CÁLCULO AVANZADO

Segundo Cuatrimestre — 2019

Práctica 7: Compacidad

1. (a) Si $(x_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión en $\mathbb{R}$ que converge y x_0 es su límite, entonces el conjunto $\{x_n : n \geq 0\}$ es compacto en $\mathbb{R}$.

(b) El intervalo $[0,1]$ es compacto en $\mathbb{R}$.

(c) Si a y b si dos elementos de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tales que $a < b$, entonces $S = (a,b) \cap \mathbb{Q}$ es un subconjunto cerrado y acotado de $\mathbb{Q}$ que no es compacto.

Solución. (a) Sea X el conjunto del enunciado y sea $\mathscr{U}$ un cubrimiento abierto de X. Sea $U_0 \in \mathscr{U}$ tal que $x \in U_0$. Como la sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ converge a x, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in U_0$ siempre que $n \geq N$. Por otro lado, para cada $i \in [\![N]\!]$ existe $U_i \in \mathscr{U}$ tal que $x_i \in U_i$. Es claro que $\{U_i : 0 \leq i \leq N\}$ es un subcubrimiento finito de $\mathscr{U}$.

(b) Sea $(x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en $[0,1]$. Para cada subintervalo $[a,b]$ de $[0,1]$ sea $I(a,b) \coloneqq \{n \in \mathbb{N} : x_n \in [a,b]\}$. Vamos a construir dos sucesiones $(a_n)_{n\geq 0}$ y $(b_n)_{n\geq 0}$ inductivamente, de manera tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ es $a_{n+1} \leq a_n < b_n \leq b_{n+1}$, $b_n - a_n = 2^{-n}$ y el conjunto $I(a_n, b_n)$ es infinito. Empezamos con $a_0 \coloneqq 0$ y $b_0 \coloneqq 1$. Supongamos que $n \in \mathbb{N}_0$ y que ya elegimos a_n y b_n. Sea $c = (a_n + b_n)/2$. Como $I(a_n, b_n) = I(a_n, c) \cup I(c, b_n)$ y el conjunto $I(a_n, b_n)$ es infinito, alguno de $I(a_n, c)$ o $I(c, b_n)$ es infinito: si $I(a_n, c)$ es infinito, ponemos $a_{n+1} = a_n$ y $b_{n+1} = c$; si, por el contrario, es finito, ponemos $a_{n+1} = c$ y $b_{n+1} = b_n$. En cualquiera de los dos casos tenemos que $a_n \leq a_{n+1} < b_{n+1} < a_n$, $b_{n+1} - a_{n+1} = (b_n - a_n)/2 = 2^{-(n+1)}$ y el conjunto $I(a_{n+1}, b_{n+1})$ es infinito. Observemos que $\alpha \coloneqq \sup\{a_n : n \geq 1\}$ coincide con $\inf\{b_n : n \geq 1\}$. En particular, tenemos que $\alpha \in [a_n, b_n]$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Vamos a construir ahora una subsucesión $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ de $(x_n)_{n\geq 1}$ tal que $x_{n_k} \in [a_k, b_k]$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Ponemos $n_1 \coloneqq 1$ y para cada $k \in \mathbb{N}$ definimos inductivamente

$$n_{k+1} \coloneqq \min\{i \in I(a_{k+1}, b_{k+1}) : i > n_k\}.$$

Es claro que la sucesión $(n_k)_{k\geq 1}$ es estrictamente creciente y que $x_{n_k} \in [a_k, b_k]$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Más aún, como ese intervalo también contiene a α y tiene diámetro 2^{-k}, tenemos que $|x_{n_k} - \alpha| \leq 2^{-k}$. Esto implica claramente que la sucesión $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ converge a α.

Hemos mostrado así que toda sucesión en $[0,1]$ posee una subsucesión convergente.

(b) Sea $\mathscr{U}$ un cubrimiento abierto de $[0,1]$ y sea T el conjunto de los números $t \in [0,1]$ tales que $\mathscr{U}$ posee un subconjunto finito que cubre al intervalo $[0,t]$. Observemos que $T \neq \emptyset$: en efecto, como $\mathscr{U}$ cubre $[0,1]$, existe $U \in \mathscr{U}$ tal que $0 \in U$ y, por lo tanto, el intervalo degenerado $[0,0]$ está cubierto por el subconjunto $\{U\}$ de $\mathscr{U}$, que es finito, de manera que $0 \in T$. Por otro lado, es evidente que T es acotado, ya que está contenido en $[0,1]$: podemos, entonces, considerar el número $\tau \coloneqq \sup T$, que está en $[0,1]$.

