CÁLCULO AVANZADO

Segundo Cuatrimestre — 2019

Práctica 9: Espacios normados

1. Sea E un espacio normado.

(a) Las funciones

$$(x,y) \in E \times E \mapsto x + y \in E, \qquad (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E \mapsto \lambda x \in E$$

son continuas.

(b) La clausura de una bola abierta de E es la bola cerrada correspondiente.

(c) Si E tiene dimensión positiva, entonces para todo $r > 0$ y todo $x \in E$ es $\operatorname{diam} B_r(x) = 2r$.

Solución. (a) Vemos a $E \times E$ y a $\mathbb{K} \times E$ como espacios normados con la norma suma. Si (x,y) y (x',y') son elementos de $E \times E$, tenemos que

$$\|(x+y)-(x'+y')\| \leq \|x-x'\| + \|y-y'\| = \|(x,y)-(x',y')\|,$$

así que la primera función del enunciado es uniformemente continua. Por otro lado, si (λ, x) y (λ', x') son elementos de la bola de radio R de $\mathbb{K} \times E$, es

$$\begin{aligned} \|\lambda x - \lambda' x'\| &= \|\lambda(x-x') + (\lambda' - \lambda')x'\| \leq |\lambda|\|x-x'\| + |\lambda - \lambda'|\|x'\| \\ &\leq R\big(\|x-x'\| + \|\lambda - \lambda'\|\big) = R\|(\lambda,x)-(\lambda',x')\|. \end{aligned}$$

Esto muestra que la segunda función del enunciado es continua sobre la bola abierta de radio R de $\mathbb{K} \times E$.

(b) Sean $x \in E$ y $r > 0$. Como $B_r(x) \subseteq \overline{B}_r(x)$ y $\overline{B}_r(x)$ es un cerrado, tenemos que $\overline{B_r(x)} \subseteq \overline{B}_r(x)$. Sea, por otro lado, $y \in \overline{B}_r(x)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $y_n = x + (1-1/n)(y-x)$. Es

$$\|y_n - x\| = \|(1-1/n)(y-x)\| = |1-1/n|\|y-x\| < \|y-x\| \leq r,$$

así que $y_n \in B_r(x)$. Por otro lado, es claro que

$$y_n = x + (1-1/n)(y-x) \to y$$

cuando n crece, así que y está en la clausura de $B_r(x)$. Vemos asi que $\overline{B}_r(x) \subseteq \overline{B_r(x)}$.

(c) Supongamos que E tiene dimensión positiva y sean $r > 0$ y $x \in E$. Como $E \neq 0$, existe $y \in E \setminus 0$, y reemplazando a y por $y/\|y\|$ si es necesario podemos suponer que $\|y\| = 1$. Si $s \in [0,r)$, entonces es claro que $x + sy$ y $x - sy$ están en $B_r(x)$, y entonces

$$\operatorname{diam} B_r(x) \geq \|(x+sy)-(x-sy)\| = 2s\|y\| = 2s.$$

Vemos así que $2r \leq \operatorname{diam} B_r(x)$. Por otro lado, si u y v son dos elementos de $B_r(x)$, es $\|u-v\| \leq \|u-x\| + \|x-v\| < 2r$, así que $\operatorname{diam} B_r(x) \leq 2r$. Estas dos desigualdades prueban la igualdad que queremos. □

2. Sea E un espacio normado. Decimos que un subconjunto C de E es *convexo* si cada vez que x, $y \in C$ y $t \in [0,1]$ se tiene que $(1-t)x + ty \in C$.

(a) Las bolas abiertas de E y las bolas cerradas de E son convexas.

(b) La intersección de una familia no vacía de subconjuntos convexos de E es ella misma convexa.

(c) La clausura y el interior de un conjunto conexo son conjuntos convexos.

Solución. (a) Sean $r > 0$ y $x \in E$. Si y, $z \in E$ y $t \in [0,1]$, entonces

$$\|(1-t)y + tz\| = \|(1-t)(y-x) + t(z-x)\| \leq (1-t)\|y-x\| + t\|z-x\|.$$

En particular, si y, $z \in B_r(x)$, es

$$\|(1-t)y + tz\| \leq (1-t)\|y-x\| + t\|z-x\| < (1-t)r + tr = r,$$

así que $(1-t)y + tz \in B_r(x)$, y si y, $z \in \overline{B}_r(x)$, es

$$\|(1-t)y + tz\| \leq (1-t)\|y-x\| + t\|z-x\| \leq (1-t)r + tr = r,$$

así que $(1-t)y + tz \in \overline{B}_r(x)$. Vemos de esta forma que $B_r(x)$ y $\overline{B}_r(x)$ son convexos de E.

(b) Sea $\mathscr{C}$ un conjunto no vacío de convexos de E y sea $K = \bigcap_{C \in \mathscr{C}} C$ su intersección. Sean x, $y \in K$ y $t \in [0,1]$. Si $C \in \mathscr{C}$, tenemos que x e y están en C, así que, como C es convexo, que $(1-t)x + ty \in C$: vemos así que $(1-t)x + ty \in K$. El conjunto K es, por lo tanto, convexo.

(c) Sea C un conjunto convexo de E. Sean x e y dos puntos de $\overline{C}$ y sea $t \in [0,1]$. Si $\varepsilon > 0$, existen x', $y' \in C$ tales que $\|x - x'\| < \varepsilon$ y $\|y - y'\| < \varepsilon$, y entonces

$$\begin{aligned}\Big\|\big((1-t)x + ty\big) - \big((1-t)x' + ty'\big)\Big\| &= \|(1-t)(x-x') + t(y-y')\| \\ &\leq (1-t)\|x-x'\| + t\|y-y'\| < (1-t)\varepsilon + t\varepsilon = \varepsilon.\end{aligned}$$

Como el punto $(1-t)x' + ty'$ está en C porque C es convexo, esto nos dice que $d((1-t)x + ty, C) \leq \varepsilon$. Como esto es así cualquiera sea ε, tenemos en definitiva que $d((1-t)x + ty, C) = 0$ y, por lo tanto, que $(1-t)x + ty \in \overline{C}$. Podemos concluir con esto que el conjunto $\overline{C}$ es convexo.

