Cálculo Avanzado

Segundo Cuatrimestre — 2019

Práctica 9: Espacios normados

1. Sea E un espacio normado.

(a) Las funciones

$$(x,y) \in E \times E \mapsto x + y \in E, \qquad (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E \mapsto \lambda x \in E$$

son continuas.

(b) La clausura de una bola abierta de E es la bola cerrada correspondiente.

(c) Si E tiene dimensión positiva, entonces para todo $r > 0$ y todo $x \in E$ es $\operatorname{diam} B_r(x) = 2r$.

2. Sea E un espacio normado. Decimos que un subconjunto C de E es *convexo* si cada vez que x, $y \in C$ y $t \in [0,1]$ se tiene que $(1-t)x + ty \in C$.

(a) Las bolas abiertas de E y las bolas cerradas de E son convexas.

(b) La intersección de una familia no vacía de subconjuntos convexos de E es ella misma convexa.

(c) La clausura y el interior de un conjunto conexo son conjuntos convexos.

3. Sea E un espacio normado y sea S un subespacio lineal de E.

(a) La clausura $\overline{S}$ de S es un subespacio lineal de E.

(b) Si $S \neq E$, entonces $S^\circ = \varnothing$.

(c) Si S tiene dimensión finita, entonces S es un cerrado de E.

(d) Si S es un *hiperplano*, de manera que existe un vector no nulo x en E tal que $E = S \oplus \langle x \rangle$, entonces S es o denso o cerrado en E.

4. Sea E un espacio normado completo y sea $(x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en E. Si la serie $\sum_{n\geq 1} \|x_n\|$ converge, entonces la serie $\sum_{n\geq 1} x_n$ converge en E.

5. Decida si los siguientes subespacios son cerrados, densos, o hiperplanos.

(a) El subespacio c de ℓ_∞ de las sucesiones que tienen límite.

(b) El subespacio c_0 de c de las sucesiones que convergen a 0.

(c) El subespacio de ℓ_1 de las sucesiones $(x_n)_{n\geq 1}$ tales que $\sum_{n\geq 1} x_n = 0$.

(d) El subespacio de ℓ_2 de las sucesiones $(x_n)_{n\geq 1}$ tales que $\sum_{n\geq 1} x_n = 0$.

(e) El subespacio $\mathbb{R}[X]$ de $C[0,1]$.

(f) El subespacio $C^1[a,b]$ de $C[a,b]$.

6. Si $T : E \to F$ es una función lineal entre espacios normados, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) La función T es continua en 0.

(ii) Existe $x_0 \in E$ tal que la función T es continua en x_0.

(iii) La función T es continua.

(iv) La función T es uniformemente continua.

(v) Existe un número $M > 0$ tal que para todo $x \in E$ es $\|T(x)\| \leq M\|x\|$.

(vi) Para todo subconjunto acotado A de E el conjunto $T(A)$ es acotado.

7. Sean E y F dos espacios normados y sea $L(E,F)$ el conjunto de todas las funciones lineales $E \to F$ que son continuas.

(a) $L(E,F)$ es, de manera natural, un espacio vectorial.

(b) Para cada $T \in L(E,F)$ el conjunto $\{\|T(x)\| : x \in E, \|x\| \leq 1\}$ es acotado, así que podemos considerar el número real

$$\|T\| \coloneqq \sup_{\substack{x\in E\\ \|x\|\leq 1}} \|T(x)\|.$$

La función $\|-\| : L(E,F) \to \mathbb{R}$ es una norma sobre $L(E,F)$.

(c) Si F es un espacio de Banach, entonces $L(E,F)$ también lo es.

8. Si $T : E \to F$ es una función lineal y continua entre espacios normados, entonces

$$\begin{aligned}\|T\| &= \sup_{\substack{x\in E\\ \|x\|\leq 1}} \|T(x)\| = \sup_{\substack{x\in E\\ \|x\|=1}} \|T(x)\| = \sup_{x\in E\setminus\{0\}} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|}\\ &= \inf\{M \in \mathbb{R} : \forall x \in E, \|T(x)\| \leq M\|x\|\}.\end{aligned}$$

9. Sea $K : [0,1]\times[0,1] \to \mathbb{R}$ una función continua. Muestre que el operador lineal $T : C[0,1] \to C[0,1]$ tal que

$$Tf(x) = \int_0^1 K(x,y)f(y)\,\mathrm{d}y$$

para toda función $f \in C[0,1]$ y todo $x \in [0,1]$ es continuo y acote su norma.