Como $\mathscr{U}$ cubre a $[0,1]$, existe $V \in \mathscr{U}$ tal que $\tau \in V$ y, como V es abierto, existe $\delta > 0$ tal que $(\tau-\delta, \tau+\delta) \subseteq V$. Como τ es el supremo de T, existe $\sigma \in T$ tal que $\tau-\delta < \sigma \leq \tau$ y, por lo tanto, existe un subconjunto finito $\mathscr{U}'$ de $\mathscr{U}$ que cubre al intervalo $[0,\sigma]$. Es claro ahora que $\mathscr{U}' \cup \{V\}$ es un subconjunto finito de $\mathscr{U}$ que cubre a $[0,\tau+\delta/2]$: esto implica, en particular, que $[\tau,\tau+\delta/2] \cap [0,1] \subseteq T$. Como τ es el supremo de T, tenemos necesariamente que $[\tau,\tau+\delta/2] \cap [0,1] = \{\tau\}$, así que $\tau \in T$, y $\tau = 1$.

(*c*) Sean a, $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tales que $a < b$ y sea $S := (a,b) \cap \mathbb{Q}$. Como a y b no están en $\mathbb{Q}$, $S = [a,b] \cap \mathbb{Q}$: como $[a,b] \cap \mathbb{Q}$ es un cerrado de $\mathbb{Q}$, esto muestra que S es cerrado en $\mathbb{Q}$. Claramente es acotado — veamos que no es compacto. Sabemos que hay una sucesión $(q_n)_{n\geq 1}$ de números racionales todos contenidos de $[a,b]$ que converge a a y que es decreciente: esa sucesión está en S, es de Cauchy y no tiene límite en S, así que S no es completo. En particular, S no es compacto. □

2. Un espacio métrico compacto es separable.

Solución. Sea X un espacio métrico compacto. Si $n \in \mathbb{N}$, entonces $\mathscr{U}_n := \{B_{1/n}(x) : x \in X\}$ es un cubrimiento abierto de X y existe por lo tanto un subconjunto finito D_n de X tal que $\mathscr{U}_n' := \{B_{1/n}(x) : x \in D_n\}$ es un subcubrimiento de $\mathscr{U}_n$. Pongamos $D := \bigcup_{n\geq 1} D_n$, que es un subconjunto numerable de X. Más aún, si $x \in X$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces como $\mathscr{U}_n'$ es un cubrimiento de X, existe $y \in D_n \subseteq D$ tal que $x \in B_{1/n}(y)$, esto es, tal que $d(x,y) < 1/n$. Esto nos dice que el conjunto D es denso en X. □

3. Si n y m están en $\mathbb{N}$, escribamos

$$a_{n,.m} := \begin{cases} 1 & \text{si } n = m; \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos considerar la sucesión $a_n = (a_{n,m})_{m\geq 1}$, que es un elemento de ℓ_∞, y, por lo tanto, la sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$ de elementos de ese espacio.

El conjunto $\{a_n : n \geq 1\}$ de ℓ_∞ es discreto, cerrado y acotado, pero no compacto.

Solución. Sea X el conjunto del enunciado. Si n y m son dos elementos distintos de $\mathbb{N}$, entonces $d_\infty(a_n, a_m) \geq |a_{n,n} - a_{m,n}| = 1$, así que para todo $n \in \mathbb{N}$ es $X \cap B_{1/2}(a_n) = \{a_n\}$: vemos así que X es discreto.

Para todo $n \in \mathbb{N}$ es $d(a_n, 0) = 1$, así que X es acotado. Si $(x_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión en X que converge en ℓ_∞, entonces la sucesión es de Cauchy y existe $N \in \mathbb{N}$ tal que siempre que r, $s \geq N$ se tiene que $d(x_r, x_s) < 1/2$ y, por lo que hicimos ya, que $x_r = x_s$. La sucesión es, por lo tanto, casi constante y podemos concluir entonces que su límite está en X. Para ver que X no es compacto basta observar que la sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$, que toma valores en X, no posee ninguna subsucesión de Cauchy: en efecto, toda subsucesión es inyectiva y la distancia entre cada par de sus puntos es 1. □

4. Sea X un espacio métrico. Si $\mathscr{U}$ es un cubrimiento abierto de X, un número $\varepsilon > 0$ es un *número de Lebesgue* de $\mathscr{U}$ si toda bola abierta de radio ε está contenida en un abierto de $\mathscr{U}$. Muestre que todo cubrimiento abierto de un espacio métrico compacto posee un número de Lebesgue.