Sean ahora x e y dos puntos de C° y sea $t \in [0,1]$. Si $t = 0$, entonces es claro que $(1-t)x + ty \in C$. Supongamos que $t \in (0,1]$. Como C° es abierto, existe $r > 0$ tal que $B_r(x) \subseteq C^\circ \subseteq C$ y $B_r(y) \subseteq C^\circ \subseteq C$, y como C es convexo, tenemos entonces que

$$T := \big\{(1-t)x' + ty' : x' \in B_r(x),\ y' \in B_r(y)\big\} \subseteq C$$

Observemos que

$$T = \bigcup_{x' \in B_r(x)} B_{rt}((1-t)x' + ty)$$

y, como t y r son positivos, que por lo tanto T es un abierto. Como $(1-t)x+ty$ está en T y T está contenido en C, tenemos que $(1-t)x + ty \in C^\circ$. El conjunto C° es, por lo tanto, convexo. □

3. Sea E un espacio normado y sea S un subespacio lineal de E.

(a) La clausura $\overline{S}$ de S es un subespacio lineal de E.

(b) Si $S \neq E$, entonces $S^\circ = \varnothing$.

(c) Si S tiene dimensión finita, entonces S es un cerrado de E.

(d) Si S es un *hiperplano*, de manera que existe un vector no nulo x en E tal que $E = S \oplus \langle x \rangle$, entonces S es o denso o cerrado en E.

Solución. (a) Sean x e y dos elementos de $\overline{S}$ y sea $\lambda \in \mathbb{K}$. Hay sucesiones $(x_n)_{n\geq 1}$ e $(y_n)_{n\geq 1}$ en S que convergen a x y a y, respectivamente. Como la función suma de E y la multiplicación por escalares son funciones continuas, la sucesión $(x_n + \lambda y_n)_{n\geq 1}$ converge en E a $x + \lambda y$: como S es un subespacio lineal de E, esta última sucesión toma valores en S, así que vemos que $x + \lambda y \in \overline{S}$. Esto implica que $\overline{S}$ es un subespacio lineal de E.

(b) Supongamos que S es tal que $S^\circ \neq \varnothing$ y sean $x \in S$ y $r > 0$ tales que $B_r(x) \subseteq S$. Como S es un subespacio, el conjunto $\{y - x : y \in B_r(x)\}$ está contenido en S y es inmediato verificar que es igual a $B_r(0)$. Si ahora $z \in E \setminus 0$, entonces $z/r\|z\|$ es un elemento de $B_r(0)$, así que pertenece a S: como S es un subespacio, tenemos también que $z = r\|x\| \cdot z/r\|z\| \in S$. Vemos de esta forma que $S = E$.

(c) Supongamos que S es un subespacio de E de dimensión finita. Dotado de la norma que se obtiene restringiendo a él la de E es un espacio normado de dimensión finita, así que es completo con respecto a la distancia correspondiente: esto implica que es un cerrado del espacio E.

(d) Supongamos que S es un hiperplano de E, de manera que existe $x \in E \setminus 0$ tal que $E = S \oplus \langle x \rangle$, y supongamos que S no es cerrado. Hay entonces un vector $y \in E \setminus S$ tal que $d(y, S) = 0$ y, por lo tanto, una sucesión $(y_n)_{n\geq 1}$ en S que converge a y. Como $E = S \oplus \langle x \rangle$, existen $s \in S$ y $\lambda \in \mathbb{K}$ tales que $y = s + \lambda x$ y, como $y \notin S$, es $\lambda \neq 0$. Es claro entonces que la sucesión $(\lambda^{-1}(y_n - s))_{n\geq 1}$ converge a x y toma valores en S: se sigue de esto que $\overline{S}$ contiene a S y a x y, como es un subespacio, a $S \oplus \langle x \rangle = E$. □

4. Sea E un espacio normado completo y sea $(x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en E. Si la serie $\sum_{n\geq 1} \|x_n\|$ converge, entonces la serie $\sum_{n\geq 1} x_n$ converge en E.

Solución. Supongamos que la serie $\sum_{n\geq 1} \|x_n\|$ converge y sea $\varepsilon > 0$. La convergencia implica que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que siempre que $n \geq N$ es $\sum_{m\geq n} \|x_m\| < \varepsilon$ y entonces cuando $n \geq m \geq N$ se tiene que

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} x_k - \sum_{k=1}^{m} x_k \right\| = \left\| \sum_{k=m+1}^{n} x_k \right\| \leq \sum_{k=m+1}^{n} \|x_k\| \leq \sum_{k\geq N} \|x_k\| < \varepsilon.$$

Vemos así que la sucesión de sumas parciales de la serie $\sum_{n\geq 1} x_n$ es de Cauchy en E y, como este espacio es completo, que converge: esto significa, por supuesto, que esa serie converge. □

5. Decida si los siguientes subespacios son cerrados, densos, o hiperplanos.

(a) El subespacio c de ℓ_∞ de las sucesiones que tienen límite.

(b) El subespacio c_0 de c de las sucesiones que convergen a 0.

(c) El subespacio de ℓ_1 de las sucesiones $(x_n)_{n\geq 1}$ tales que $\sum_{n\geq 1} x_n = 0$.

(d) El subespacio de ℓ_2 de las sucesiones $(x_n)_{n\geq 1}$ tales que $\sum_{n\geq 1} x_n = 0$.

(e) El subespacio $\mathbb{R}[X]$ de $C[0,1]$.

(f) El subespacio $C^1[a,b]$ de $C[a,b]$.

Solución. (a) Veamos que c es cerrado en ℓ_∞. Sea $(x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en c que converge a un punto $x_0 \in \ell_\infty$, y supongamos que $x_n = (x_{n,m})_{m\geq 1}$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y que $x_0 = (x_{0,m})_{m\geq 1}$: tenemos que mostrar que x_0 pertenece a c. Sea $\varepsilon > 0$. Como $(x_n)_{n\geq 1}$ converge a x_0, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_n - x_0\| < \varepsilon/3$. Por otro lado, como $x_n = (x_{n,m})_{m\geq 1}$ es una sucesión convergente, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|x_{n,m} - x_{n,k}| < \varepsilon/3$ siempre $m, k \geq N$. Si ahora m y k son elementos de $\mathbb{N}$ tales que $m, k \geq N$, entonces

$$|x_{0,m} - x_{0,k}| \leq |x_{0,m} - x_{n,m}| + |x_{n,m} - x_{n,k}| + |x_{n,m} - x_{0,m}| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Vemos así que la sucesión $x_0 = (x_{0,m})_{m\geq 1}$ es de Cauchy y, por lo tanto, como $\mathbb{R}$ es completo, que converge.

