Cálculo Avanzado

Segundo Cuatrimestre — 2019

Práctica 8: Series de funciones y convergencia uniforme

Convergencia uniforme

1. Sean X un espacio métrico y A un conjunto, sea $(f_n)_{n\geq1}$ una sucesión de funciones $A \to X$ y sea $f : A \to X$ una función. La sucesión $(f_n)_{n\geq1}$ *no* converge uniformemente a f sobre A si y solamente si existen $\alpha > 0$, una sucesión estrictamente creciente $(n_k)_{k\geq1}$ de elementos de $\mathbb{N}$ y una sucesión $(a_k)_{k\geq1}$ en A tales que $d(f_{n_k}(a_k), f(a_k)) \geq \alpha$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Solución. Supongamos que la sucesión no converge uniformemente a f, de manera que existe $\alpha > 0$ tal que no es cierto que hay un entero $N \in \mathbb{N}$ con $d(f_n(x), f(x)) < \alpha$ para todo $x \in X$ y todo $n \geq N$: en otras palabras, para todo $N \in \mathbb{N}$ existen $\phi(N) \in \mathbb{N}$ y $\xi(N) \in X$ tales que $\phi(N) \geq N$ y $d(f_{\phi(N)}(\xi(N)), f(\xi(N))) \geq \alpha$. Podemos construir ahora una sucesión estrictamente creciente $(n_k)_{k\geq1}$ de elementos de $\mathbb{N}$ y una sucesión $(a_k)_{k\geq1}$ de elementos de X: ponemos $n_1 = \phi(1)$ y $a_1 = \xi(1)$, y para cada $k \in \mathbb{N}$ definimos inductivamente $n_{k+1} = \phi(n_k+1)$ y $a_{k+1} = \xi(n_k+1)$. Es claro que las sucesiones $(n_k)_{k\geq1}$ y $(a_k)_{k\geq1}$ satisfacen las condiciones del enunciado. □

2. Encuentre el límite puntual de las siguientes sucesiones de funciones:

(a) $(f_n)_{n\geq1}$ con $f_n : x \in (-1,1] \mapsto x^n \in \mathbb{R}$ para cada $n \in \mathbb{N}$;

(b) $(g_n)_{n\geq1}$ con $g_n : x \in (1,+\infty) \mapsto x^{-n}e^x \in \mathbb{R}$ para cada $n \in \mathbb{N}$;

(c) $(h_n)_{n\geq1}$ con $h_n : x \in [0,1] \mapsto n^2x(1-x^2)^n \in \mathbb{R}$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Muestre además que la primera converge uniformemente sobre $(0, \frac{1}{2})$ y que la segunda converge uniformemente sobre $[2,5]$. ¿Es uniforme la convergencia de la tercera sobre $[0,1]$?

Solución. (a) Si $x \in [0,1)$, para cada $n \in \mathbb{N}$ es $0 \leq x^{n+1} \leq x^n$, así que la sucesión $(x^n)_{n\geq1}$ está acotada inferiormente y decrece, y tiene, por lo tanto, límite: llamémoslo ξ. Observemos que

$$\xi = \lim_{n\to\infty} x^{n+1} = x \lim_{n\to\infty} x^n = x\xi,$$

así que $\xi(x-1) = 0$: como $x \neq 1$, esto implica que $\xi = 0$.

Sea ahora $x \in (-1,1)$. Como $|x| \in [0,1)$ y $|x^n| = |x|^n$, tenemos, por lo que ya hicimos, que $\lim_{n\to\infty}|x^n| = 0$: esto nos dice que $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$. Como es claro que, además, $\lim_{n\to\infty} 1^n = 1$, vemos que la sucesión $(f_n)_{n\geq1}$ converge puntualmente a la función

$f : (-1,1] \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in (-1,1); \\ 1 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

Ahora, si $x \in (0, \frac{1}{2})$, entonces $|f_n(x) - f(x)| = |x^n| \leq \frac{1}{2^n}$: como el último miembro de la desigualdad converge a 0 cuando n crece, es claro que la sucesión converge uniformemente a f en el intervalo $(0, \frac{1}{2})$.

(b) Si $x \in (1, +\infty)$, entonces la sucesión de números positivos $(x^{-n}e^x)_{n\geq 1}$ es estrictamente decreciente, así que tiene límite. Más aún, si a es ese límite, tenemos que

$$a = \lim_{n\to\infty} x^{-(n+1)}e^x = x^{-1} \lim_{n\to\infty} x^{-n}e^x = x^{-1}a,$$

así que $a(1 - x^{-1}) = 0$: como $x \neq 1$, vemos que $a = 0$. Podemos concluir con esto que la sucesión $(g_n)_{n\geq 1}$ converge puntualmente a la función nula en $(1, +\infty)$.

Si $x \in [2,5]$, entonces

$$|g_n(x)| = x^{-n}e^x \leq 2^{-n}e^5,$$

así que $\|g_n\|_{C[2,5]} \leq 2^{-n}e^5$: esto nos dice que la sucesión $(g_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente sobre el intervalo $[2,5]$ a la función nula, como queríamos. Observemos que ninguna de las funciones de la sucesión es acotada, así que la convergencia en $(1, +\infty)$ no es uniforme.

(c) Si $x \in \{0,1\}$, entonces es evidente que $(h_n(x))_{n\geq 1}$ converge a 0. Fijemos $x \in (0,1)$. La sucesión $(h_n(x))_{n\geq 1}$ tiene todos sus términos positivos y para cada $n \in \mathbb{N}$ es

$$\frac{h_{n+1}(x)}{h_n(x)} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 (1 - x^2).$$

Como $1 - x^2 \in (0,1)$ y $(1 + \frac{1}{n})^2 \downarrow 1$ si $n \to \infty$, es claro que existe $N \in \mathbb{N}$ y $\rho \in (0,1)$ tal que $h_{n+1}(x)/h_n(x) < \rho$ para todo $n \geq N$, es decir, tal que $h_{n+1}(x) < \rho h_n(x)$ si $n \geq N$. Tenemos entonces que $0 \leq h_n(x) \leq \rho^{n-N}h_N(x)$ si $n \geq N$ y, por lo tanto, que $\lim_{n\to\infty} h_n(x) = 0$. Vemos así que la sucesión de funciones $(h_n)_{n\geq 1}$ converge puntualmente a la función nula sobre el intervalo $[0,1]$.