Solución. Sea X un espacio métrico compacto y sea $\mathscr{U}$ un cubrimiento abierto. Si $X \in \mathscr{U}$, entonces 1 es un número de Lebesgue para $\mathscr{U}$. Podemos suponer entonces que $X \notin \mathscr{U}$ en lo que queda de la prueba.

Como X es compacto, hay un subconjunto finito $\mathscr{U}'$ de $\mathscr{U}$ que cubre a X. Sea $n = \#\mathscr{U}'$, sean $U_1, \ldots, U_n$ los elementos de $\mathscr{U}'$ y sea $f : X \to \mathbb{R}$ la función tal que

$$f(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d(x, X \setminus U_i)$$

para cada $x \in X$; observemos que esto tiene sentido, ya que $X \notin \mathscr{U}'$. Esta función es continua, porque es suma de funciones continuas. Sea $\delta := \inf\{f(x) : x \in X\}$. Como X es compacto, existe $y \in X$ tal que $f(y) = \delta$. Como $\mathscr{U}'$ es un cubrimiento de X, existe $i \in [\![n]\!]$ tal que $x \in U_i$, y como $X \setminus U_i$ es un cerrado, tenemos que $d(y, X \setminus U_i) > 0$, de manera que claramente $\delta = f(y) > 0$.

Veamos que δ es un número de Lebesgue para $\mathscr{U}$. Sea $z \in X$. Si no existiera $i \in [\![n]\!]$ tal que $B_\delta(z) \subseteq U_i$, entonces sería $d(z, X \setminus U_i) < \delta$ para todo $i \in [\![n]\!]$ y, por lo tanto, $f(z) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d(z, X \setminus U_i) < \delta$: esto es absurdo. Esta nos dice que hay un $i \in [\![n]\!]$ tal que $B_\delta(z) \subseteq U_i \in \mathscr{U}$. □

5. Sea X un espacio métrico.

(a) El conjunto de los compactos de X es cerrado por uniones finitas e intersecciones arbitrarias.

(b) Si X es compacto, todo cerrado de X es compacto.

(c) Un subconjunto F de X es cerrado si y solamente si para todo compacto K de X la intersección $F \cap K$ es cerrada.

Solución. (a) Sea C una familia no vacía de compactos de X. Como los elementos de C son compactos, son cerrados en X, así que $T := \bigcap_{K \in C} K$ es un cerrado de X. Si K_0 es un elemento de C, entonces T es un cerrado de K_0, así que es compacto porque K_0 lo es. Vemos así que la intersección de una familia arbitraria no vacía de compactos de X es compacta.

Para ver que la unión finita de compactos es compacta es suficiente, gracias a una inducción evidente, con mostrar que la unión de dos compactos es compacta. Sean A y B dos compactos de X y sea $(x_n)_{n \geq 1}$ una sucesión en $A \cup B$. Alguno de los conjuntos $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in A\}$ y $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in B\}$ es infinito y podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que el primero lo es. Esto implica claramente que nuestra sucesión tiene una subsucesión con valores en A y, como A es compacto, esta subsucesión posee una subsucesión convergente. Por supuesto, esto nos dice que la sucesión con la que empezamos posee una subsucesión convergente.

(b) Supongamos que X es un espacio métrico compacto y sea F un cerrado de X. Sea $\mathscr{U}$ un cubrimiento abierto de F. Para cada $U \in \mathscr{U}$ existe un abierto V_U en X tal que $U = F \cap V_U$, y el conjunto $\mathscr{V} := \{X \setminus F\} \cup \{V_U : U \in \mathscr{U}\}$ es un cubrimiento abierto de X. Como X es compacto, este cubrimiento posee un subcubrimiento finito $\mathscr{V}'$. Es inmediato verificar que $\{V \cap F : V \in \mathscr{V}'\} \setminus \{\emptyset\}$ es un subcubrimiento de $\mathscr{U}$.

(c) La condición es claramente necesaria, ya que los compactos de X son cerrados y la intersección de cerrados es cerrada. Veamos que también es suficiente.