Las sucesiones $((-1)^n)_{n\geq 1}$ y $((-1)^{n(n+1)/2})_{n\geq 1}$ no están en c y son linealmente independientes, así que c no es un hiperplano de ℓ_∞.

(b) Sabemos que la función $L : c \to \mathbb{R}$ tal que $L((a_n)_{n\geq 1}) = \lim_{n\to\infty} a_n$ para cada $(a_n)_{n\geq 1}$ de c es una función lineal, continua y no nula: como $c_0 = \ker L$, es claro entonces que c_0 es un hiperplano cerrado de c.

(c) Si $(x_n)_{n\geq 1} \in \ell_1$, entonces la serie $\sum_{n\geq 1} x_n$ es absolutamente convergente y, en particular, converge: esto significa que hay una función $S : (x_n)_{n\geq 1} \in \ell_1 \mapsto \sum_{n\geq 1} x_n \in \mathbb{R}$. Está función es claramente lineal, y es continua porque

$$|S((x_n))_{n\geq 1}| = \left|\sum_{n\geq 1} x_n\right| \leq \sum_{n\geq 1} |x_n| = \|(x_n)_{n\geq 1}\|$$

para cada elemento $(x_n)_{n\geq 1}$ de ℓ_1. Esta función S no es nula y tiene al subespacio del enunciado por núcleo, así que este último es un hiperplano cerrado.

(e) Sabemos que $\mathbb{R}[X]$ es denso en $C[0,1]$ por el Teorema de Stone–Weierstrass y —como no toda función continua en $[0,1]$ es un polinomio— no es cerrado. No es un hiperplano, porque las funciones sin y cos son elementos de $C[0,1]$ linealmente independientes y el subespacio que generan interseca trivialmente a $\mathbb{R}[X]$.

(f) Como $\mathbb{R}[X]$ está contenido en $C^1[a,b]$, sabeos que $C^1[a,b]$ es denso en $C[a,b]$. Si c y d son dos elementos distintos de (a,b), entonces las funciones $x \mapsto |x-c|$ y $x \mapsto |x-d|$ son linealmente independientes y el subespacio que generan interseca trivialmente a $C^1[a,b]$, tenemos que $C^1[a,b]$ no es un hiperplano de $C[a,b]$. □

6. Si $T : E \to F$ es una función lineal entre espacios normados, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) La función T es continua en 0.

(ii) Existe $x_0 \in E$ tal que la función T es continua en x_0.

(iii) La función T es continua.

(iv) La función T es uniformemente continua.

(v) Existe un número $M > 0$ tal que para todo $x \in E$ es $\|T(x)\| \leq M\|x\|$.

(vi) Para todo subconjunto acotado A de E el conjunto $T(A)$ es acotado.

Solución. ($i \Rightarrow ii$) Esto es evidente.

($ii \Rightarrow iii$) Supongamos que la función T es continua en $x_0 \in E$ y sea $x \in E$. Si $(x_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión en E que converge a x, entonces la sucesión $(x_n - x + x_0)_{n\geq 1}$ converge a x_0 y a continuidad en este punto y la linealidad de T implican que $(Tx_n - Tx + Tx_0)_{n\geq 1}$ converge a Tx_0: es inmediato deducir de esto que $(Tx_n)_{n\geq 1}$ converge a Tx. La función T es por lo tanto continua en x.

($iii \Rightarrow iv$) Supongamos que la función T es continua y sea $\varepsilon > 0$. Como T es continua en 0, existe $\delta > 0$ tal que $\|x - 0\| < \delta \implies \|Tx - T0\| < \varepsilon$. En particular, si x e y son dos puntos de E tales que $\|x - y\| < \delta$, entonces tenemos que $\|(x-y) - 0\| < \delta$ y, por lo tanto, que $\|Tx - Ty\| = \|T(x-y) - T0\| < \delta$. Esto nos dice que T es uniformemente continua.

($iv \Rightarrow v$) Supongamos que la función T es uniformemente continua. Sea δ un número positivo tal que $\|x - y\| < \delta \implies \|Tx - Ty\| < 1$. Si ahora $x \in E$ es un vector no nulo de E y ponemos $x' := \delta x / 2\|x\|$, entonces $\|x' - 0\| = \delta/2 < \delta$, así que $\delta\|Tx\|/2\|x\| = \|Tx'\| = \|Tx' - T0\| < 1$, de manera que

$$\|Tx\| \leq \frac{2}{\delta}\|x\|.$$

Esta desigualdad también vale si $x = 0$, así que podemos elegir $M = 2/\delta$.

($v \Rightarrow vi$) Sea $M > 0$ tal que $\|Tx\| \leq M\|x\|$ para todo $x \in E$ y sea A un subconjunto acotado de A, de manera que existe $R > 0$ tal que $A \subseteq B_R(0)$. Si $x \in A$, entonces $\|Tx\| \leq M\|x\| \leq MR$: esto nos dice que $TA \subseteq B_{MR}(0)$ y, por lo tanto, que TA es un subconjunto acotado de F.

($vi \Rightarrow i$) Supongamos que la imagen por T de un conjunto acotado de E es acotado en F y sea $\varepsilon > 0$. La bola $B_1(0)$ de E es acotada, así que la hipótesis nos dice que existe $R > 0$ tal que $T(B_1(0)) \subseteq B_R(0)$, y esto implica inmediatamente que $T(B_{\varepsilon/R}(0)) \subseteq B_\varepsilon(0)$. Vemos así que la función T es continua en 0. □

7. Sean E y F dos espacios normados y sea $L(E,F)$ el conjunto de todas las funciones lineales $E \to F$ que son continuas.