Sea $n \in \mathbb{N}$. Es claro que la función h_n toma valores no negativos en $[0,1]$ y que se anula en los extremos de ese intervalo. Encontremos su máximo en $[0,1]$. Como h_n no es constante, ese máximo se tiene que alcanzar en un punto de $(0,1)$. Es

$$h_n'(x) = n^2(1 - x^2)^{n-1}(1 - (1 + 2n)x^2)$$

y el único punto de $(0,1)$ donde h_n' se anula es $(1 + 2n)^{-1/2}$. Esto implica que el máximo de h_n en el intervalo $[0,1]$ es

$$h_n((1 + 2n)^{-1/2}) = \frac{n^2}{\sqrt{1 + 2n}}\left(1 - \frac{1}{1 + 2n}\right)^n = \frac{1}{\left(\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n}\right)^{1/2}} \frac{n^2}{(1 + 2n)^{1/2}}.$$

Sabemos que cuando n crece $(1 + \frac{1}{2n})^{2n}$ converge a e, que es menos que 3 y, por otro lado, como $2n/(1 + 2n) \geq 1/2$ para todo $n \in \mathbb{N}$, que

$$\frac{n^2}{(1 + 2n)^{1/2}} = \frac{n^{3/2}}{2^{1/2}}\left(\frac{2n}{1 + 2n}\right)^{1/2} \geq \frac{n^{3/2}}{2}.$$

Juntando todo, vemos que

$$\|h_n\|_\infty = h_n((1+2n)^{-1/2}) \geq \frac{n^{3/2}}{3^{1/2}2}$$

siempre $n \gg 1$ y, por lo tanto, que la sucesión $(h_n)_{n\geq 1}$ no converge uniformemente. □

3. Analice la convergencia puntual y uniforme de las siguientes sucesiones de funciones:

(*a*) $f_n(x) = n^{-1}\sin nx$, en $\mathbb{R}$;

(*b*) $f_n(x) = \sin(x/n)$, en $\mathbb{R}$;

(*c*) $f_n(x,y) = \dfrac{n}{n+1}(x,y)$, en $\mathbb{R}^2$ y con valores en $\mathbb{R}^2$;

(*d*) $f_n(x) = (1+\frac{1}{n})x$, en $[0,1]$;

(*e*) $f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \text{ o } x = 0; \\ b + \frac{1}{n} & \text{si } x = \frac{a}{b} \text{ con } a,\, b \in \mathbb{Z},\, b \neq 0 \text{ y } (a,b) = 1; \end{cases}$ en $[0,1]$;

(*f*) $f_n(z) = z^n$, en $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

Solución. (*a*) Si $x \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$ es claro que $|f_n(x)| \leq 1/n$, así que la sucesión $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformenente a la función nula sobre todo $\mathbb{R}$.

(*b*) Sea $R > 0$ y sea $\varepsilon > 0$. Como la función $\sin$ es continua en 0 y ahí se anula, existe $\delta > 0$ tal que $|\sin y| < \varepsilon$ si $|y| < \delta$ y, por otro lado, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $R/n < \delta$ para todo $n \geq N$. Tenemos entonces que cuando $n \geq N$ es $|f_n(x)| = |\sin(x/n)| < \varepsilon$ para todo $x \in [-R,R]$: esto muestra que la sucesión $(f_n(x))_{n\geq 1}$ converge a 0 uniformemente sobre $[-R,R]$. En particular, vemos con esto que la sucesión converge puntualmente sobre todo $\mathbb{R}$. Por otro lado, la convergencia no es uniforme sobre $\mathbb{R}$. Si lo fuera, habría un entero $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$ y todo $x \in \mathbb{R}$ se tendría que $|f_n(x)| < \frac{1}{2}$: esto no es así, ya que $f_n(n\pi/2) = 1$ cualquiera sea $n \in \mathbb{N}$.

(*c*) Si $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, entonces tenemos que $\lim_{n\to\infty} f_n(x,y) = (x,y)$ simplemente porque $\lim_{n\to\infty} n/n+1 = 1$: esto nos dice que la sucesión $(f_n)_{n\geq 1}$ converge puntualmente a la función identidad $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Mostremos que esta convergencia no es uniforme: para ello es suficiente con probar que para todo $n \in \mathbb{N}$ la diferencia $f_n - f$ no converge uniformente a 0 en $\mathbb{R}^2$, y esto es fácil: para todo $n \in \mathbb{N}$ tenemos que

$$\|f_n(n+1,0) - f(n+1,0)\| = \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| \cdot \|(n+1,0)\| = \frac{1}{n+1}\|(n+1,0)\| = 1.$$

(*d*) La sucesión $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente a la función $f : x \in [0,1] \mapsto x \in \mathbb{R}$ en $[0,1]$: esto es consecuencia de que $\|f_n - f\|_\infty = \sup\{\frac{1}{n}|x| : x \in [0,1]\} = \frac{1}{n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$ y de que esta última expresión converge a 0 cuando n crece.

(*e*) Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ la función tal que

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \text{ o } x = 0; \\ b & \text{si } x = \frac{a}{b} \text{ con } a,\, b \in \mathbb{Z},\, b \neq 0 \text{ y } (a,b) = 1. \end{cases}$$

Claramente $f_n - f = \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, así que la sucesión $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente a f en $[0,1]$

(*f*) Si $z \in \mathbb{C}$ es tal que $|z| < 1$, entonces para todo $n \in \mathbb{N}$ tenemos que $|f_n(z)| = |z|^n$ y, por lo tanto, que $\lim_{n\to\infty} f_n(z) = 0$. Vemos así que la sucesión $(f_n)_{n\geq 1}$ converge a la función nula sobre el disco $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. La convergencia no es uniforme: para verlo es suficiente con mostrar que para todo $n \in \mathbb{N}$ existe un punto z en ese disco tal que $|f_n(z)| \geq \frac{1}{2}$, y esto es fácil: basta elegir $z = 2^{-1/n} \in (0,1)$. □

4. Sea X un conjunto, sea $B(X)$ el conjunto de todas las funciones $X \to \mathbb{C}$ que son acotadas y sea $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en $B(X)$.

(a) Si $(f_n)_{n\geq 1}$ converge puntualmente a una función $f : X \to \mathbb{C}$, ¿es cierto que $f \in B(X)$?

(b) Si $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente a una función $f : X \to \mathbb{C}$, entonces f es un elemento de $B(X)$.

(c) La sucesión $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente a una función acotada $f : X \to \mathbb{C}$ si y solamente si $(f_n)_{n\geq 1}$ converge a f en el espacio métrico $(B(X), d_\infty)$.

(d) Si $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente en X, entonces $(f_n)_{n\geq 1}$ es uniformemente acotada.

Solución. (a) Mostremos que la respuesta es negativa dando un ejemplo. Sea $X = \mathbb{R}$ y para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función tal que $f_n(x) = \min\{|x|, n\}$. Es claro que la sucesión $(f_n)_{n\geq 1}$ está en $B(\mathbb{R})$, que converge puntualmente a la función $|-| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, y que esta última no es acotada.

(b) Supongamos que $(f_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión en $B(X)$ que converge uniformemente a una función $f : X \to \mathbb{C}$. Como la convergencia es uniforme, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $|f_n(x) - f(x)| \leq 1$ siempre que $x \in X$; por otro lado, como $f_n \in B(X)$, existe $M > 0$ tal que $|f_n(x)| \leq M$ para todo $x \in X$. Se sigue de todo esto que si $x \in X$ es $|f(x)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x)| \leq 1 + M$: esto muestra que la función f es acotada en X, esto es, que $f \in B(X)$.

(c) Que la sucesión $(f_n)_{n\geq 1}$ en $B(X)$ converja a uniformente a una funcion acotada $f : X \to \mathbb{C}$ significa exactamente lo mismo que que converja en el espacio métrico $(B(X), d_\infty)$ a f, así que el enunciado es tautológico.