Sea F un subconjunto de X tal que para todo compacto K de X la intersección $F \cap K$ es cerrada y sea $(x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión con valores en F que converge a un punto x de X. El conjunto $K = \{x_n : n \geq 1\} \cup \{x\}$ es un compacto de X, así que la hipótesis nos dice que $F \cap K$ es cerrado: como la sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ toma valores en esta intersección, tenemos que su limite x está también ahí. En particular, tenemos que $x \in F$. Vemos así que F es un cerrado de X. $\square$

6. Si V es un espacio vectorial de dimensión finita, entonces dos normas $\|-\|$ y $\|-\|'$ sobre V son equivalentes, esto es, existe un escalar positivo α tal que

$$\alpha\|x\| \leq \|x\|' \leq \alpha^{-1}\|x\|$$

para todo $x \in V$.

Solución. Hacer

7. El espacio métrico c_0 de las sucesiones de números reales que convergen a 0 dotado de la métrica d_∞ es separable y su bola unidad cerrada $\overline{B}_1(0)$ no es compacta.

Solución. Consideremos el conjunto D de las sucesiones $(a_n)_{n\geq 1}$ de números racionales para las que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n = 0$ siempre que $n \geq n_0$. Es claro que D es numerable y que $D \subseteq c_0$. Veamos que D es denso en c_0.

Sea $x = (x_n)_{n\geq 1}$ un elemento de c_0 y sea $\varepsilon > 0$. Como la sucesión x converge a 0, existe n_0 tal que $|x_n| < \varepsilon/2$ si $n \geq n_0$. Por otro lado, como $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$, existen $q_1, \ldots, q_{n_0} \in \mathbb{Q}$ tales que $\max\{|q_i - x_i| : 1 \leq i \leq n_0\} < \varepsilon$. Si $y = (y_n)_{n\geq 1}$ es tal que $y_i = q_i$ para $i \in [\![n_0]\!]$ e $y_i = 0$ si $i > n_0$, entonces claramente es $y \in D$ y $d_\infty(x, y) < \varepsilon$. Esto prueba que el espacio c_0 es separable, como queríamos.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $e_n = (e_{n,m})_{m\geq 1}$ la sucesión tal que $e_{n,m} = 0$ si $m \neq n$ y $e_{n,n} = 1$. Es claro que e_n converge a 0, así que $e_n \in c_0$. Tenemos, por lo tanto, una sucesión $(e_n)_{n\geq 1}$ en c_0. Más aún, $d_\infty(0, e_n) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, así que la sucesión toma valores en la bola unidad cerrada $\overline{B}_1(0)$. Si esta bola fuera compacta, la sucesión poseería una subsucesión convergente y, en particular, de Cauchy, pero esto no es así: en efecto, es claro que $d_\infty(e_n, e_n) = 1$ siempre que $n \neq m$. $\square$

8. Sean X e Y dos espacios métricos y dotemos al conjunto $X \times Y$ de su métrica d_∞. El espacio $X \times Y$ es compacto si y solamente si X e Y lo son.

Solución. Si el espacio $X \times Y$ es compacto, entonces X e Y también lo son porque las proyecciones $\pi_1 : X \times Y \to X$ y $\pi_2 : X \times Y \to Y$ con continuas y sobreyectivas.

Para probar la recíproca, supongamos que X e Y son espacios métricos compactos y sea $(p_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en $X \times Y$. Como X es compacto, existe una subsucesión $(p_{n_k})_{k\geq 1}$ tal que la sucesión $(\pi_1(p_{n_k}))_{k\geq 1}$ converge en X, y como Y es compacto, esta subsucesión posee a su vez una subsucesión $(p_{n_{k_l}})_{l\geq 1}$ tal que la sucesión $(\pi_2(p_{n_{k_l}}))_{l\geq 1}$ es convergente en Y. Como además $(\pi_1(p_{n_{k_l}}))_{l\geq 1}$ converge en X, la caracterización de las sucesiones convergentes en $X \times Y$ nos dice que la sucesión $(p_{n_{k_l}})_{l\geq 1}$, que es una subsucesión de la sucesiones $(p_n)_{n\geq 1}$ con la que empezamos, converge. $\square$

9. Sea X un espacio métrico.

(a) Si K es un compacto de X y $x \in X$, entonces hay un punto $y \in K$ tal que $d(x,y) = d(x,K)$.

(b) Si F y G son dos cerrados disjuntos de X y uno de los dos es compacto, entonces $d(F,G) > 0$.

(c) Si F y G son dos compactos de X, entonces existen $x \in F$ e $y \in G$ tales que $d(x,y) = d(F,G)$.

