CÁLCULO AVANZADO

Segundo Cuatrimestre — 2019

Práctica 8: Series de funciones y convergencia uniforme

Convergencia uniforme

1. Sean X un espacio métrico y A un conjunto, sea $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de funciones $A \to X$ y sea $f : A \to X$ una función. La sucesión $(f_n)_{n\geq 1}$ *no* converge uniformemente a f sobre A si y solamente si existen $\alpha > 0$, una sucesión estrictamente creciente $(n_k)_{k\geq 1}$ de elementos de $\mathbb{N}$ y una sucesión $(a_k)_{k\geq 1}$ en A tales que $d(f_{n_k}(a_k), f(a_k)) \geq \alpha$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

2. Encuentre el límite puntual de las siguientes sucesiones de funciones:

(a) $(f_n)_{n\geq 1}$ con $f_n : x \in (-1,1] \mapsto x^n \in \mathbb{R}$ para cada $n \in \mathbb{N}$;

(b) $(g_n)_{n\geq 1}$ con $g_n : x \in (1,+\infty) \mapsto x^{-n}e^x \in \mathbb{R}$ para cada $n \in \mathbb{N}$;

(c) $(h_n)_{n\geq 1}$ con $h_n : x \in [0,1] \mapsto n^2x(1-x^2)^n \in \mathbb{R}$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Muestre además que la primera converge uniformemente sobre $(0,\frac{1}{2})$ y que la segunda converge uniformemente sobre $[2,5]$. ¿Es uniforme la convergencia de la tercera sobre $[0,1]$?

3. Analice la convergencia puntual y uniforme de las siguientes sucesiones de funciones:

(a) $f_n(x) = n^{-1}\sin nx$, en $\mathbb{R}$;

(b) $f_n(x) = \sin(x/n)$, en $\mathbb{R}$;

(c) $f_n(x,y) = \dfrac{n}{n+1}(x,y)$, en $\mathbb{R}^2$ y con valores en $\mathbb{R}^2$;

(d) $f_n(x) = (1+\frac{1}{n})x$, en $[0,1]$;

(e) $f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \text{ o } x = 0; \\ b + \frac{1}{n} & \text{si } x = \frac{a}{b} \text{ con } a,\, b \in \mathbb{Z},\, b \neq 0 \text{ y } (a,b) = 1; \end{cases}$ en $[0,1]$;

(f) $f_n(z) = z^n$, en $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

4. Sea X un conjunto, sea $B(X)$ el conjunto de todas las funciones $X \to \mathbb{C}$ que son acotadas y sea $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en $B(X)$.

(a) Si $(f_n)_{n\geq 1}$ converge puntualmente a una función $f : X \to \mathbb{C}$, ¿es cierto que $f \in B(X)$?

(b) Si $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente a una función $f : X \to \mathbb{C}$, entonces f es un elemento de $B(X)$.

(c) La sucesión $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente a una función acotada $f : X \to \mathbb{C}$ si y solamente si $(f_n)_{n\geq 1}$ converge a f en el espacio métrico $(B(X), d_\infty)$.

(d) Si $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente en X, entonces $(f_n)_{n\geq 1}$ es uniformemente acotada.

5. Si cada $n \in \mathbb{N}$ sea $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$f_n(x) = \frac{x}{1+x^2} - \frac{x(x^2+1)}{1+(n+1)^2x^2}$$

para cada $x \in \mathbb{R}$, entonces $(f_n)_{n\geq 1}$ converge puntualmente pero no uniformemente a una función continua.

6. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $f_n : x \in [0,1] \mapsto \frac{nx^2}{1+nx^2} \in \mathbb{R}$. Estudie la convergencia puntual y uniforme de las sucesiones $(f_n)_{n\geq 1}$ y $(f_n')_{n\geq 1}$.

7. Sea X un espacio métrico y sea $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de funciones $X \to \mathbb{R}$ uniformemente continuas que converge uniformemente a una función $f : X \to \mathbb{R}$. ¿Es uniformemente continua la función f?

8. Sea X un espacio métrico y sean $(f_n)_{n\geq 1}$ y $(g_n)_{n\geq 1}$ dos sucesiones de funciones $X \to \mathbb{R}$ que convergen uniformemente sobre X a funciones f y g, respectivamente.

(a) La sucesión $(f_n + g_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente a $f + g$ sobre X.

(b) Si las dos sucesiones están uniformemente acotadas, entonces la sucesión $(f_n g_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente a fg sobre X.

9. Sea X un espacio métrico compacto y sea A un conjunto. Si $(f_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión de funciones continuas $X \to \mathbb{R}$ que converge uniformemente a $f : X \to \mathbb{R}$ y $(g_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión de funciones que converge uniformemente a una función $g : A \to X$, entonces la sucesión $(f_n \circ g_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente sobre A a la composición $f \circ g$.