(d) Si la sucesión $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformente en X, entonces el límite puntual de la sucesión, digamos $f : X \to \mathbb{C}$, es una función acotada, como vimos en la parte (b) de este ejercicio. En ese caso, la sucesión es una sucesión convergente en $B(X)$ y, por lo tanto, es acotada: si $R > 0$ es tal que $f_n \in B_R(0)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces claramente R es una cota uniforme para la sucesión. □

5. Si cada $n \in \mathbb{N}$ sea $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$f_n(x) = \frac{x}{1+x^2} - \frac{x(x^2+1)}{1+(n+1)^2x^2}$$

para cada $x \in \mathbb{R}$, entonces $(f_n)_{n\geq 1}$ converge puntualmente pero no uniformemente a una función continua.

Solución. Si $x \in \mathbb{R}$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{x}{1+x^2} - \frac{x(x^2+1)}{1+(n+1)^2x^2}\right) = \frac{x}{1+x^2} - \lim_{n\to\infty}\frac{x(x^2+1)}{1+(n+1)^2x^2}$$
$$= \frac{x}{1+x^2}$$

y esto nos dice que la sucesión converge puntualmente a $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x/(1+x^2) \in \mathbb{R}$. Por otro lado, para cada $n \in \mathbb{N}$ sabemos que

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x(x^2+1)}{1+(n+1)^2x^2} = +\infty,$$

ya que tanto el numerador como el denominador del cociente son polinomios en x y el primero tiene grado estrictamente mayor que el segundo: esto implica que existe $\xi_n \in \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{\xi_n(\xi_n^2+1)}{1+(n+1)^2\xi_n^2} > 1.$$

Tenemos entonces que $\sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in \mathbb{R}\} \geq |f_n(\xi_n) - f(\xi_n)| > 1$ cualquiera sea $n \in \mathbb{N}$ y esto deja en claro que la sucesión no converge uniformemente a f. □

6. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $f_n : x \in [0,1] \mapsto \frac{nx^2}{1+nx^2} \in \mathbb{R}$. Estudie la convergencia puntual y uniforme de las sucesiones $(f_n)_{n\geq 1}$ y $(f_n')_{n\geq 1}$.

Solución. Observemos que para cada $n \in \mathbb{N}$ y todo $x \in [0,1]$ es

$$f_n(x) = \frac{nx^2}{1+xn^2} = 1 - \frac{1}{1+nx^2},$$

así que es claro que la sucesión converge puntualmente a la función $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ tal que para cada $x \in [0,1]$ tiene

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0; \\ 1 & \text{si } x \in (0,1]. \end{cases}$$

Como las funciones de la sucesión son continuas y el límite puntual no lo es, la convergencia no es uniforme. Por otro lado, para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $x \in (0,1]$ tenemos que

$$f_n'(x) = \frac{2nx}{(1+nx^2)^2}.$$

Si $x \in (0,1]$, es

$$0 \leq f_n'(x) \leq \frac{2nx}{n^2x^4} = \frac{1}{n}\cdot\frac{2}{x^3}$$

porque $(1+nx^2)^2 \geq n^2x^4$, así que la sucesión $(f_n'(x))_{n\geq 1}$ converge a 0. Por otro lado, es claro que $(f_n'(0))_{n\geq 1}$ converge a 0, así que la sucesión de las derivadas converge puntualmente a la función nula. La convergencia de $(f_n')_{n\geq 1}$ a 0 no es uniforme: por ejemplo, tenemos que

$$f_n'(n^{-1/2}) = \frac{n^{1/2}}{2},$$

que diverge a $+\infty$ cuando n crece. □

7. Sea X un espacio métrico y sea $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de funciones $X \to \mathbb{R}$ uniformemente continuas que converge uniformemente a una función $f : X \to \mathbb{R}$. ¿Es uniformemente continua la función f?

Solución. Sea $\varepsilon > 0$. Como la sucesión converge uniformemente a f, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon/6$ para todo $x \in X$. Por otro lado, como la función f_n es uniformemente continua, existe $\delta > 0$ tal que si x e y son puntos de X tales que $d(x,y) < \delta$ se tiene que $|f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon/6$. Si ahora x e y son dos puntos tales que $d(x,y) < \delta$, entonces

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{6} < \varepsilon.$$

Esto muestra que la función f es uniformemente continua. □

8. Sea X un espacio métrico y sean $(f_n)_{n\geq 1}$ y $(g_n)_{n\geq 1}$ dos sucesiones de funciones $X \to \mathbb{R}$ que convergen uniformemente sobre X a funciones f y g, respectivamente.

(a) La sucesión $(f_n + g_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente a $f + g$ sobre X.

(b) Si las dos sucesiones están uniformemente acotadas, entonces la sucesión $(f_n g_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente a $f g$ sobre X.

Solución. (a) Sea $\varepsilon > 0$. Como las sucesiones $(f_n)_{n\geq 1}$ y $(g_n)_{n\geq 1}$ convergen uniformemente a f y a g, respectivamente, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ es $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/4$ y $|g_n(x) - g(x)| < \varepsilon/4$ cualquiera sea $x \in X$. Esto implica que para todo $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N$ y todo $x \in X$ es

$$\big|(f_n(x) + g_n(x)) - (f(x) + g(x))\big| \leq |f_n(x) - f(x)| + |g_n(x) - g(x)| \leq \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} < \varepsilon.$$

Vemos así que la sucesión $(f_n + g_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente a $f + g$.

(b) Supongamos ahora que las sucesiones $(f_n)_{n\geq 1}$ y $(g_n)_{n\geq 1}$ están uniformemente acotadas, de manera que existe un número $M > 0$ tal que $|f_n(x)| \leq M$ y $|g_n(x)| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo $x \in \mathbb{R}$. Observemos que si $x \in X$, entonces tenemos que $|g(x)| = \lim_{n\to\infty} |g_n(x)| \leq M$, ya que la sucesión $(g_n)_{n\geq 1}$ converge puntualmente a g.

Sea $\varepsilon > 0$. Como las sucesiones $(f_n)_{n\geq 1}$ y $(g_n)_{n\geq 1}$ convergen uniformemente a f y a g, respectivamente, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ es $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/4M$ y $|g_n(x) - g(x)| < \varepsilon/4M$ cualquiera sea $x \in X$. Tenemos entonces que si $n \geq N$ y $x \in X$ es

$$\begin{aligned} |f_n(x)g_n(x) - f(x)g(x)| &\leq |f_n(x)||g_n(x) - g(x)| + |g(x)||f_n(x) - f(x)| \\ &\leq M\frac{\varepsilon}{4M} + M\frac{\varepsilon}{4M} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Vemos así que la sucesión $(f_n g_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente en X. □

9. Sea X un espacio métrico compacto y sea A un conjunto. Si $(f_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión de funciones continuas $X \to \mathbb{R}$ que converge uniformemente a $f : X \to \mathbb{R}$ y $(g_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión de funciones que converge uniformemente a una función $g : A \to X$, entonces la sucesión $(f_n \circ g_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente sobre A a la composición $f \circ g$.

Solución. Sea $\varepsilon > 0$. Como la sucesión $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente a la función f, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/4$ siempre que $x \in X$ y $n \geq N$. Por otro lado, como esa sucesión es de funciones continuas y converge uniformemente a f y el espacio X es compacto, la función f es uniformemente continua: existe entonces $\delta > 0$ tal que si x e y son elementos de X tales que $d(x, y) < \delta$ se tiene que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/4$. Finalmente, como la sucesión $(g_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente a la función g, existe $M \geq N$ tal que si $n \geq M$ se tiene que $d(g_n(a), g(a)) < \delta$ siempre que $a \in A$.