(a) $L(E,F)$ es, de manera natural, un espacio vectorial.

(b) Para cada $T \in L(E,F)$ el conjunto $\{\|T(x)\| : x \in E, \|x\| \leq 1\}$ es acotado, así que podemos considerar el número real

$$\|T\| := \sup_{\substack{x\in E\\ \|x\|\leq 1}} \|T(x)\|.$$

La función $\|{-}\| : L(E,F) \to \mathbb{R}$ es una norma sobre $L(E,F)$.

(c) Si F es un espacio de Banach, entonces $L(E,F)$ también lo es.

Solución. (a) Sean f y g dos elementos de $L(E,F)$ y sea $a \in \mathbb{K}$. Sabemos que la función lineal $f + ag : E \to F$ es continua, así que $L(E,F)$ es un subespacio vectorial del espacio $\mathsf{hom}(E,F)$ de todas las funciones lineales $E \to F$.

(b) Sea $T \in L(E,F)$. Como T es continuo, sabemos del Ejercicio **6** que la imagen por T de un conjunto acotado es acotada: en particular, el subconjunto $\{T(x) : x \in B_1(0)\}$ de F es acotado, de manera que $\{\|T(x)\| : x \in B_1(0)\}$ es acotado en $\mathbb{R}$.

Veamos ahora que la función $\|-\|$ definida en el enunciado es una norma sobre $L(E,F)$.

- Si $T = 0 : E \to F$ es el cero de $L(E,F)$, entonces claramente $\|T(x)\| = 0$ para todo $x \in B_1(0)$, así que $\|T\| = 0$.
- Recíprocamente, supongamos que $T \in L(E,F)$ es tal que $\|T\| = 0$ y sea $x \in E \setminus 0$. Como $\|x/\|x\|\| \le 1$, tenemos que $\|Tx\|/\|x\| = \|T(x/\|x\|)\| \le 0$, así que $Tx = 0$: vemos de esta forma que $T = 0$.
- Sean $\lambda \in \mathbb{K}$ y $T \in L(E,F)$. Es

$$\begin{aligned}\|\lambda T\| &= \sup\{\|(\lambda T)(x)\| : x \in B_1(0)\}\\ &= \sup\{\|\lambda T(x)\| : x \in B_1(0)\}\\ &= \sup\{|\lambda|\|T(x)\| : x \in B_1(0)\}\\ &= |\lambda| \sup\{\|T(x)\| : x \in B_1(0)\}\\ &= |\lambda|\|T\|.\end{aligned}$$

- Sean T, $S \in L(E,F)$. Si $x \in B_1(0)$, entonces

$$\|(T+S)(x)\| \le \|T(x)+S(x)\| \le \|T(x)\| + \|S(x)\| \le \|T\| + \|S\|,$$

así que

$$\|T+S\| = \sup\{\|(T+S)(x)\| : x \in B_1(0)\} \le \|T\| + \|S\|.$$

(*c*) Supongamos ahora que F es un espacio de Banach y sea $(T_n)_{n\ge1}$ una sucesión de Cauchy en $L(E,F)$. Sea $x \in E$. Si $\varepsilon > 0$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|T_n - T_m\| < \varepsilon$ si n, $m \ge N$, y entonces si n, $m \ge N$ tenemos que

$$\|T_n(x) - T_m(x)\| = \|(T_n - T_m)(x)\| \le \|T_n - T_m\| \cdot \|x\| < \varepsilon\|x\|.$$

Esto nos dice que la sucesión $(T_n x)_{n\ge1}$ en F es de Cauchy y, por lo tanto, como F es completo, que converge: escribamos Tx a su límite. Obtenemos de esta forma una función $T : E \to F$. Veamos que esta función es lineal y continua

- Sean x, $y \in E$ y sea $a \in \mathbb{K}$. Las sucesiones $(T_n x)_{n\ge1}$ y $(T_n y)_{n\ge1}$ convergen a Tx y a Ty, respectivamente, así que la sucesión $(T_n(x+ay))_{n\ge1} = (T_n x + aT_n y)_{n\ge1}$ converge por un lado a $T(x+ay)$ y por otro a $Tx + aTy$: vemos así que la función T es lineal.
- Como la sucesión $(T_n)_{n\ge1}$ es de Cauchy, es acotada, y existe $R > 0$ tal que $\|T_n\| \le R$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Si $x \in E$, entonces $\|T_n x\| \le \|T_n\|\|x\| \le R\|x\|$, así que, como la sucesión $(T_n x)_{n\ge1}$ converge a Tx y la función $\|-\|$ es continua, tenemos que $\|Tx\| \le R\|x\|$. De acuerdo al Ejercicio **6**, esto implica que T es continua.

Con esto tenemos que T es un elemento de $L(E,F)$: veamos para terminar que es el límite de la sucesión $(T_n)_{n\ge1}$.

- Sea $\varepsilon > 0$. Como $(T_n)_{n\ge1}$ es de Cauchy, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|T_n - T_m\| \le \varepsilon$ siempre que n, $m \ge N$. En particular, si $x \in B_1(0)$, entonces si n, $m \ge N$ tenemos que

$$\|T_n x - T_m x\| = \|(T_n - T_m)(x)\| \le \|T_n - T_m\|\|x\| < \varepsilon.$$

Como la sucesión $(T_k x)_{k\ge1}$ converge a Tx y la norma es continua, tenemos que para cada $n \ge N$ es $\|T_n x - Tx\| \le \varepsilon$ y, por lo tanto, que $\|T_n - T\| \le \varepsilon$. Esto implica, claro, que la sucesión $(T_n)_{n\ge1}$ converge a T, como queríamos. $\square$

8. Si $T : E \to F$ es una función lineal y continua entre espacios normados, entonces

$$\|T\| = \sup_{\substack{x\in E\\ \|x\|\leq 1}} \|T(x)\| = \sup_{\substack{x\in E\\ \|x\|=1}} \|T(x)\| = \sup_{x\in E\setminus\{0\}} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|}$$
$$= \inf\{M \in \mathbb{R} : \forall x \in E, \|T(x)\| \leq M\|x\|\}.$$

Solución. Sea $T : E \to F$ una función lineal y continua entre espacios normados. La primera igualdad del enunciado es la definición de $\|T\|$. Veamos las otras.

