \mathbb{R}^m$ dada para cada $t \in \mathbb{R}$ por

$$f(t) = (\cos t, \sin t, 0, \dots, 0).$$

Es claro que f es una función diferenciable y que $f(2\pi) = f(0)$. Por otro lado, para todo $s \in [0, 2\pi]$ tenemos que $f'(s) \neq 0$, así que para todo $s \in [0, 2\pi]$ es $f(2\pi) - f(0) = 0 \neq f'(s)2\pi = f'(s)(2\pi - 0)$.

(c) Sea $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ una función continua que es diferenciable en (a, b). Si $\gamma(b) = \gamma(a)$, la desigualdad que queremos probar es evidente. Supongamos entonces que $\gamma(b) - \gamma(a) \neq 0$ y consideremos la función

$$f : t \in [a, b] \mapsto \langle\gamma(t) - \gamma(a), \gamma(b) - \gamma(a)\rangle \in \mathbb{R},$$

que es continua en $[a,b]$ y diferenciable en (a,b) y que tiene $f'(t) = \langle\gamma'(t),\gamma(b)-\gamma(a)\rangle$ para todo $t \in (a,b)$. El teorema de Lagrange nos dice que existe $s \in (a,b)$ tal que

$$\|\gamma(b)-\gamma(a)\|^2 = f(b)-f(a) = f'(t)(b-a) = \langle\gamma'(t),\gamma(a)-\gamma(b)\rangle(b-a),$$

así que usando la desigualdad de Cauchy–Schwartz vemos que

$$\|\gamma(b)-\gamma(a)\|^2 \leq \|\gamma'(t)\|\|\gamma(a)-\gamma(b)\|(a-b)$$

y, como $\gamma(b) \neq \gamma(a)$, que

$$\|\gamma(b)-\gamma(a)\| \leq \|\gamma'(t)\|(a-b),$$

como queremos.

(d) Sea ahora $f : A \to \mathbb{R}^n$ una función diferenciable tal que $\|Df(x)\| \leq M$ para todo $x \in A$ y sea $\sigma : t \in [0,1] \mapsto (1-t)x_2 + tx_1 \in \mathbb{R}^n$, que es una función continua en $[0,1]$ y diferenciable en $(0,1)$. De acuerdo a la parte anterior del ejercicio, existe $t \in (0,1)$ tal que

$$\begin{aligned}\|f(x_1)-f(x_2)\| &= \|(g\circ\sigma)(1)-(f\circ\sigma)(0)\| \leq \|(f\circ\sigma)'(t)\| \\ &= \|Df(\sigma(t))(\sigma'(t))\| \leq \|Df(\sigma(t))\|\cdot\|\sigma'(t)\| \leq M\|x_1-x_2\|.\end{aligned}$$

Esto prueba la desigualdad del enunciado. □

6. Una función $A \to \mathbb{R}^n$ definida en un abierto conexo A de $\mathbb{R}^m$ que es diferenciable y que tiene diferencial nula es constante.

Solución. Sea $x_0 \in A$ y sea $q = f(x_0)$. Afirmamos que f es constante, de manera que el conjunto $B = \{x \in A : f(x) = q\}$ coincide con A. Como la función f es constante, es claro que B es un cerrado de A: como A es conexo, bastará que mostremos que B es abierto.

Sea $x \in A$ y sea $\delta > 0$ tal que $B_\delta(x) \subseteq A$. Si $y \in B_\delta(x)$, entonces la función $\sigma : t \in [0,1] \mapsto (1-t)x + ty \in \mathbb{R}^n$ toma valores en A, es continua en $[0,1]$ y diferenciable en $(0,1)$, así que la función $f\circ\sigma : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ también es continua en $[0,1]$ y diferencial en $(0,1)$. De acuerdo al Ejercicio **5**(c), existe $t \in (0,1)$ tal que

$$\|f(x)-f(y)\| = \|(f\circ\sigma)(0)-(f\circ\sigma)(1)\| \leq \|(f\circ\sigma)'(t)\| = \|Df(\sigma(t))(\sigma'(t))\|,$$

y el último miembro de esta desigualdad es nulo, ya que la hipótesis implica que $Df(\sigma(t)) = 0$: vemos así que $f(y) = f(x) = q$ y, en definitiva, que $B_\delta(x) \subseteq B$, de manera que podemos concluir que el conjunto B es abierto, como queríamos. □

7. Sea A un abierto conexo de $\mathbb{R}^n$ y sea $f : A \to \mathbb{R}^m$ una función. Si para toda elección de x e y en A se tiene que $\|f(x)-f(y)\| \leq \|x-y\|^2$, entonces f es constante.