Si ahora $n \geq M$ y $a \in A$ entonces

$$\begin{aligned} |f_n(g_n(a)) - f(g(a))| &\leq |f_n(g_n(a)) - f(g_n(a))| + |f(g_n(a)) - f(g(a))| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Esto muestra que la sucesión $(f_n \circ g_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente a la composición $f \circ g$, como queremos. □

10. *Teorema de Dini.* Sea X un espacio métrico compacto. Si $(f_n)_{n\geq 1}$ en una sucesión de funciones continuas $X \to \mathbb{R}$ tal que

- $f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$ para todo $x \in X$ y todo $n \in \mathbb{N}$, y
- $(f_n)_{n\geq 1}$ converge puntualmente a una función $f : X \to \mathbb{R}$ que es continua,

entonces la sucesión $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente a f en X.

Solución. Sea $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de funciones $X \to \mathbb{R}$ y sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función como en el enunciado. Sea $\varepsilon > 0$ y para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $U_n = \{x \in X : f_n(x) - f(x) < \varepsilon\}$, que es un abierto de X porque la función $f_n - f$ es continua. Si $y \in X$, entonces la sucesión $(f_n(y))_{n\geq 1}$ decrece a $f(y)$, así que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $y \in U_n$: vemos así que $X = \bigcup_{n\geq 1} U_n$. Como el espacio X es compacto, existe un conjunto finito $F \subseteq \mathbb{N}$ tal que $X = \bigcup_{n\in F} U_n$. Más aún, como la sucesión $(f_n)_{n\geq 1}$ es decreciente, tenemos que $U_n \subseteq U_{n+1}$, así que si m es el mayor elemento del conjunto F, es $X = U_m$. Ahora bien, si $x \in X$ y $n \geq m$, entonces tenemos que $0 \leq f_n(x) - f(x) \leq f_m(x) - f(x) < \varepsilon$ porque $x \in U_m$: esto nos dice que la sucesión $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente a f. □

11. Sea X un espacio métrico compacto, sea $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de funciones continuas $X \to \mathbb{R}$ y sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función continua. La sucesión $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente a f si y solamente si para todo sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ en X que converge a un punto x la sucesión $(f_n(x_n))_{n\geq 1}$ converge a $f(x)$.

Solución. Supongamos primero que la sucesión $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformente a f y sea $(x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en X que converge a un punto x. Sea $\varepsilon > 0$. Como f es continua en x, existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/2$ siempre que $d(x, y) < \delta$. Como $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformente a f y $(x_n)_{n\geq 1}$ converge a x, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq N$ es $|f_n(y) - f(y)| < \varepsilon/2$ para todo $y \in X$ y $d(x_n, x) < \delta$. Si ahora $n \geq N$ tenemos que

$$|f_n(x_n) - f(x)| \leq |f_n(x_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Vemos así que $(f_n(x_n))_{n\geq 1}$ converge a $f(x)$.

Supongamos ahora, para probar la recíproca, que la sucesión $(f_n)_{n\geq 1}$ no converge uniformemente a f, de manera que existe $\eta > 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in X$ tal que $|f_n(x_n) - f(x_n)| \geq \eta$. Como el espacio X es compacto, hay una subsucesión $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ de $(x_n)_{n\geq 1}$ que converge a un punto $x \in X$. Como f es continua, existe $K \in \mathbb{N}$ tal que $|f(x) - f(x_{n_k})| < \eta/2$ siempre que $k \geq K$ y entonces para todo $k \geq K$ tenemos que

$$\eta \leq |f_{n_k}(x_{n_k}) - f(x_{n_k})| \leq |f_{n_k}(x_{n_k}) - f(x)| + |f(x) - f(x_{n_k})| < |f_{n_k}(x_{n_k}) - f(x)| + \frac{\eta}{2},$$

así que

$$\frac{\eta}{2} < |f_{n_k}(x_{n_k}) - f(x)|.$$

Esto implica, en particular, que la sucesión $(f_{n_k}(x_{n_k}))_{k\geq 1}$ no converge a $f(x)$. Sea ahora $(y_n)_{n\geq 1}$ la sucesión en X tal que $y_n = x_{n_k}$ siempre que $n_k \leq n < n_{k+1}$: es claro que la sucesión $(y_n)_{n\geq 1}$ converge a x y que la sucesión $(f_n(y_n))_{n\geq 1}$ no converge a $f(x)$. □

Equicontinuidad

12. Sean X e Y dos espacios métricos.

(a) Una familia finita de funciones $X \to Y$ continuas en un punto x de X es equicontinua en x.

(b) Sea $B(X,Y)$ el espacio métrico de las funciones acotadas $X \to Y$. La clausura de un subconjunto equicontinuo de $B(X,Y)$ es equicontinua.

(c) Si X es compacto, entonces toda famila equicontinua de funciones $X \to Y$ es uniformemente equicontinua.

(d) Una sucesión de funciones continuas $X \to Y$ que converge uniformemente es equicontinua.

(e) Si X es compacto, entonces una sucesión de funciones $X \to Y$ que es uniformemente equicontinua y converge puntualmente converge uniformemente.

Solución. (a) Sea $x \in X$, sea $n \in \mathbb{N}$ y sean $f_1, \ldots, f_n : X \to Y$ funciones continuas en x. Sea $\varepsilon > 0$. Si $i \in [\![n]\!]$, entonces f_i es continua en x, así que existe $\delta_i > 0$ tal que $d(f_i(y), f_i(x)) < \varepsilon$ siempre que $d(y,x) < \delta_i$. Sea $\delta = \min\{\delta_i : i \in [\![n]\!]\}$. Si ahora $y \in X$ es tal que $d(y,x) < \delta$ e $i \in [\![n]\!]$, entonces $d(y,x) < \delta_i$ y, por lo tanto, $d(f_i(y), f_i(x)) < \varepsilon$. Vemos así que la familia $\{f_1, \ldots, f_n\}$ es equicontinua en x.

(b) Sea A un subconjunto equicontinuo de $B(X,Y)$, sea $x \in X$ y sea $\varepsilon > 0$. Como A es equicontinuo, existe $\delta > 0$ tal que $d(f(y), f(x)) < \varepsilon/3$ siempre que $f \in A$ y $d(y,x) < \delta$. Sea ahora $f \in \overline{A}$ y sea $y \in X$ tal que $d(y,x) < \delta$. Hay una función $g \in A$ tal que $d(f,g) < \varepsilon/3$ y entonces

$$d(f(y), f(x)) \leq d(f(y), g(y)) + d(g(y), g(x)) + d(g(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Vemos así que la familia $\overline{A}$ es equicontinua, como queremos.

(c) Supongamos que X es compacto, sea A una familia equicontinua de funciones

$X \to Y$ y sea $\varepsilon > 0$. Para cada $x \in X$ existe $\delta_x > 0$ tal que para toda $f \in A$ es $f(B_{\delta_x}(x)) \subseteq B_{\varepsilon/2}(f(x))$. El conjunto $\{B_{\delta_x}(x) : x \in X\}$ es un cubrimiento abierto del compacto X, así que existe $\delta > 0$ tal que para todo $y \in X$ existe $x \in X$ tal que $B_\delta(y) \subseteq B_{\delta_x}(x)$.