10. Sea $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ el subespacio de ℓ_∞ de las sucesiones de números reales con un número finito de componentes no nulas. Muestre que la función $f : \mathbb{R}^{(\mathbb{N})} \to \mathbb{R}$ tal que

$$f\left((a_n)_{n\geq 1}\right) = \sum_{n\geq 1} n a_n$$

para toda sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$ de $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ es lineal pero no continua.

11. (a) Si $\phi \in C[0,1]$, entonces

$$T : f \in C[0,1] \mapsto \int_0^1 f(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x \in \mathbb{R}$$

es una función lineal continua con $\|T\| \leq \int_0^1 |\phi(x)|\,\mathrm{d}x$.

(b) Muestre que la función

$$T : (a_n)_{n\geq 1} \in c \mapsto \lim_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{R}$$

es lineal y continua, y encuentre su norma.

(c) Sea $p \in (1, +\infty)$, sea $p' := p/(p-1)$ el exponente conjugado a p y sea $b = (b_n)_{n\geq 1} \in \ell_{p'}$. Muestre que la función

$$T : (a_n)_{n\geq 1} \in \ell_p \mapsto \sum_{n\geq 1} a_n b_n \in \mathbb{R}$$

es lineal y continua, y encuentre su norma.

12. Sea E un espacio normado. Un subespacio lineal H de E es un hiperplano si y solamente si existe una función lineal $\phi : E \to \mathbb{K}$ no nula tal que $H = \ker \phi$. Más aún, cuando ese es el caso, H es cerrado si y solamente si la función ϕ puede elegirse continua.

13. *Lema de Riesz*. Sea E un espacio normado y sea S un subespacio lineal de E que es cerrado y propio. Si $\alpha \in (0,1)$, entonces existe $z \in E \setminus S$ tal que $\|z\| = 1$ y $\|s - z\| > \alpha$ para todo $s \in S$.

Sugerencia. Fije $x \in E \setminus S$ y $z = (x-b)/\|x-b\|$ con $b \in S$ apropiadamente elegido.

14. Sea E un espacio de Banach y sean S y T dos subespacios cerrados de E. Si T tiene dimensión finita, entonces el subespacio $S + T$ de E también es cerrado.

15. Sea E un espacio normado de dimensión infinita. Muestre que existe una sucesión $(\omega_n)_{n\geq 1}$ en E tal que $\|\omega_n\| = 1$ y $d(\omega_n, \omega_m) > \frac{1}{2}$ cualesquiera sean n y m en $\mathbb{N}$, y deducir de esto que la bola $\overline{B_1(0)}$ no es compacta.

Sugerencia. Aplique el Lema de Riesz a una sucesión creciente de subespacios lineales de dimensión finita.

16. Muestre que un espacio de Banach de dimensión infinita no puede tener una base lineal numerable.

Sugerencia. Muestre que un espacio de Banach de dimensión numerable es unión creciente de una sucesión de subespacios lineales de dimensión finita y use el Teorema de Baire.

17. Sea E un espacio normado, sean $(x_n)_{n\geq 1}$ e $(y_n)_{n\geq 1}$ dos sucesiones en E tales que las series $\sum_{n\geq 1} x_n$ y $\sum_{n\geq 1} y_n$ convergen, y sea $\lambda \in \mathbb{K}$.

(a) La serie $\sum_{n\geq 1}(x_n + y_n)$ converge a $\sum_{n\geq 1} x_n + \sum_{n\geq 1} y_n$.

(b) La serie $\sum_{n\geq 1} \lambda x_n$ converge a $\lambda \sum_{n\geq 1} x_n$.

18. Sea E un espacio de Banach y sea $(a_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en E tal que la serie $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge absolutamente. Si $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es una función biyectiva, entonces la serie $\sum_{n\geq 1} a_{\sigma(n)}$ converge y converge a $\sum_{n\geq 1} a_n$.