- Es

$$\sup_{\substack{x\in E\\ \|x\|\leq 1}} \|T(x)\| \geq \sup_{\substack{x\in E\\ \|x\|=1}} \|T(x)\|$$

  porque el primer supremo es el de un conjunto que contiene al del segundo.

- Si $y \in E \setminus \{0\}$, entonces $\|y/\|y\|\| = 1$, así que

$$\sup_{\substack{x\in E\\ \|x\|=1}} \|T(x)\| \geq \left\| T\left(\frac{y}{\|y\|}\right)\right\| = \frac{\|Ty\|}{\|y\|},$$

  así que

$$\sup_{\substack{x\in E\\ \|x\|=1}} \|T(x)\| \geq \sup_{x\in E\setminus\{0\}} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|}.$$

- Escribamos $K := \sup\{\|Tx\|/\|x\| : x \in E \setminus 0\}$. Si $x \in E \setminus 0$, entonces $\|Tx\|/\|x\| \leq K$, así que $\|Tx\| \leq K\|x\|$. Como esta última desigualdad también vale si $x = 0$, tenemos que $K \in \{M \in \mathbb{R} : \forall x \in E, \|T(x)\| \leq M\|x\|\}$ y, por lo tanto, que

$$\sup\{\|Tx\|/\|x\| : x \in E \setminus 0\} = K \geq \inf\{M \in \mathbb{R} : \forall x \in E, \|T(x)\| \leq M\|x\|\}.$$

- Sea ahora $K := \inf\{M \in \mathbb{R} : \forall x \in E, \|T(x)\| \leq M\|x\|\}$. Si $\varepsilon > 0$, entonces existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $M \leq K + \varepsilon$ y $\|Tx\| \leq M\|x\|$ para todo $x \in E$. En particular, si $x \in \overline{B}_1(0)$, tenemos que $\|Tx\| \leq M \leq K + \varepsilon$, así que

$$K + \varepsilon \geq \sup_{\substack{x\in E\\ \|x\|\leq 1}} \|T(x)\|.$$

  Como esto es cierto cualquiera sea ε, podemos concluir que

$$\inf\{M \in \mathbb{R} : \forall x \in E, \|T(x)\| \leq M\|x\|\} = K \geq \sup_{\substack{x\in E\\ \|x\|\leq 1}} \|T(x)\|.$$

Quedan así probadas todas las igualdades del enunciado. □

9. Sea $K : [0,1]\times[0,1] \to \mathbb{R}$ una función continua. Muestre que el operador lineal $T : C[0,1] \to C[0,1]$ tal que

$$Tf(x) = \int_0^1 K(x,y)f(y)\,\mathrm{d}y$$

para toda función $f \in C[0,1]$ y todo $x \in [0,1]$ es continuo y acote su norma.

Solución. Primero mostremos que para cada $f \in C[0,1]$ la función Tf efectivamente está en $C[0,1]$, de manera que el operador T está bien definido.

- Sea $\varepsilon > 0$. Como K es continua y su dominio compacto, es uniformemente continua, y existe $\delta > 0$ tal que si (x,y) y (x',y') son dos puntos de $[0,1]\times[0,1]$ a distancia menor a δ entonces $|K(x,y) - K(x',y')| < \varepsilon$. En particular, si x y x' son dos elementos de $[0,1]$ que están a distancia menor que δ, entonces para todo $y \in [0,1]$ los puntos (x,y) y (x',y) están a distancia menor a δ y, por lo tanto, tenemos que

$$\begin{aligned}|Kf(x) - Kf(x')| &= \left|\int_0^1 K(x,y)f(y)\,\mathrm{d}y - \int_0^1 K(x',y)f(y)\,\mathrm{d}y\right| \\ &\leq \int_0^1 |K(x,y) - K(x',y)||f(y)|\,\mathrm{d}y \leq \varepsilon\|f\|_\infty.\end{aligned}$$

  Esto nos dice que la función $Tf : [0,1] \to \mathbb{R}$ es uniformemente continua.

Es claro que la función $T : C[0,1] \to C[0,1]$ es lineal. Veamos que es continua.

- Sea $f \in C[0,1]$. Como la función K es continua, es acotada y podemos considerar su norma $\|K\|_\infty$. Si $x \in [0,1]$, tenemos que

$$|Tf(x)| \leq \int_0^1 |K(x,y)||f(y)|\,\mathrm{d}y \leq \|K\|_\infty \cdot \|f\|_\infty,$$

  así que $\|Tf\|_\infty \leq \|K\|_\infty \cdot \|f\|_\infty$. Esto implica que la función lineal T es continua.

Observemos que esta última desigualdad nos dice que $\|T\| \leq \|K\|_\infty$. □

10. Sea $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ el subespacio de ℓ_∞ de las sucesiones de números reales con un número finito de componentes no nulas. Muestre que la función $f : \mathbb{R}^{(\mathbb{N})} \to \mathbb{R}$ tal que

$$f\left((a_n)_{n\geq 1}\right) = \sum_{n\geq 1} n a_n$$

para toda sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$ de $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ es lineal pero no continua.

Solución. La función es claramente lineal. Si para cada $n \in \mathbb{N}$ escribimos e_n al elemento de $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ cuya única componente no nula es la n-ésima, que es igual a 1, entonces $\|e_n\| = 1$ y $\|f(e_n)\| = n$. Vemos así que f no es acotada sobre la bola unidad de $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ y, por lo tanto, que no es continua. □

11. (*a*) Si $\phi \in C[0,1]$, entonces

$$T : f \in C[0,1] \mapsto \int_0^1 f(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x \in \mathbb{R}$$

es una función lineal continua con $\|T\| \leq \int_0^1 |\phi(x)|\,\mathrm{d}x$.

(*b*) Muestre que la función

$$T : (a_n)_{n\geq 1} \in c \mapsto \lim_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{R}$$

es lineal y continua, y encuentre su norma.