Solución. (a) Sea K un compacto de X y sea $x \in X$. La función $f : y \in K \mapsto d(x,y) \in \mathbb{R}$ es continua y su dominio compacto, así que existe $y \in K$ tal que $f(y) \leq f(y')$ para todo $y' \in K$, esto es, tal que $d(x,y) \leq d(x,y')$ para todo $y' \in K$. Esto nos dice que $d(x,y)$ es una cota inferior para $\{d(x,y') : y' \in K\}$ y, por lo tanto, que $d(x,y) \leq d(x,K)$. Por otro lado, que $d(x,y) \geq d(x,K)$ es evidente.

(b) Sean F y G dos cerrados de X y supongamos que F es compacto y que $d(F,G) = 0$. Esto implica que hay dos sucesiones $(x_n)_{n\geq1}$ e $(y_n)_{n\geq1}$ en F y en G, respectivamente, tales que $\lim_{n\to\infty} d(x_n,y_n) = 0$. Como F es compacto, podemos —a menos de reemplazar a la sucesión $(x_n)_{n\geq1}$ por una de sus subsucesiones— suponer que además la sucesión $(x_n)_{n\geq1}$ converge a un punto x, que necesariamente está en F, ya que F es cerrado.

Si ahora $n \in \mathbb{N}$, entonces $0 \leq d(x,y_n) \leq d(x,x_n) + d(x_n,y_n)$ y, como $(x_n)_{n\geq1}$ converge a x y $(d(x_n,y_n))_{n\geq1}$ converge a 0, vemos que $(y_n)_{n\geq1}$ converge a x. Esta última sucesión toma valores en G, que es cerrado, así que podemos concluir que $x \in G$. Pero entonces la intersección $F \cap G$ no es vacía, ya que contiene a x.

(c) Sean F y G dos compactos de X. La función distancia $d : X \times X \to \mathbb{R}$ es continua, así que también lo es su restricción $d : F \times G \to \mathbb{R}$. Como el dominio de esta última es compacto, sabemos que existe $(x,y) \in F \times G$ tal que $d(x,y) \leq d(x',y')$ cualquiera sea $(x',y') \in F \times G$. Esto, por supuesto, nos dice que $d(x,y) = d(F,G)$. □

10. Sea X un espacio métrico completo y sea $K(X)$ el conjunto de todos los subconjuntos compactos y no vacíos de X.

(a) Si A y B son elementos de $K(X)$, ponemos $\tilde{d}(A,B) := \sup\{d(a,B) : a \in A\}$. Muestre que $\tilde{d}$ no es, en general, una métrica sobre $K(X)$.

(b) Sea $\delta : K(X) \times K(X) \to \mathbb{R}$ la función tal que

$$\delta(A,B) = \max\{\tilde{d}(A,B), \tilde{d}(B,A)\}$$

cada vez que A y B están en $K(X)$. Por otro lado, si C es un subconjunto de X y $\varepsilon > 0$, entonces ponemos

$$N(C,\varepsilon) := \{x \in X : d(x,C) < \varepsilon\}.$$

Si $\varepsilon > 0$ y A, $B \in K(X)$, entonces

$$\delta(A,B) < \varepsilon \iff A \subseteq N(B,\varepsilon) \text{ y } B \subseteq N(A,\varepsilon).$$

(c) La función δ es una métrica sobre $K(X)$, a la que llamamos *métrica de Hausdorff*.

Solución. (a) Sean $X = \mathbb{R}$, $A = \{-2,2\}$ y $B = [-1,1]$. Es $\tilde{d}(A,B) = 1$, mientras que $\tilde{d}(B,A) = 2$: la función δ no es, por lo tanto, simétrica, y, en particular, no es una métrica.

(b) Sean A y B dos compactos de X y sea $\varepsilon > 0$.

Supongamos primero que $\delta(A,B) < \varepsilon$, de manera que $\tilde{d}(A,B) < \varepsilon$ y $\tilde{d}(B,A) < \varepsilon$: esto implica que $d(a,B) < \varepsilon$ para todo $a \in A$ y $d(b,A) < \varepsilon$ para todo $b \in B$: vemos así que $A \subseteq N(B,\varepsilon)$ y que $B \subseteq N(A,\varepsilon)$.

Supongamos ahora que $A \subseteq N(B,\varepsilon)$ y que $B \subseteq N(A,\varepsilon)$, de manera que $d(a,B) < \varepsilon$ para todo $a \in A$ y $d(b,A) < \varepsilon$ para todo $b \in B$. Como la función $a \in A \mapsto d(a,B) \in \mathbb{R}$ es continua, su dominio es compacto y en todo punto tiene valor estrictamente menor a ε, su máximo es estrictamente menor que ε y tenemos, por lo tanto, que $\tilde{d}(A,B) < \varepsilon$. El mismo razonamiento nos dice que $\tilde{d}(B,A) < \varepsilon$ y, por lo tanto, que $\delta(A,B) < \varepsilon$.