Sean ahora y y z dos puntos de X tales que $d(y,z) < \delta$ y sea $f \in A$. Por la forma en que elegimos δ, existe $x \in X$ tal que $B_\delta(y) \subseteq B_{\delta_x}(x)$ y entonces tanto $d(x,y)$ como $d(x,z)$ son menores que δ_x y, de acuerdo a la elección de δ_x, es

$$d(f(y),f(z)) \leq d(f(y),f(x)) + d(f(x),f(z)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Esto muestra que la famila A es uniformemente equicontinua.

(d) Sea $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de funciones continuas $X \to Y$ que converge uniformemente a una función $f : X \to Y$, que es, por lo tanto, continua: tenemos que mostrar que la familia $\{f_n : n \geq 1\}$ es equicontinua. Sea $x \in X$ y sea $\varepsilon > 0$. Como f es continua en x, existe $\delta > 0$ tal que $d(f(x),f(y)) < \varepsilon/3$ si $d(x,y) < \delta$. Por otro lado, como $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente a f, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(f_n(z),f(z)) < \varepsilon/3$ siempre que $n \geq N$ y $z \in X$. Si ahora $n \geq N$ y $y \in B_\delta(x)$, entonces

$$\begin{aligned} d(f_n(y),f_n(y)) &\leq d(f_n(y),f(y)) + d(f(y),f(x)) + d(f(x),f_n(x)) \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Esto nos dice que la famila $\{f_n : n \geq N\}$ es equicontinua. Como $\{f_n : n \geq 1\}$ es la unión de esa famila y la familia finita $\{f_1,\dots,f_{N-1}\}$ de funciones continuas, vemos que es equicontinua.

(e) Supongamos que X es compacto y sea $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de funciones $X \to Y$ que es uniformemente equicontinua y que converge puntualmente a una función $f : X \to Y$. Queremos mostrar que la convergencia es uniforme. Sea $\varepsilon > 0$. Como la sucesión es uniformemente equicontinua, existe $\delta > 0$ tal que $d(f_n(x),f_n(y)) < \varepsilon/5$ siempre que x e y son elementos de X tales que $d(x,y) < \delta$. Por otro lado, como X es compacto, existe un conjunto finito $F \subseteq X$ tal que $X = \bigcup_{x\in F} B_\delta(x)$. Finalmente, como la sucesión converge puntualmente sobre X y el conjunto F es finito, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que siempre que $n \geq N$ y $x \in F$ se tiene que $d(f_n(x),f(x)) < \varepsilon/5$.

Sea ahora $y \in X$ y n, $m \geq N$. La elección de F implica que existe $x \in F$ tal que $d(x,y) < \delta$, y entonces

$$\begin{aligned} &d(f_n(y),f_m(y)) \\ &\quad \leq d(f_n(y),f_n(x)) + d(f_n(x),f(x)) + d(f(x),f_m(x) + d(f_m(x),f_m(y)) \\ &\quad \leq \frac{4\varepsilon}{5} \end{aligned}$$

Como $(f_m(y))_{m\geq 1}$ converge a $f(y)$ y la función distancia d es continua, esto implica que

$$d(f_n(y),f(y)) = \lim_{m\to\infty} d(f_n(y),f_m(y)) \leq \frac{4\varepsilon}{5} < \varepsilon.$$

Vemos así que la sucesión $(f_n)_{n\geq 1}$ converge a f uniformemente. □

13. Sea $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de funciones $[a,b] \to \mathbb{R}$ integrables y uniformemente acotadas. Si para cada $n \in \mathbb{N}$ la función $F_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ es tal que

$$F_n(x) = \int_a^x f_n(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

para cada $x \in [a,b]$, entonces la sucesión $(F_n)_{n\geq 1}$ posee una subsucesión que converge uniformemente en $[a,b]$.

Solución. Bastará, gracias al teorema de Arzelà–Ascoli, que mostremos que la sucesión $(F_n)_{n\geq 1}$ está uniformemente acotada y es equicontinua. Sea K una cota uniforme para la sucesión $(f_n)_{n\geq 1}$, de manera que $-K \leq f_n(x) \leq K$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo $x \in [a,b]$. Esto implica en primer lugar que si $n \in \mathbb{N}$ y $x \in [a,b]$ es

$$-(b-a)K \leq -(x-a)K = \int_a^x (-K)\,\mathrm{d}\xi \leq \int_a^x f_n(\xi)\,\mathrm{d}\xi \leq \int_a^x K\,\mathrm{d}\xi = (x-a)K \leq (b-a)K,$$

así que $|F_n(x)| \leq (b-a)K$: vemos así que la sucesión $(F_n)_{n\geq 1}$ está uniformemente acotada.

Por otro lado, sabemos que para todo $n \in \mathbb{N}$ la función F_n es derivable y su derivada es $F_n' = f_n$: esto implica que las derivadas de las funciones de la sucesión $(F_n)_{n\geq 1}$ están uniformemente acotadas por K y de esto se sigue inmediatamente que esa sucesión es equicontinua. □

Series de funciones

14. Sea X un espacio métrico y sea $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de funciones continuas $X \to \mathbb{R}$ tal que la serie $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge uniformemente en X.

(a) La función suma $f = \sum_{n\geq 1} f_n$ es continua en X.

(b) Si $X = [a,b]$, entonces $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n\geq 1} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

Solución. (a) Que la serie $\sum_{n\geq 1} f_n$ converja uniformemente significa que la sucesión de funciones $(\sum_{n=1}^N f_n)_{N\geq 1}$ converge uniformemente a la función suma $\sum_{n\geq 1} f_n$. Como las componentes de esta sucesión son continuas, es claro que la función suma es continua.

(b) Supongamos que $X = [a,b]$ y sea $\varepsilon > 0$. Como la serie converge uniformemente a la función f, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m \geq M$ y todo $x \in [a,b]$ se tiene que $|f(x) - \sum_{n=1}^m f_n(x)| < \varepsilon$, de manera que si $m \geq M$ es

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{n=1}^m \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x\right| &= \left|\int_a^b \left(f(x) - \sum_{n=1}^m f_n(x)\right)\mathrm{d}x\right| \\ &\leq \int_a^b \left|f(x) - \sum_{n=1}^m f_n(x)\right| \mathrm{d}x \leq (b-a)\varepsilon.\end{aligned}$$

Esto nos dice que

$$\sum_{n\geq 1} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^m \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

como afirma el enunciado. □

15. *Criterio de Weierstrass*. Sea X un espacio métrico, sea $(M_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de números reales y sea $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de funciones $X \to \mathbb{R}$ tal que $|f_n(x)| \leq M_n$ para cada $x \in X$ y cada $n \in \mathbb{N}$. Si la serie de números $\sum_{n\geq 1} M_n$ converge, entonces la serie de funciones $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge absoluta y uniformemente sobre X.