(c) Sea $p \in (1, +\infty)$, sea $p' := p/(p-1)$ el exponente conjugado a p y sea $b = (b_n)_{n\geq 1} \in \ell_{p'}$. Muestre que la función

$$T : (a_n)_{n\geq 1} \in \ell_p \mapsto \sum_{n\geq 1} a_n b_n \in \mathbb{R}$$

es lineal y continua, y encuentre su norma.

Solución. (a) Es claro que la función T del enunciado es lineal. Por otro lado,si $f \in C[0,1]$ tenemos que

$$|Tf| \leq \int_0^1 |f(x)||\phi(x)|\,\mathrm{d}x \leq \|f\| \cdot \int_0^1 |\phi(x)|\,\mathrm{d}x,$$

así que la función T es continua y $\|T\| \leq \int_0^1 |\phi(x)|\,\mathrm{d}x$.

(b) La función T es claramente lineal. Por otro lado, es claro que si $a = (a_n)_{n\geq 1}$ es un elemento de c, entonces $|\lim_{n\to\infty} a_n| = \lim_{n\geq 1}|a_n| \leq \sup_{n\geq 1}|a_n| = \|a\|$, de manera que la función T es continua y tiene norma $\|T\| \leq 1$. De hecho, vale la igualdad: si $a_n = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $\|Ta\| = 1 = \|a\|$ y $a \neq 0$, así que $\|T\| = \sup_{a\in c\setminus 0}\|Ta\|/\|a\| \geq 1$.

(c) Podemos suponer sin problema que $b \neq 0$. Si $a = (a_n)_{n\geq 1}$ es un elemento de ℓ_p, entonces para todo $N \in \mathbb{N}$ tenemos que

$$\sum_{n=1}^{N} |a_n||b_n| \leq \left(\sum_{n=1}^{n} |a_n|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{n=1}^{n} |b_n|^{p'}\right)^{1/p'}$$

por la desigualdad de Hölder, y esto es

$$\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^{p'}\right)^{1/p'} = \|a\|_p \cdot \|b\|_{p'}.$$

Esto nos dice que las sumas parciales de la serie $\sum_{n\geq 1}|a_n b_n|$ están acotadas, así que esa serie converge: esto significa que la serie $\sum_{n\geq 1} a_n b_n$ converge absolutamente y nos permite concluir que la función del enunciado tiene sentido. Más aún, la desigualdad nos dice que

$$|Ta| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n||b_n| \leq \|a\|_p \cdot \|b\|_{p'},$$

así que la función T es continua y tiene norma $\|T\| \leq \|b\|_{p'}$. De hecho, vale la igualdad: para cada $n \in \mathbb{N}$ pongamos $a_n = \varepsilon_n |b_n|^{p'-1}$, con $\varepsilon_n \in \mathbb{K}$ elegido de módulo 1 y tal que $\varepsilon_n b_n = |b_n|$. La sucesión $a = (a_n)_{n\geq 1}$ está en ℓ_p: en efecto, como $(p'-1)p = p'$, tenemos que $|a_n|^p = |b_n|^{p'}$ así que la serie $\sum_{n\geq 1}|a_n|^p$ coincide término a término con la serie $\sum_{n\geq 1}|b_n|^{p'}$, que converge porque $b \in \ell_{p'}$. Ahora bien,

$$Ta = \sum_{n\geq 1} a_n b_n = \sum_{n\geq 1} \varepsilon_n |b_n|^{p'-1} b_n = \sum_{n\geq 1} |b_n|^{p'} = \|b\|_{p'}^{p'}$$

mientras que

$$\|a\|_p^p = \sum_{n\geq 1} |a_n|^p = \sum_{n\geq 1} |b_n|^{p'} = \|b\|_{p'}^{p'},$$

de manera que $\|a\|_p = \|b\|_{p'}^{p'/p} = \|b\|_{p'}^{1/(p-1)}$ y

$$\frac{|Ta|}{\|a\|_p} = \frac{\|b\|_{p'}^{p'}}{\|b\|_{p'}^{1/(p-1)}} = \|b\|_{p'}^{p'-1/(p-1)} = \|b\|_{p'}.$$

Esto implica que $\|T\| \geq \|b\|_{p'}$. □

12. Sea E un espacio normado. Un subespacio lineal H de E es un hiperplano si y solamente si existe una función lineal $\phi : E \to \mathbb{K}$ no nula tal que $H = \ker \phi$. Más aún, cuando ese es el caso, H es cerrado si y solamente si la función ϕ puede elegirse continua.

Solución. Supongamos primero que H es un hiperplano, de manera que existe $x \in E \setminus 0$ tal que $E = H \oplus \langle x \rangle$. Si $y \in E$, existe $h \in H$ y $\lambda_y \in \mathbb{K}$, bien determinados por y, tales que $y = h + \lambda x$: podemos entonces considerar la función $\phi : y \in E \mapsto \lambda_y \in \mathbb{K}$. Es inmediato verificar que esta función el lineal, que $H = \ker \phi$ y que $\phi(x) = 1$, de manera que $\phi \neq 0$.

Recíprocamente, si $\phi : E \to \mathbb{K}$ es una función lineal no nula tal que $H = \ker \phi$, entonces existe $x \in E$ tal que $\phi(x) \neq 0$. En particular, tenemos que $x \notin H$, de manera que $\langle x \rangle \cap H = 0$, y si $y \in E$, entonces $\phi(y - \phi(y)x/\phi(x)) = 0$, de manera que $y = (y - \phi(y)x/\phi(x)) + \phi(y)x/\phi(x) \in H + \langle x \rangle$. Esto nos dice que $E = H \oplus \langle x \rangle$.