Observemos que

$$\inf\{\varepsilon \in \mathbb{R} : \varepsilon > 0, A \subseteq N(B,\varepsilon), B \subseteq N(A,\varepsilon)\} = \inf\{\varepsilon \in \mathbb{R} : \varepsilon > 0, \delta(A,B) < \varepsilon\} = \delta(A,B).$$

(c) La función δ es evidentemente simétrica y tiene $\delta(A,A) = 0$ para todo $A \in K(X)$. Por otro lado, si A y B son elementos de $K(X)$ tales que $\delta(A,B) = 0$, entonces para todo $\varepsilon > 0$ tenemos que $A \subseteq N(B,\varepsilon)$ y $B \subseteq N(A,\varepsilon)$, de manera que $A \subseteq \bigcap_{\varepsilon>0} N(B,\varepsilon)$ y $B \subseteq \bigcap_{\varepsilon>0} N(A,\varepsilon)$. Ahora bien, es claro que $\bigcap_{\varepsilon>0} N(B,\varepsilon)$ contiene a B y que si x es un punto de esa intersección tiene $d(x,B) = 0$, de manera que la intersección es igual a $\overline{B} = B$. De la misma forma, es $\bigcap_{\varepsilon>0} N(A,\varepsilon) = A$ y, por lo tanto, tenemos que $A = B$.

Nos queda probar que δ satisface la desigualdad triangular. Sean A, B y C tres elementos de $K(X)$. Observemos que siempre que R y S están en $K(X)$ se tiene, por lo que probamos en la segunda parte del ejercicio, que

$$\delta(R,S) = \inf\{\varepsilon \in \mathbb{R} : \varepsilon > 0,\, R \subseteq N(S,\varepsilon),\, S \subseteq N(R,\varepsilon)\}.$$

En particular,

$$\begin{aligned}
&\delta(A,B) + \delta(B,C) \\
&\quad = \inf\{\varepsilon \in \mathbb{R} : \varepsilon > 0,\, A \subseteq N(B,\varepsilon),\, B \subseteq N(A,\varepsilon)\} \\
&\qquad\qquad\qquad + \inf\{\varepsilon \in \mathbb{R} : \varepsilon > 0,\, B \subseteq N(C,\varepsilon),\, C \subseteq N(B,\varepsilon)\} \\
&\quad = \inf\{\varepsilon + \eta \in \mathbb{R} : \varepsilon, \eta > 0,\, A \subseteq N(B,\varepsilon),\, B \subseteq N(A,\varepsilon),\, B \subseteq N(C,\varepsilon),\, C \subseteq N(B,\varepsilon)\}.
\end{aligned}$$

Ahora bien, si ε y η son números positivos tales que $A \subseteq N(B,\varepsilon)$, $B \subseteq N(A,\varepsilon)$, $B \subseteq N(C,\varepsilon)$ y $C \subseteq N(B,\varepsilon)$, entonces

$$A \subseteq N(B,\varepsilon) \subseteq N(N(C,\eta),\varepsilon) = N(C,\varepsilon+\eta)$$

y

$$C \subseteq N(B,\eta) \subseteq N(N(A,\varepsilon),\eta) = N(A,\varepsilon+\eta).$$

Esto nos dice que

$$\begin{aligned}
&\{\varepsilon + \eta \in \mathbb{R} : \varepsilon, \eta > 0,\, A \subseteq N(B,\varepsilon),\, B \subseteq N(A,\varepsilon),\, B \subseteq N(C,\varepsilon),\, C \subseteq N(B,\varepsilon)\} \\
&\qquad\qquad\qquad \subseteq \{\rho \in \mathbb{R} : \rho > 0, A \subseteq N(C,\rho), C \subseteq N(A,\rho)\}
\end{aligned}$$

y, por lo tanto, que

$$\begin{aligned}
&\delta(A,B)+\delta(B,C)\\
&\quad = \inf\{\varepsilon+\eta\in\mathbb{R} : \varepsilon,\eta>0,\ A\subseteq N(B,\varepsilon),\ B\subseteq N(A,\varepsilon),\ B\subseteq N(C,\varepsilon),\ C\subseteq N(B,\varepsilon)\}\\
&\quad \geq \inf\{\rho\in\mathbb{R} : \rho>0, A\subseteq N(C,\rho), C\subseteq N(A,\rho)\}\\
&\quad = \delta(A,C).
\end{aligned}$$

Esta es la desigualdad que queríamos. □

[†]**11.** Sea X un espacio métrico y sea $K(X)$ el conjunto de los compactos no vacíos de X dotado de su métrica de Hausdorff.