Solución. Supongamos que la serie $\sum_{n\geq 1} M_n$ converge. Si $x \in X$, entonces la serie $\sum_{n\geq 1} |f_n(x)|$ está acotada término a término por la serie $\sum_{n\geq 1} M_n$: vemos así que la serie de funciones $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge puntualmente sobre X de manera absoluta. Escribamos f a su suma. Sea ahora $\varepsilon > 0$. Como la serie de términos no negativos $\sum_{n\geq 1} M_n$ converge, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n\geq N} M_n < \varepsilon$. Si ahora $m \geq N$ y $x \in X$, entonces

$$\left| f(x) - \sum_{n=1}^{m} f_n(x) \right| = \left| \sum_{n>m} f_n(x) \right| \leq \sum_{n>m} |f_n(x)| \leq \sum_{N} |M_n| < \varepsilon.$$

Esto nos dice que la serie $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge uniformemente. □

16. *Criterio de Dirichlet* Sean $(a_n)_{n\geq 1}$ una sucesión decreciente de números reales que converge a 0 y $(b_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de números complejos. Si existe $M > 0$ tal que $\left|\sum_{n=1}^{m} b_n\right| < M$ para todo $m \in \mathbb{N}$, entonces la serie $\sum_{n\geq 1} a_n b_n$ converge.

Observemos que si $b_n = (-1)^n$ esto es el *criterio de Leibniz* para series alternadas.

Solución. Sea M un número positivo tal que $|\sum_{n=1}^{m} b_n| < M$ para todo $m \in \mathbb{N}$ y escribamos $B_n = \sum_{k=1}^{n} b_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, de manera que $|B_n| < M$. Una inducción evidente muestra que para todo $n \in \mathbb{N}$ es

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = a_n B_n + \sum_{k=1}^{n-1} B_k (a_k - a_{k+1}).$$

Sea $\varepsilon > 0$. Como la sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$ de números no negativos decrece a 0, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $a_n < \varepsilon/2M$ siempre que $n \geq N$. Si $N \leq \alpha \leq \beta$, entonces

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{k=1}^{\beta} a_k b_k - \sum_{k=1}^{\alpha} a_k b_k \right| &= \left| a_\beta B_\beta - a_\alpha B_\alpha + \sum_{k=\alpha}^{\beta-1} B_k (a_k - a_{k+1}) \right| \\
&\leq a_\beta |B_\beta| + a_\alpha |B_\beta| + \sum_{k=\alpha}^{\beta-1} |B_k| (a_k - a_{k+1}) \\
&\leq M \left(a_\beta + a_\alpha + \sum_{k=\alpha}^{\beta-1} (a_k - a_{k+1}) \right) = 2M a_\beta < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Esto muestra que la sucesión de sumas parciales de la serie $\sum_{k\geq 1} a_k b_k$ es de Cauchy, así que la serie converge. □

17. *La función ζ de Riemannn*. Muestre que la serie

$$\zeta(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s}$$

definida para $s \in (1, +\infty)$ converge puntualmente en $(1, +\infty)$ y uniformemente en $(1+\varepsilon, +\infty)$ cualquiera sea $\varepsilon > 0$. Más aún, la función suma es derivable en $(1,+\infty)$ y allí es posible derivarla término a término.

Solución. Sea $t > 1$. Com la función $t > 0 \mapsto 1/n^t$ es decreciente, para todo $s \geq t$ la serie de términos positivos $\sum_{n\geq1} 1/n^s$ está acotada término a término por la serie $\sum_{n\geq1} 1/n^t$: está última converge, así que el criterio de Weierstrass nos dice que la serie $\sum_{n\geq1} 1/n^s$ converge uniformemente en $(t,+\infty)$. Como esto es así cualquiera sea $t > 1$, es claro que la serie converge puntualmente en el intervalo $(1,+\infty)$.

Si derivamos término a término la serie de funciones $\sum_{n\geq1} 1/n^s$ obtenemos la serie $-\sum_{n\geq1} \log(n)/n^s$. Si $t > 1$ y $s \in (t,+\infty)$, entonces la serie de términos positivos $\sum_{n\geq1} \log(n)/n^s$ está acotada término a término por la serie $\sum_{n\geq1} \log(n)/n^t$: para ver que la primera converge uniformemente en $(t,+\infty)$ es suficiente entonces que mostremos que la segunda converge. Existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\log(n) \leq n^{(t-1)/2}$ para todo $n \geq N$, porque $t > 1$, así que la serie $\sum_{n\geq1} \log(n)/n^t$ está acotada término a término a partir del N-ésimo por la serie $\sum_{n\geq1} 1/n^{t-(t-1)/2}$, y ésta converge ya que $t-(t-1)/2 = (t+1)/2 > 1$.

Sea $t > 1$. Tenemos que la serie $\sum_{n\geq1} 1/n^s$ converge uniformemente en $(t,+\infty)$ y que la serie que se obtiene derivando término a término converge uniformemente en el mismo intervalo. El siguiente resultado nos dice que la suma de la primera es entonces derivable y que su derivada el la suma de la segunda serie.

> *si $(f_n)_{n\geq1}$ es una sucesión de funciones derivables con continuidad en (a,b) que converge uniformemente a f y tal que $(f_n')_{n\geq1}$ converge uniformemente a g, entonces f es derivable y $f' = g$.*

Observemos que g es continua en (a,b) porque es límite uniforme de funciones continuas. Sea $c \in (a,b)$ y sea $x \in (a,b)$. Es

$$\lim_{n\to\infty} \int_c^x f_n' = \int_c^x g,$$

porque la sucesión $(f_n')_{n\geq1}$ converge uniformemente a g. Por otro lado, para todo $n \in \mathbb{N}$ es $\int_c^x f_n' = f_n(x) - f_n(c)$, así que

$$\lim_{n\to\infty} \int_c^x f_n' = \lim_{n\to\infty} (f_n(x) - f_n(c)) = f(x) - f(c)$$

porque la sucesión (f_n) converge puntualmente a f. Vemos de esta forma que para todo $x \in (a,b)$ se tiene que

$$\int_c^x g = f(x) - f(c).$$

Del teorema fundamental se sigue entonces que f es derivable y que su derivada en g. □

18. Si $(a_n)_{n\geq1}$ es una sucesión en $\mathbb{C}$ tal que la serie $\sum_{n\geq1} a_n$ converge absolutamente, entonces las series de funciones $\sum_{n\geq1} a_n \cos nx$ y $\sum_{n\geq1} a_n \sin(nx)$ convergen absoluta y uniformemente sobre $\mathbb{R}$.

Solución. Las series de funciones $\sum_{n\geq1} |a_n \cos nx|$ y $\sum_{n\geq1} |a_n \sin nx|$ está acotadas término a término por la serie de números $\sum_{n\geq1} |a_n|$, que converge. El criterio de Weierstrass nos dice que las series $\sum_{n\geq 1} a_n \cos nx$ y $\sum_{n\geq 1} a_n \sin nx$ convergen absoluta y uniformemente. □

19. Estudie la convergencia puntual, absoluta y uniforme de las series de funciones definidas sobre $\mathbb{R}$

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-x)^n}{n}, \qquad \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}, \qquad \sum_{n\geq 1} \frac{n!x^n}{n^n},$$

y de las series de funciones definidas sobre $\mathbb{C}$

$$\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n}, \qquad \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n z^{n(n+1)}}{n^2}.$$

Solución. (a) Sea $x \in \mathbb{R}$ tal que $|x| > 1$, de manera que $\log|x| > 0$. Usando el criterio de L'Hôpital es inmediato ver que $\lim_{t\to\infty} \log(t)/t = 0$, así que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\log(n)/n < \log|x|$ para todo $n \geq N$ y, por lo tanto, $|-x^n|/n > 1$. Vemos así que la serie $\sum_{n\geq 1}(-x)^n/n$ no converge.