Supongamos ahora que H es un hiperplano y que $\phi : E \to \mathbb{K}$ es una función lineal tal que $H = \ker \phi$. Si ϕ es continua, entonces claramente H es cerrado. Supongamos ahora que ϕ no es continua: esto implica, como sabemos, que no es continua en 0 y existe entonces una sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ en E que converge a 0 y tal que $(\phi(x_n))_{n\geq 1}$ no converge a 0. Como H es un hiperplano, existe $x \in E \setminus 0$ tal que $E = H \oplus \langle x \rangle$, y entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ hay un vector $h_n \in H$ y un escalar $\lambda_n \in \mathbb{K}$, ambos bien determinados, tales que $x_n = h_n + \lambda_n x$. Como $x \notin H$, es $\phi(x) \neq 0$; además, es $\phi(x_n) = \lambda_n \phi(x)$, así que la sucesión $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ no converge a 0 en $\mathbb{K}$. A menos de quedarnos con una subsucesión de $(x_n)_{n\geq 1}$, es claro que podemos suponer que $\lambda_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. En ese caso, como $(h_n + \lambda_n x)_{n\geq 1}$ converge a 0, la sucesión $(-h_n/\lambda_n)_{n\geq 1}$ converge a x: vemos así que la clausura de H contiene a x y, como $\overline{H}$ es un subespacio de E, que es densa. Esto implica que H no es un cerrado de E. □

13. *Lema de Riesz.* Sea E un espacio normado y sea S un subespacio lineal de E que es cerrado y propio. Si $\alpha \in (0,1)$, entonces existe $z \in E \setminus S$ tal que $\|z\| = 1$ y $\|s - z\| > \alpha$ para todo $s \in S$.

Sugerencia. Fije $x \in E \setminus S$ y $z = (x - b)/\|x - b\|$ con $b \in S$ apropiadamente elegido.

Solución. Sea $\alpha \in (0,1)$. Sea x un elemento cualquiera de $E \setminus S$. Como S es cerrado, es $d(x,S) > 0$ y existe $\varepsilon > 0$ tal que $d(x,S)/(d(x,S)+\varepsilon) > \alpha$. Sea $y \in S$ tal que $d(x,y) \leq d(x,S) + \varepsilon$ y pongamos $z = (x-y)/\|x-y\|$, que es un vector unitario de E que no pertenece a S. Es

$$d(z,S) = \inf_{s\in S} \left\| \frac{x-y}{\|x-y\|} - s \right\| = \inf_{s\in S} \frac{\left\| x - y - \|x-y\| s \right\|}{\|x-y\|} = \frac{\inf_{s\in S} \|x-s\|}{\|x-y\|} \geq \frac{d(x,S)}{d(x,S)+\varepsilon} > \alpha.$$

El vector z tienen, por lo tanto, la propiedad que queremos. □

14. Sea E un espacio de Banach y sean S y T dos subespacios cerrados de E. Si T tiene dimensión finita, entonces el subespacio $S + T$ de E también es cerrado.

Solución. Supongamos que T tiene dimensión finita. Si T tiene dimensión mayor que 1 y T' es un subespacio de T de codimensión 1 y $x \in T \setminus T'$, de manera que $T = T' + \langle x \rangle$, entonces $S + T = (S + T') + \langle x \rangle$: una inducción evidente usando esta igualdad muestra que para probar la afirmación del ejercicio es suficiente con considerar el caso en que $\dim T = 1$ y $T \nsubseteq S$.

Sea entonces S un subespacio cerrado de E, sea $x \in E \setminus S$, y mostremos que $S + \langle x \rangle$ es un subespacio cerrado de E. Sea $(x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en $S + \langle x \rangle$ que converge en E a un punto $y \in E$: tenemos que ver que $y \in S + \langle x \rangle$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ hay entonces $s_n \in S$ y $\lambda_n \in \mathbb{K}$ tales que $x_n = s_n + \lambda_n x$.

Supongamos por un momento que la sucesión $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ no posee ninguna subsucesión convergente. Queremos construir una subsucesión $(\lambda_{n_k})_{k\geq 1}$ de $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ de manera que se tenga $|\lambda_{n_k} - \lambda_{n_l}| \geq 1$ siempre que k y l son dos elementos distintos de $\mathbb{N}$. Elegimos $n_1 = 1$ y procedemos inductivamente: si $N \in \mathbb{N}$ y ya elegimos una secuencia estrictamente creciente $n_1, \ldots, n_N$ en $\mathbb{N}$, entonces como el subconjunto $\bigcup_{i=1}^{N} \overline{B}_2(\lambda_{n_i})$ de $\mathbb{K}$ es compacto y $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ no posee ninguna subsucesión convergente, el conjunto $\{j \in \mathbb{N} : j > n_N,\ \lambda_j \notin \bigcup_{i=1}^{N} \overline{B}_2(\lambda_{n_i})\}$ no es vacío y si n_{N+1} es su menor elemento, entonces tenemos que $n_{N+1} > n_N$ y que $d(\lambda_{n_{N+1}}, \lambda_{n_i}) \geq 1$ para cada $i \in [\![N]\!]$. Esto completa la construcción.

Sea ahora $\varepsilon > 0$. Como la sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ es de Cauchy, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que siempre que $n, m \geq N$ es

$$\|(s_n - s_m) + (\lambda_n - \lambda_m)x\| = \|x_n - x_m\| < \varepsilon$$

En particular, si $k > l \geq N$, entonces $n_k, n_l \geq N$ y

$$\left\| \frac{s_{n_k} - s_{n_l}}{\lambda_{n_k} - \lambda_{n_l}} + x \right\| = \frac{\|(s_{n_k} - s_{n_l}) + (\lambda_{n_k} - \lambda_{n_l})x\|}{|\lambda_{n_k} - \lambda_{n_l}|} < \varepsilon,$$

por la forma en que elegimos la subsucesión $(\lambda_{n_r})_{r\geq 1}$. Esto vale cualquiera sea $\varepsilon > 0$, así que tenemos que $d(x, S) = 0$ y, como S es cerrado, que $x \in S$: esto es absurdo.

Concluimos de esta forma que la sucesión $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ posee una subsucesión $(\lambda_{n_k})_{k\geq 1}$ convergente. Si λ es su límite, es claro que la sucesión $(s_n)_{n\geq 1} = (x_n - \lambda_n x)_{n\geq 1}$ converge a $y - \lambda x$: como toma valores en el subespacio cerrado S, esto nos dice que $y - \lambda x \in S$ y, por lo tanto, que $y = (y - \lambda x) + \lambda x \in S + \langle x \rangle$, como queríamos. □

15. Sea E un espacio normado de dimensión infinita. Muestre que existe una sucesión $(\omega_n)_{n\geq 1}$ en E tal que $\|\omega_n\| = 1$ y $d(\omega_n, \omega_m) > \frac{1}{2}$ cualesquiera sean n y m en $\mathbb{N}$, y deducir de esto que la bola $\overline{B_1(0)}$ no es compacta.