Solución. Supongamos que f satisface la condición del enunciado. Si $x, y \in A$ son distintos, entonces es claro que

$$0 \leq \frac{\|f(y)-f(x)\|}{\|y-x\|} \leq \|x-y\|,$$

así que para todo $x \in A$ se tiene que

$$\lim_{y\to x} \frac{\|f(y)-f(x)\|}{\|y-x\|} = 0.$$

Esto nos dice que la función f es diferenciable en todo punto de A y que su diferencial es idénticamente nula. De acuerdo al Ejercicio **6**, la función f es constante. □

8. Sea A un abierto de $\mathbb{R}^n$. Una función $f : A \to \mathbb{R}$ que tiene derivadas parciales en todo su dominio y tal que estas son acotadas es necesariamente continua.

Solución. Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función que tiene derivadas parciales y sea $M \in \mathbb{R}$ tal que $|\partial f(x)/\partial x_i| \leq M$ cualquiera sean $i \in [\![n]\!]$ y $x \in A$. Fijemos $x = (x_1, \dots, x_n) \in A$, sea $\delta > 0$ tal que $B_\delta(x) \subseteq A$, y sea $y = (y_1, \dots, y_n) \in B_\delta(x)$. Para cada $i \in [\![0, n]\!]$ pongamos $z_i := (y_1, \dots, y_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$, de manera que en particular por lado es $z_0 = x$ y $z_n = y$, y por otro es $z_0, \dots, z_n \in B_\delta(x)$. Para cada $i \in [\![n]\!]$ consideremos la función $\sigma_i : t \in [0,1] \mapsto (1-t)z_{i-1} + tz_i \in \mathbb{R}^n$, que toma valores en $B_\delta(x)$, ya que este conjunto es convexo. Como la función f tiene derivadas parciales en A, las composiciones $f \circ \sigma_1, \dots, f \circ \sigma_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ son continuas en todo su dominio y derivables en $(0,1)$. Más aún, es inmediato ver que si $t \in [0,1]$ e $i \in [\![n]\!]$ tenemos que

$$|(f \circ \sigma_i')(t)| = \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(\sigma_i(t)) \cdot (y_i - x_i)\right| \leq M|y_i - x_i|.$$

El teorema del valor medio, entonces, nos dice que para cada $i \in [\![n]\!]$ es

$$|f(z_i) - f(z_{i-1})| = \left|(f \circ \sigma_i)(1) - (f \circ \sigma_i)(0)\right| \leq M|y_i - x_i|$$

y, por lo tanto, que

$$\begin{aligned} |f(y) - f(x)| = |f(z_n) - f(z_0)| &\leq \sum_{i=1}^n |f(z_i) - f(z_{i-1})| \leq M \sum_{i=1}^n |y_i - x_i| \\ &\leq nM\|y - x\|. \end{aligned}$$

Esto muestra que la función f es de Lipschitz con constante nM sobre el conjunto $B_\delta(x)$ y, en particular, que es allí continua. □

9. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que para todo $t \in \mathbb{R}$ es

$$f(t) = \begin{cases} t + 2t^2 \sin\frac{1}{t} & \text{si } t \neq 0; \\ 0 & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

Pruebe que f es derivable, que $f'(0) = 1$ y que f' es acotada en $(-1, 1)$, pero que sin embargo f no es biyectiva en ningún entorno de 0.

Como la derivada f' no es continua en 0 esto nos da un ejemplo que muestra que la hipótesis de continuidad de la derivada no es inútil en el teorema de la función inversa.

Solución. Es evidente que la función f es derivable en cada punto de $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ y que para cada $t\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ se tiene que

$$f'(t)=1+4t\sin\frac{1}{t}-2\cos\frac{1}{t}.$$

Por otro lado, si $t\neq 0$, entonces

$$\left|\frac{f(t)-f(0)}{t-0}-1\right|=\left|2t\sin\tfrac{1}{t}\right|\leq 2|t|,$$

así que claramente

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(t)-f(0)}{t-0}=1,$$

de manera que f también es derivable en 0 y es $f'(0)=1$.

Observemos que si $t\in(-1,1)\setminus\{0\}$ es

$$|f'(t)|=\left|1+4t\sin\frac{1}{t}-2\cos\frac{1}{t}\right|\leq 1+4|t|+2\leq 7.$$

Como también $|f'(0)|\leq 7$, vemos que f' es acotada en $(-1,1)$.