Si $x = -1$, entonces la serie $\sum_{n\geq 1}(-x)^n/n$ diverge, porque se trata de la serie armónica, y si $x = -1$ entonces la serie converge por el criterio de Leibniz. Finalmente, sea $r \in (0,1)$ y sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $1/N < r$. La serie $\sum_{n\geq 1}(-x)^n/n$ está acotada en módulo término a término a partir del N-ésimo por la serie $\sum_{n\geq 1} r^{n+1}$, que converge: el criterio de Weierstrass nos dice entonces que la serie $\sum_{n\geq 1}(-x)^n/n$ converge uniformemente en $(-r,r)$. Como esto es así cualquiera sea $r \in (0,1)$, vemos que, de hecho, la serie converge puntualmente en $(-1,1)$.

Con esto concluimos que el dominio de convergencia de la serie es exactamente el intervalo $(-1,1]$, que la convergencia es absoluta en $(-1,1)$ y condicional en 1, y que la convergencia es uniforme en todo intervalo de la forma $(-r,r)$ con $r \in (0,1)$.

(b) Mostremos que la serie converge puntualmente de manera absoluta en todo $\mathbb{R}$, que converge uniformemente en todo conjunto acotado, y que no converge uniformemente en ningún conjunto no acotado.

Si $R > 0$ y $x \in [-R,R]$, la serie $\sum_{n\geq 0} x^n/n!$ está acotada en módulo término a término por la serie $\sum_{n\geq 0} R^n/n!$, y esta converge: en efecto, el cociente entre dos términos sucesivos es $(R^{n+1}/(n+1)!)/(R^n/n!) = R/(n+1)$, que converge a 0 si n crece. Esto nos dice que la serie $\sum_{n\geq 0} x^n/n!$ converge absoluta y uniformemente en todo intervalo de la forma $[-R,R]$ con $R > 0$. En particular, la serie converge absolutamente puntualmente en todo $\mathbb{R}$ y uniformemente en todo subconjunto acotado de $\mathbb{R}$.

Sea ahora I un subconjunto no acotado de $\mathbb{R}$ y supongamos que la serie converge uniformemente sobre I. Existe entonces $N \in \mathbb{N}$ tal que cada vez que n, $m \geq N$ se tiene que $|\sum_{k=1}^n x^k/k! - \sum_{k=1}^m x^k/k!| < 1$ para todo $x \in I$. En particular, si tomamos $n = N+1$ y $m = N$, vemos que $|x^N/N!| < 1$ para todo $x \in I$: es inmediato ver que esto es absurdo, ya que I no es acotado.

(c) Si $x \neq 0$, el cociente entre los valores absolutos de términos sucesivos de la serie es

$$\frac{(n+1)!|x|^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \Bigg/ \frac{n!|x|^n}{n^n} = |x|\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\left(\frac{n+1}{n}\right) \to e^{-1}|x|$$

porque $\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{n}{n+1} \to e^{-1} \to 1$ cuando $n \to \infty$. Esto nos dice que la serie del enunciado converge absolutamente cuando $0 < |x| < e$. Por supuesto, también converge absolutamente cuando $x = 0$.

Sea ahora $x \in \mathbb{R}$ tal que $|x| \geq e$. Si $n \in \mathbb{N}_0$ es

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \Big/ \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = \frac{(n+2)^{n+1}n^n}{(n+1)^{n+1}(n+1)^n} = \left(\frac{(n+2)n}{(n+1)^2}\right)^{n+1}\frac{n+1}{n}$$
$$= \left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}\frac{n+1}{n}.$$

Ahora bien, una inducción inmediata muestra que $(1-\xi)^{n+1} \geq 1-(n+1)\xi$ siempre que $\xi \in (0,1)$ y, en particular, que

$$\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \geq 1-(n+1)\frac{1}{(n+1)^2} = 1-\frac{1}{n+1}.$$

Usando esto, vemos que

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \Big/ \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \geq \left(1-\frac{1}{n+1}\right)\frac{n+1}{n} = 1.$$

Esto nos dice que la sucesión $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ crece a su límite, que es e y, por lo tanto, que para todo $n \in \mathbb{N}$ es

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq e \leq |x|,$$

de manera que

$$\frac{1}{n^n} \leq \frac{|x|}{(n+1)^n}$$

y, por lo tanto,

$$\frac{n!|x|^n}{n^n} \leq \frac{(n+1)!|x|^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}.$$

Esto nos dice que cuando $|x| \geq e$ el valor absoluto del término general de nuestra serie no decrece y, en consecuencia, que esta no converge. La conclusión de todo esto es que el dominio de convergencia puntual es exactamente el intervalo $(-e,e)$ y que allí la convergencia es absoluta.

Si $0 < R < e$, entonces para todo $x \in [-R,R]$ la serie está acotada término a término en valor absoluto por la serie $\sum_{n\geq 1} n!R^n/n^n$, que converge: el criterio de Weierstrass nos dice entonces que la serie del enunciado converge uniformemente en el intervalo $[-R,R]$.

Veamos que la convergencia no es uniforme en $(-e,e)$. Si la convergencia fuese uniforme, tendriamos que

$$f_n(x) := \frac{n!x^n}{n^n} \to 0$$

uniformenente en $(-e,e)$: mostraremos que esto no es así.

Si $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$a_n := \log\frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \log n - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log k = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\log\frac{n}{k}. \tag{1}$$

Observemos que

$$\begin{aligned} a_{2^{n+1}} &= \sum_{k=1}^{2^{n+1}} \frac{1}{2^{n+1}} \log \frac{2^{n+1}}{k} = \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{2^{n+1}} \left(\log \frac{2^{n+1}}{2k} + \log \frac{2^{n+1}}{2k-1} \right) \\ &\geq \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{2^{n+1}} 2 \log \frac{2^{n+1}}{2k} = a_{2^n}, \end{aligned}$$

de manera que la sucesión $(a_{2^n})_{n\geq 1}$ es creciente.

De la expresión (1) vemos que se trata de una suma de Riemann para la integral $\int_0^1 \log \frac{1}{x}\, dx = 1$, así que $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$. (En realidad, el integrando de esta integral no es acotado en $[0,1]$, así que la integral es impropia, así que se requiere un argumento —que aquí omitimos— para ver que la integral es el límite de nuestras sumas de Riemann.) Se sigue de esto que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \lim_{n\to\infty} e^{a_n} = e.$$

En particular, la sucesión $(b_n)_{n\geq 1}$ con

$$b_n := \frac{2^n}{\sqrt[2^n]{2^n!}}$$

crece a e. Si $n \in \mathbb{N}$, entonces $b_n \in (0,e)$ y

$$f_{2^n}(b_n) = \frac{2^n!}{(2^n)^{2^n}} b_n^{2^n} = 1.$$

Esto muestra que la sucesión $(f_n)_{n\geq 1}$ no converge uniformenente a 0 en $(-e,e)$, como queríamos.

(*d*) Si $z \neq 0$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\frac{|z|^{n+1}}{n+1} \Big/ \frac{|z|^n}{n} = |z| \frac{n}{n+1} \to |z|$$

si $n \to \infty$, así que el criterio del cociente nos dice que la serie diverge cuando $|z| > 1$ y que converge absolutamente cuando $0 < |z| < 1$. Por supuesto, la serie converge absolutamente cuando $z = 0$.