10. *Teorema de Dini*. Sea X un espacio métrico compacto. Si $(f_n)_{n\geq 1}$ en una sucesión de funciones continuas $X \to \mathbb{R}$ tal que

- $f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$ para todo $x \in X$ y todo $n \in \mathbb{N}$, y
- $(f_n)_{n\geq 1}$ converge puntualmente a una función $f : X \to \mathbb{R}$ que es continua,

entonces la sucesión $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente a f en X.

11. Sea X un espacio métrico compacto, sea $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de funciones continuas $X \to \mathbb{R}$ y sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función continua. La sucesión $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente a f si y solamente si para todo sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ en X que converge a un punto x la sucesión $(f_n(x_n))_{n\geq 1}$ converge a $f(x)$.

Equicontinuidad

12. Sean X e Y dos espacios métricos.

(a) Una familia finita de funciones $X \to Y$ continuas en un punto x de X es equicontinua en x.

(b) Sea $B(X,Y)$ el espacio métrico de las funciones acotadas $X \to Y$. La clausura de un subconjunto equicontinuo de $B(X,Y)$ es equicontinua.

(c) Si X es compacto, entonces toda famila equicontinua de funciones $X \to Y$ es uniformemente equicontinua.

(d) Una sucesión de funciones continuas $X \to Y$ que converge uniformemente es equicontinua.

(e) Si X es compacto, entonces una sucesión de funciones $X \to Y$ que es uniformemente equicontinua y converge puntualmente converge uniformemente.

13. Sea $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de funciones $[a,b] \to \mathbb{R}$ integrables y uniformemente acotadas. Si para cada $n \in \mathbb{N}$ la función $F_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ es tal que

$$F_n(x) = \int_a^x f_n(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

para cada $x \in [a,b]$, entonces la sucesión $(F_n)_{n\geq 1}$ posee una subsucesión que converge uniformemente en $[a,b]$.

Series de funciones

14. Sea X un espacio métrico y sea $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de funciones continuas $X \to \mathbb{R}$ tal que la serie $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge uniformemente en X.

(a) La función suma $f = \sum_{n\geq 1} f_n$ es continua en X.

(b) Si $X = [a,b]$, entonces $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n\geq 1} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

15. *Criterio de Weierstrass*. Sea X un espacio métrico, sea $(M_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de números reales y sea $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de funciones $X \to \mathbb{R}$ tal que $|f_n(x)| \leq M_n$ para cada $x \in X$ y cada $n \in \mathbb{N}$. Si la serie de números $\sum_{n\geq 1} M_n$ converge, entonces la serie de funciones $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge absoluta y uniformemente sobre X.

16. *Criterio de Dirichlet* Sean $(a_n)_{n\geq 1}$ una sucesión decreciente de números reales que converge a 0 y $(b_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de números complejos. Si existe $M > 0$ tal que $\left|\sum_{n=1}^m b_n\right| < M$ para todo $m \in \mathbb{N}$, entonces la serie $\sum_{n\geq 1} a_n b_n$ converge.

Observemos que si $b_n = (-1)^n$ esto es el *criterio de Leibniz* para series alternadas.

17. *La función ζ de Riemannn*. Muestre que la serie

$$\zeta(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s}$$

definida para $s \in (1,+\infty)$ converge puntualmente en $(1,+\infty)$ y uniformemente en $(1+\varepsilon,+\infty)$ cualquiera sea $\varepsilon > 0$. Más aún, la función suma es derivable en $(1,+\infty)$ y allí es posible derivarla término a término.

18. Si $(a_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión en $\mathbb{C}$ tal que la serie $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge absolutamente, entonces las series de funciones $\sum_{n\geq 1} a_n \cos nx$ y $\sum_{n\geq 1} a_n \sin(nx)$ convergen absoluta y uniformemente sobre $\mathbb{R}$.

19. Estudie la convergencia puntual, absoluta y uniforme de las series de funciones definidas sobre $\mathbb{R}$

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-x)^n}{n}, \qquad \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}, \qquad \sum_{n\geq 1} \frac{n!x^n}{n^n},$$

y de las series de funciones definidas sobre $\mathbb{C}$

$$\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n}, \qquad \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n z^{n(n+1)}}{n^2}.$$

20. (*a*) Para todo $x \in \mathbb{R}$ es

$$\sin x = \sum_{k\geq 0} \frac{(-k)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

y la serie converge absoluta y uniformemente en todo intervalo finito. ¿Qué sucede en $\mathbb{R}$?

(*b*) La serie

$$\sum_{n\geq 1} \left(\frac{x^n}{n!}\right)^2$$

converge puntualmente en $\mathbb{R}$ y su suma es una función continua.

21. Consideremos la serie de funciones

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{1+n^2x^2}$$

sobre $\mathbb{R}$.

(*a*) ¿En qué conjunto converge la serie?

(*b*) ¿Sobre qué intervalos es uniforme la convergencia?

(*c*) ¿Sobre qué intervalos *no* es uniforme la convergencia?

(*d*) ¿Es continua la función suma en su dominio? ¿Y acotada?