(a) Si X es completo, entonces $K(X)$ es completo.

(b) Si X es compacto, entonces $K(X)$ es compacto.

Solución. (a) Hacer

(b) Supongamos que X es compacto. Como X es completo, la primera parte del ejercicio nos dice que $K(X)$ es completo: para ver que $K(X)$ es compacto, entonces, es suficiente que mostremos que es totalmente acotado.

Sea $\varepsilon > 0$. Como el espacio X es compacto, hay un conjunto finito $F \subseteq X$ tal que $X = \bigcup_{x\in F} B_\varepsilon(x)$. Sea G el conjunto de todas las uniones no vacías de elementos de la familia $\mathscr{B} = \{\overline{B}_\varepsilon(x) : x \in F\}$. Como los elementos de $\mathscr{B}$ son cerrados de X, son compactos: esto implica que los elementos de G son compactos de X, ya que son uniones finitas de compactos. Por otro lado, el conjunto G tiene a lo sumo $2^{|\mathscr{B}|}$ elementos, así que es finito.

Sea K un elemento de $K(X)$, esto es, un compacto no vacío de X. Pongamos

$$L := \bigcup_{\substack{x\in F\\ K\cap\overline{B}_\varepsilon(x)\neq\varnothing}} \overline{B}_\varepsilon(x),$$

que es un elemento de G; observemos que $L \neq \varnothing$ porque $\mathscr{B}$ es un cubrimiento de X. Si $y \in L$, entonces existe $x \in F$ tal que $y \in \overline{B}_\varepsilon(x)$ y $K \cap \overline{B}_\varepsilon(x) \neq \varnothing$ y, por lo tanto, $d(y,K) < 3\varepsilon$: esto muestra que $L \subseteq N(K,3\varepsilon)$. Por otro lado, si $z \in K$, entonces la elección de F implica que existe $x \in F$ tal que $z \in \overline{B}_\varepsilon(x)$, de manera que $K\cap\overline{B}_\varepsilon(x) \neq \varnothing$, $\overline{B}_\varepsilon(x) \subseteq L$, y $d(z,L) < 3\varepsilon$: esto muestra que $K \subseteq N(L,3\varepsilon)$. De acuerdo al Ejercicio **10**(b), tenemos entonces que $\delta(K,L) < 3\varepsilon$ y, por lo tanto, que $K \in B_{3\varepsilon}(L)$.

Con esto concluimos que

$$K(X) \subseteq \bigcup_{L\in G} B_{3\varepsilon}(L)$$

y, en definitiva, que es totalmente acotado. □

12. Sea $f : X \to Y$ una función continua entre espacios métricos.

(a) Si X es compacto, entonces $f(X)$ también lo es.

(b) Si además f es biyectiva, entonces f es un homeomorfismo.

Solución. (a) Supongamos que X es compacto. Sea $(y_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en $f(X)$, de manera que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in X$ tal que $f(x_n) = y_n$. Como X es compacto, la sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ posee una subsucesión $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ convergente, y como f es continua la sucesión $(f(x_{n_k}))_{k\geq 1}$, que la subsucesión $(y_{n_k})_{k\geq 1}$ de $(y_n)_{n\geq 1}$, converge. Esto implica que el conjunto $f(X)$ es compacto.

(b) Supongamos que X es compacto y que f es biyectiva. Para ver que f es un homeomorfismo, es suficiente con mostrar que es cerrada. Sea F un cerrado de X. Como X es compacto, F es compacto en X y, en vista de la primera parte del ejercicio, $f(F)$ es un compacto de Y. En particular, $f(F)$ es un cerrado de Y, y esto muestra que f es cerrada, como queríamos. □

13. Si X es un espacio métrico compacto, entonces para todo otro espacio métrico Y la proyección $\pi : (x, y) \in X \times Y \mapsto y \in Y$ es cerrada.