Sea ahora $z \in \mathbb{C}$ con $|z| = 1$ y $z \neq 1$. Es

$$\left| \sum_{k=1}^{n} z^k \right| = \left| \frac{1-z^{n+1}}{1-z} \right| \leq \frac{2}{|1-z|},$$

así que la serie $\sum_{n\geq 1} z^n$ tiene sus sumas parciales acotadas. Por otro lado, la sucesión $(1/n)_{n\geq 1}$ es de números reales positivos y decrece a 0. El criterio de Dirichlet del Ejercicio **16**, entonces, nos dice que la serie $\sum_{n\geq 1} z^n/n$ converge; esa convergencia es claramente condicional. Por otro lado, cuando $z = 1$ la serie no converge.

La conclusión de todo esto es que el dominio de convergencia puntual de la serie es $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1, z \neq 1\}$ y el dominio de convergencia absoluta es $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

Mostremos ahora que para todo $R \in (0,1)$ la serie converge uniformemente en el disco cerrado $\overline{B}_R(0) \subseteq \mathbb{C}$. Fijemos para ello $R \in (0,R)$. Si $z \in \overline{B}_R(0)$, entonces la serie $\sum_{n\geq 1} z^n/n$ está acotada en módulo término a término por la serie $\sum_{n\geq 1} R^n/n$, que sabemos que converge: lo que queremos, entonces, sigue del criterio de Weierstrass.

(*e*) Sea $z \in \mathbb{C}$. Si $|z| > 1$, entonces $|z|^{n(n+1)}/n^2 \to \infty$ cuando n crece, así que la serie diverge. Si $|z| \leq 1$, entonces el término general de la serie $\sum_{n\geq 1}(-1)^n z^{n(n+1)}/n^2$ está acotado en módulo por los de la serie $\sum_{n\geq 1} 1/n^2$, que converge: esto nos dice que la serie converge uniformemente en $\overline{B}_1(0) \subseteq \mathbb{C}$. □

20. (*a*) Para todo $x \in \mathbb{R}$ es

$$\sin x = \sum_{k\geq 0} \frac{(-k)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

y la serie converge absoluta y uniformemente en todo intervalo finito. ¿Qué sucede en $\mathbb{R}$?

(*b*) La serie

$$\sum_{n\geq 1} \left(\frac{x^n}{n!} \right)^2$$

converge puntualmente en $\mathbb{R}$ y su suma es una función continua.

Solución. (*a*) Sea $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \sin x \in \mathbb{R}$. Una inducción muestra que si $k \in \mathbb{N}_0$ es

$$f^{(k)}(x) = \begin{cases} (-1)^{k(k-1)/2} \sin x & \text{si } k \equiv 0 \mod 2; \\ (-1)^{k(k-1)/2} \cos x & \text{si } k \equiv 1 \mod 2. \end{cases}$$

Esto implica inmediatamente que para todo $k \in \mathbb{N}_0$ y todo $x \in \mathbb{R}$ se tiene que $|f^{(k)}(x)| \leq 1$ y que

$$f^{(k)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \equiv 0 \mod 2; \\ (-1)^{k(k-1)/2} & \text{si } k \equiv 1 \mod 2. \end{cases}$$

En particular, esto nos dice que para cada $l \in \mathbb{N}$ es

$$f^{(2l+1)}(0) = (-1)^l.$$

Sea ahora $R > 0$ y sea $x \in \mathbb{R}$ tal que $|x| \leq R$. El teorema de Taylor nos dice que para cada $n \in \mathbb{N}$ es

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

para algún número ξ_n que está entre 0 y x, y entonces

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right| \leq \frac{|f^{(n+1)}(\xi_n)|}{(n+1)!} R^{n+1} \leq \frac{R^{n+1}}{(n+1)!},$$

ya que las derivadas sucesivas de f están todas acotadas en módulo por 1 sobre $\mathbb{R}$. Como la última expresión converge a 0 si n crece, vemos así que

$$f(x) = \sum_{k\geq 0} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{l\geq 0} \frac{(-1)^l}{(2l+1)!} x^{2l+1},$$

con la serie convergiendo uniformemente sobre todo intervalo compacto. La serie converge puntualmente en todo $\mathbb{R}$ y es inmediato que la convergencia en $\mathbb{R}$ no es uniforme, porque ninguno de los téminos de la serie es acotado.

(*b*) Si $R > 0$ y $x \in [-R, R]$, entonces la serie $\sum_{n\geq 1} x^{2n}/n!^2$ está acotada término a término en valor absoluto por la serie $\sum_{n\geq 1} R^{2n}/n!^2$. El cociente entre dos términos sucesivos de esta última es

$$\frac{R^{2(n+1)}/(n+1)!^2}{R^{2n}/n!^2} = \frac{R^2}{(n+1)^2},$$

y esto converge a 0: vemos así que la serie con la que empezamos converge uniformemente en $[-R, R]$ y, como todos sus términos son funciones continuas, la función suma es continua en ese intervalo. Como esto ocurre para todo $R > 0$, vemos que la serie original converge puntualmente a una función continua en todo $\mathbb{R}$. □

21. Consideremos la serie de funciones

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{1+n^2x^2}$$

sobre $\mathbb{R}$.

(*a*) ¿En qué conjunto converge la serie?

(*b*) ¿Sobre qué intervalos es uniforme la convergencia?

(*c*) ¿Sobre qué intervalos *no* es uniforme la convergencia?

(*d*) ¿Es continua la función suma en su dominio? ¿Y acotada?

Solución. (*a*) Es claro que la serie diverge cuando $x = 0$. Sea $r > 0$ y supongamos que $|x| \geq r$. En ese caso la serie esta acotada superiormente en módulo por la serie $\sum_{n\geq 1}(1+n^2r^2)^{-1}$, que converge: el teorema de Weierstrass nos permite concluir entonces que la serie converge uniformemente en el conjunto $\mathbb{R} \setminus (-r, r)$. Vemos así que la serie converge uniformemente en todo conjunto cuya clausura no contiene a 0.

Si A es un subconjunto de $\mathbb{R}$ tal que $0 \in \overline{A}$. Si la serie convergiera uniformemente en A, entonces tendríamos que $(1+n^2x^2)^{-1}$ convergería uniformemente a 0 en A cuando n crece y, en particular, tendríamos que $(1+n^2x^2)^{-1} < 1/2$ para todo $x \in A$ y n grande: esto es absurdo, porque todas esas funciones valen 1 cuando $x = 0$.

La función suma de la serie es continua en $\mathbb{R} \setminus 0$, porque es una serie de funciones continuas que converge uniformemente en un entorno de cada uno de los puntos de $\mathbb{R} \setminus 0$.

Sea $N \in \mathbb{N}$ y sea $x \in (0, 1/N)$. Si $n \in [\![N]\!]$, entonces

$$\frac{1}{1+n^2x^2} \geq \frac{1}{1+N^2x^2} \geq \frac{1}{2},$$

así que

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{1+n^2x} \geq \frac{N}{2} + \sum_{n>N} \frac{1}{1+n^2x^2} \geq \frac{N}{2}.$$

Esto muestra que la función suma de la serie no está acotada en ningún conjunto cuya clausura contenga a 0. □