CÁLCULO AVANZADO

Segundo Cuatrimestre — 2019

Práctica 7: Compacidad

1. (a) Si $(x_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión en $\mathbb{R}$ que converge y x_0 es su límite, entonces el conjunto $\{x_n : n \geq 0\}$ es compacto en $\mathbb{R}$.

(b) El intervalo $[0, 1]$ es compacto en $\mathbb{R}$.

(c) Si a y b si dos elementos de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tales que $a < b$, entonces $S = (a, b) \cap \mathbb{Q}$ es un subconjunto cerrado y acotado de $\mathbb{Q}$ que no es compacto.

2. Un espacio métrico compacto es separable.

3. Si n y m están en $\mathbb{N}$, escribamos

$$a_{n,.m} := \begin{cases} 1 & \text{si } n = m; \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos considerar la sucesión $a_n = (a_{n,m})_{m\geq 1}$, que es un elemento de ℓ_∞, y, por lo tanto, la sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$ de elementos de ese espacio.

El conjunto $\{a_n : n \geq 1\}$ de ℓ_∞ es discreto, cerrado y acotado, pero no compacto.

4. Sea X un espacio métrico. Si $\mathscr{U}$ es un cubrimiento abierto de X, un número $\varepsilon > 0$ es un *número de Lebesgue* de $\mathscr{U}$ si toda bola abierta de radio ε está contenida en un abierto de $\mathscr{U}$. Muestre que todo cubrimiento abierto de un espacio métrico compacto posee un número de Lebesgue.

5. Sea X un espacio métrico.

(a) El conjunto de los compactos de X es cerrado por uniones finitas e intersecciones arbitrarias.

(b) Si X es compacto, todo cerrado de X es compacto.

(c) Un subconjunto F de X es cerrado si y solamente si para todo compacto K de X la intersección $F \cap K$ es cerrada.

6. Si V es un espacio vectorial de dimensión finita, entonces dos normas $\|-\|$ y $\|-\|'$ sobre V son equivalentes, esto es, existe un escalar positivo α tal que

$$\alpha\|x\| \leq \|x\|' \leq \alpha^{-1}\|x\|$$

para todo $x \in V$.

7. El espacio métrico c_0 de las sucesiones de números reales que convergen a 0 dotado de la métrica d_∞ es separable y su bola unidad cerrada $\overline{B}_1(0)$ no es compacta.

8. Sean X e Y dos espacios métricos y dotemos al conjunto $X \times Y$ de su métrica d_∞. El espacio $X \times Y$ es compacto si y solamente si X e Y lo son.

9. Sea X un espacio métrico.

(a) Si K es un compacto de X y $x \in X$, entonces hay un punto $y \in K$ tal que $d(x,y) = d(x,K)$.

(b) Si F y G son dos cerrados disjuntos de X y uno de los dos es compacto, entonces $d(F,G) > 0$.

(c) Si F y G son dos compactos de X, entonces existen $x \in F$ e $y \in G$ tales que $d(x,y) = d(F,G)$.

10. Sea X un espacio métrico completo y sea $K(X)$ el conjunto de todos los subconjuntos compactos y no vacíos de X.

(a) Si A y B son elementos de $K(X)$, ponemos $\tilde{d}(A,B) := \sup\{d(a,B) : a \in A\}$. Muestre que $\tilde{d}$ no es, en general, una métrica sobre $K(X)$.

(b) Sea $\delta : K(X) \times K(X) \to \mathbb{R}$ la función tal que

$$\delta(A,B) = \max\{\tilde{d}(A,B), \tilde{d}(B,A)\}$$

cada vez que A y B están en $K(X)$. Por otro lado, si C es un subconjunto de X y $\varepsilon > 0$, entonces ponemos

$$N(C,\varepsilon) := \{x \in X : d(x,C) < \varepsilon\}.$$

Si $\varepsilon > 0$ y A, $B \in K(X)$, entonces

$$\delta(A,B) < \varepsilon \iff A \subseteq N(B,\varepsilon) \text{ y } B \subseteq N(A,\varepsilon).$$

(c) La función δ es una métrica sobre $K(X)$, a la que llamamos *métrica de Hausdorff*.

†**11.** Sea X un espacio métrico y sea $K(X)$ el conjunto de los compactos no vacíos de X dotado de su métrica de Hausdorff.

(a) Si X es completo, entonces $K(X)$ es completo.

(b) Si X es compacto, entonces $K(X)$ es compacto.

12. Sea $f : X \to Y$ una función continua entre espacios métricos.

(a) Si X es compacto, entonces $f(X)$ también lo es.

(b) Si además f es biyectiva, entonces f es un homeomorfismo.

13. Si X es un espacio métrico compacto, entonces para todo otro espacio métrico Y la proyección $\pi : (x,y) \in X \times Y \mapsto y \in Y$ es cerrada.

14. Sean X e Y dos espacios métricos y supongamos que Y es compacto. Una función $X \to Y$ cuyo gráfico es un cerrado de $X \times Y$ es continua.

15. (a) Una función $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ que es uniformemente continua en $[0,1]$ y en $[1,+\infty]$ es uniformemente continua en $[0,+\infty)$.

(b) La función $x \in [0, +\infty) \to \sqrt{x} \in \mathbb{R}$ es uniformemente continua.

(c) Una función continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$ es uniformemente continua.

16. Sea X un espacio métrico y sea A un subconjunto compacto de X. Si $f : A \to \mathbb{R}$ es una función continua y $f(x) > 0$ para todo $x \in A$, entonces existe $K > 0$ tal que $f(x) \geq K$ para todo $x \in A$.

17. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua y abierta.

(a) La función f no tiene extremos locales.

(b) Existen a, $b \in [-\infty, +\infty]$ tales que $f(\mathbb{R}) = (a, b)$.

(c) La función f es un homeomorfismo de $\mathbb{R}$ al intervalo (a, b) y ella y su inversa son funciones monótonas.