Si f fuese biyectiva en algún entorno de 0, entonces como es continua sería en ese entorno estrictamente monótona. Para ver que esto no es así, es suficiente con mostrar que si derivada toma valores estrictamente positivos y estrictamente negativos en todo entorno de 0. Si $n\in\mathbb{N}$ crece, entonces por un lado

$$f'\left(\frac{1}{2n\pi}\right)=1+\frac{4}{2n\pi}\sin 2n\pi-2\cos 2n\pi=1+\frac{4}{2n\pi}\sin 2n\pi-2\to -1$$

y por otro

$$\begin{aligned}f'\left(\frac{1}{(2n+1)\pi}\right)&=1+\frac{4}{(2n+1)\pi}\sin(2n+1)\pi-2\cos(2n+1)\pi\\&=1+\frac{4}{(2n+1)\pi}\sin(2n+1)\pi+2\to 3.\end{aligned}$$

Lo que queremos sigue inmediatamente de esto. Observemos que como $f'(0)=1$, esto muestra que f' no es continua en 0. □

10. Muestre que la función $f:(x,y)\in\mathbb{R}^2\mapsto(e^x\cos y,e^x\sin y)\in\mathbb{R}^2$ no es inyectiva pero que el jacobiano de f es no nulo en todo punto de $\mathbb{R}^2$, de manera que f es localmente inyectiva.

Solución. Es $f(x,y+2\pi)=f(x,y)$ para todo $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, así que claramente la función no es inyectiva. Por otro lado, la función es C^1 y su jacobiano es

$$J(f)=\begin{vmatrix}e^x\cos y & -e^x\sin y\\ e^x\sin y & e^x\cos x\end{vmatrix}=e^x,$$

que no se anula en ningún punto de $\mathbb{R}^2$. El teorema de la función inversa, entonces, nos dice que si $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$, entonces existe un entorno abierto U de (x_0,y_0) tal que la restricción $f|_U$ es inyectiva. □

11. Sea U un abierto de $\mathbb{R}^n$ y sea $f : U \to \mathbb{R}^n$ una función de clase C^1. Si el jacobiano de f es no nulo en todo U, entonces f es abierta y para cada $y \in \mathbb{R}^n$ el conjunto $f^{-1}(y)$ es discreto en U.

Solución. Supongamos que el jacobiano J_f de f es no nulo en todo su dominio U.

Veamos que f es abierta. Sea A un abierto de U y sea $x \in A$: tenemos que mostrar que $f(x)$ es un punto interior de $f(A)$. Ahora bien, como $J_f(x) \neq 0$, el teorema de la función inversa nos dice que hay un abierto V de U que contiene a x tal que $f(V)$ es un abierto de $\mathbb{R}^n$ y tal que la restricción $f|_V^{f(V)} : V \to f(V)$ es una biyección con inversa diferenciable. La intersección $A \cap V$ es un entorno abierto de x en V y como $f|_V^{f(V)}$ es un homeomorfismo, $f(A \cap V)$ es un entorno abierto de $f(x)$ en $f(V)$: en particular, como $f(V)$ es un abierto de $\mathbb{R}^n$, $f(A \cap V)$ es un abierto de $\mathbb{R}^n$: como $f(x) \in f(A \cap V) \subseteq f(A)$, vemos que $f(x)$ es un punto interior de $f(A)$, como queríamos.

Sea ahora $y \in \mathbb{R}^n$ y sea $F = f^{-1}(y)$: tenemos que probar que F es un subconjunto discreto de U y, para ello, que si $x \in F$ entonces hay un abierto V de U tal que $F \cap V = \{x\}$. Fijemos $x \in F$. Como $J_f(x) \neq 0$, el teorema de la función inversa nos dice que existe un abierto W de U tal que $x \in W$ y la restricción $f|_W : W \to \mathbb{R}^n$ es inyectiva: esto implica inmediatamente que, en particular, $F \cap W = \{x\}$, como queremos. □

12. Sea $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función tal que $(1, 2, 0)$ es una solución a la ecuación $F(xz, y - 2x) = 0$.

(a) Dé condiciones suficientes para que haya un entorno abierto W de $(1, 0)$ $\mathbb{R}^2$ y una función $\phi : W \to \mathbb{R}$ de clase C^1 con $\phi(1, 0) = 2$ y $F(xz, \phi(x, z) - 2x) = 0$ para todo $(x, z) \in W$.

(b) Muestre que bajo esas condiciones se tiene que $x\frac{\partial \phi}{\partial x}(x, z) - z\frac{\partial \phi}{\partial z}(x, z) = 2x$ idénticamente sobre W.

Solución. Hacer

13. Consideremos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x^2 + \sin x - y^2 + z^3 = 0, \\ -\log(1 + x) + y^2 z = 1, \end{cases}$$

(a) Muestre que este sistema define dos funciones $y = y(x)$ y $z = z(x)$ definidas en un entorno I de 0 en $\mathbb{R}$ con $y(0) = z(1) = 1$.

(b) Sea $\alpha : x \in I \mapsto (x, y(x), z(x)) \in \mathbb{R}^3$ y sea

$$g : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto 2xyz + z \tan x \in \mathbb{R}.$$

Calcule la derivada de g en $(0, 1, 1)$ en la dirección del vector tangente a C en el punto $x = 0$.

Solución. Hacer