Sugerencia. Aplique el Lema de Riesz a una sucesión creciente de subespacios lineales de dimensión finita.

Solución. Como $E \neq 0$, porque tiene dimensión infinita, existe un vector unitario ω_1 en E. Supongamos ahora inductivamente que $N \in \mathbb{N}$ y que logramos construir una secuencia $\omega_1, \ldots, \omega_N$ de vectores unitarios de E tales que $d(\omega_n, \omega_m) > \frac{1}{2}$ siempre que n y m son dos elementos distintos de $[\![N]\!]$. Como el subespacio $\langle \omega_1, \ldots, \omega_N \rangle$ de E tiene dimensión finita, es cerrado y propio, así que el Lema de Riesz nos dice que existe un vector unitario ω_{N+1} en E tal que $d(\omega_{N+1}, \omega_n) > \frac{1}{2}$ para cada $n \in [\![N]\!]$.

De esta forma, obtenemos una sucesión $(\omega_n)_{n\geq 1}$ de vectores unitarios de E tales que

$d(\omega_n, \omega_m) > \frac{1}{2}$ siempre que n y m son elementos distintos de $\mathbb{N}$. En particular, esa sucesión toma valores en la bola cerrada $\overline{B}_1(0)$ y no posee ninguna subsucesión convergente, así que esa bola no es compacta. □

16. Muestre que un espacio de Banach de dimensión infinita no puede tener una base lineal numerable.

Sugerencia. Muestre que un espacio de Banach de dimensión numerable es unión creciente de una sucesión de subespacios lineales de dimensión finita y use el Teorema de Baire.

Solución. Sea E un espacio normado de dimensión numerable y sea $(x_n)_{n\geq 1}$ una base ordenada de E. Para cada $m \in \mathbb{N}$ el subespacio $S_m = \langle x_1, \dots, x_m \rangle$ de E tiene dimensión finita, así que es un cerrado y, porque es propio, tiene interior vacío. Como $(x_n)_{n\geq 1}$ genera a E como espacio vectorial, es claro que $E = \bigcup_{n\geq 1} S_n$: esto nos dice que E es de primera categoría y, de acuerdo al Teorema de Baire, que no es completo. □

17. Sea E un espacio normado, sean $(x_n)_{n\geq 1}$ e $(y_n)_{n\geq 1}$ dos sucesiones en E tales que las series $\sum_{n\geq 1} x_n$ y $\sum_{n\geq 1} y_n$ convergen, y sea $\lambda \in \mathbb{K}$.

(a) La serie $\sum_{n\geq 1}(x_n + y_n)$ converge a $\sum_{n\geq 1} x_n + \sum_{n\geq 1} y_n$.

(b) La serie $\sum_{n\geq 1} \lambda x_n$ converge a $\lambda \sum_{n\geq 1} x_n$.

Solución. Si $N \in \mathbb{N}$, entonces

$$\sum_{n=1}^{N}(x_n + y_n) = \sum_{n=1}^{N} x_n + \sum_{n=1}^{N} y_n, \qquad \sum_{n=1}^{N} \lambda x_n = \lambda \sum_{n=1}^{N} x_n.$$

Esto nos dice que la sucesión de sumas parciales de la serie $\sum_{n\geq 1}(x_n + y_n)$ es la suma término a término de las sucesiones de sumas parciales de las series $\sum_{n\geq 1} x_n$ y $\sum_{n\geq 1} y_n$, por un lado, y que la sucesión de sumas parciales de la serie $\sum_{n\geq 1} \lambda x_n$ se obtiene de la sucesión de sumas parciales de la serie $\sum_{n\geq 1}$ multiplicando término a término por λ. Se sigue de todo esto, claro, que la serie $\sum_{n\geq 1}(x_n + y_n)$ converge y que converge a $\sum_{n\geq 1} x_n + \sum_{n\geq 1} y_n$ y que la serie $\sum_{n\geq 1} \lambda x_n$ converge y que converge a $\lambda \sum_{n\geq 1} x_n$. □

18. Sea E un espacio de Banach y sea $(a_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en E tal que la serie $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge absolutamente. Si $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es una función biyectiva, entonces la serie $\sum_{n\geq 1} a_{\sigma(n)}$ converge y converge a $\sum_{n\geq 1} a_n$.

Solución. Sea a la suma de la serie $\sum_{n\geq 1} a_n$ y sea $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una biyección. Sea $\varepsilon > 0$. Como la serie $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge absolutamente a a, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, por un lado, $\sum_{n\geq N} \|a_n\| < \varepsilon$ y, por otro, para todo $m \geq N$ es $\|\sum_{n=1}^{m} a_n - a\| < \varepsilon$.

Sea $M = \max\{\sigma^{-1}(i) : 1 \leq i \leq N\}$. Como M es el máximo de un conjunto de N números de $\mathbb{N}$ distintos dos a dos, tenemos que $M \geq N$. Por otro lado, si $i \in [\![N]\!]$, entonces existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $i = \sigma(j)$ y, por lo tanto, $j = \sigma^{-1}(i) \leq M$, de manera que $j \in [\![M]\!]$. Vemos de esta manera que los N elementos $a_1, \dots, a_N$ están entre los M elementos $a_{\sigma(1)}, \dots, a_{\sigma(M)}$.

Sea ahora $m \geq M$. Por nuestra observación, es

$$a_{\sigma(1)} + \cdots + a_{\sigma(m)} = a_1 + \cdots + a_N + \begin{pmatrix} \text{suma de } m-N \text{ términos de } (a_k)_{k\geq 1} \\ \text{con índice mayor que } N. \end{pmatrix}.$$

Si llamamos Q a la suma ahí descripta, la elección de N implica que $\|Q\| < \varepsilon$ y que

$$\|(a_{\sigma(1)} + \cdots + a_{\sigma(m)}) - a\| \leq \|(a_1 + \cdots + a_N) - a\| + \|Q\| < 2\varepsilon.$$

Vemos así que la serie $\sum_{n\geq 1} a_{\sigma(n)}$ converge a a. $\square$