Solución. Sea X un espacio métrico compacto, sea Y un espacio métrico y sea $\pi : X \times Y \to Y$ la proyección en el segundo factor del producto. Sea F un cerrado de $X \times Y$ y sea $(y_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en $\pi(F)$ que converge a un punto y de Y. Como la sucesión está en $\pi(F)$, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in X$ tal que $(x_n, y_n) \in F$. Como X es compacto, la sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ contiene una subsucesión $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ que converge a un punto x de X. Como también $(y_{n_k})_{k\geq 1}$ converge a y, tenemos que la sucesión $((x_{n_k}, y_{n_k}))_{k\geq 1}$, que toma valores en F, converge a (x, y): como F es cerrado, esto implica que $(x, y) \in F$ y, por lo tanto, que $y = \pi(x, y) \in \pi(F)$. Vemos así que $\pi(F)$ es cerrado en Y. □

14. Sean X e Y dos espacios métricos y supongamos que Y es compacto. Una función $X \to Y$ cuyo gráfico es un cerrado de $X \times Y$ es continua.

Solución. Sea $f : X \to Y$ una función tal que $\Gamma = \{(x, f(x)) : x \in X\}$ es un cerrado de $X \times Y$, sea $(x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en X que converge y sea x su límite. Como Y es compacto, la sucesión $(f(x_n))_{n\geq 1}$ posee subsucesión convergentes. Si $(f(x_{n_k}))_{k\geq 1}$ es una de ellas e y su límite, entonces la sucesión $((x_{n_k}, f(x_{n_k}))_{k\geq 1}$, que toma valores en Γ, converge entonces a (x, y) y, como Γ es cerrado, tenemos que $(x, y) \in \Gamma$, esto es, que $f(x) = y$.

Vemos de esta forma que toda subsucesión convergente de $(f(x_n))_{n\geq 1}$ converge a $f(x)$. Esto implica que la sucesión misma converge a $f(x)$ y, en definitiva, que f es continua: probemos eso.

> *una sucesión en un espacio métrico compacto tal que todas sus subsucesiones convergentes tienen el mismo límite converge.*

Sea Z un espacio métrico compacto y sea $(z_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en Z cuyas subsucesiones convergentes convergen todas a un punto z y supongamos, para llegar a un absurdo, que la sucesión no converge a z. Existe entonces $\varepsilon > 0$ y una subsucesión $(z_{n_k})_{k\geq 1}$ tal que $d(z, z_{n_k}) \geq \varepsilon$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Como Z es compacto, esta subsucesión posee, a su vez, una subsucesión $(z_{n_{k_l}})_{l\geq 1}$ que converge. Si w es el límite de esta última, tenemos claramente que $d(z, w) \geq \varepsilon$ y, en particular, que $z \neq w$: esto es absurdo, porque contradice la hipótesis hecha sobre a sucesión $(z_n)_{n\geq 1}$. □

15. (a) Una función $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ que es uniformemente continua en $[0, 1]$

y en $[1,+\infty]$ es uniformemente continua en $[0,+\infty)$.

(b) La función $x \in [0,+\infty) \to \sqrt{x} \in \mathbb{R}$ es uniformemente continua.

(c) Una función continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ es uniformemente continua.

Solución. (a) Sea $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ una función que es uniformemente continua en $[0,1]$ y en $[1,+\infty)$, y sea $\varepsilon > 0$. La hipótesis implica inmediatamente que existe $\delta > 0$ tal que

$$x, y \in [0,1],\ |x-y| < \delta \implies |f(x)-f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

y

$$x, y \in [1,+\infty),\ |x-y| < \delta \implies |f(x)-f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sean x e y son dos elementos de $[0,+\infty)$ tales que $|x-y| < \delta$. Si x e y están los dos en $[0,1]$ o en $[1,+\infty)$, entonces la elección de δ implica que $|f(x)-f(y)| < \varepsilon/2 < \varepsilon$. Si no es ese el caso, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $x \in [0,1]$ y que $y \in [1,+\infty)$. Tenemos entonces que $y \geq x$ y que

$$\delta > |y-x| = y-x = (y-1)+(1-x) = |y-1|+|1-x|,$$

así que $|x-1| < \delta$ y $|1-y| < \delta$ y, por lo tanto,

$$|f(x)-f(y)| \leq |f(x)-f(1)|+|f(1)-f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Vemos así que f es uniformemente continua en $[0,+\infty)$.

(b) Sea f la función del enunciado y sea $\varepsilon > 0$. Existe $K > 0$ tal que $1/2\sqrt{K} < \varepsilon/2$. Como f es continua, es uniformemente continua en el intervalo compacto $[0,K]$ y existe $\delta > 0$, que podemos suponer menor que 1, tal que

$$x, y \in [0,K],\ |x-y| < \delta \implies |f(x)-f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por otro lado, si x e y son dos elementos de $[K,+\infty)$ con $|x-y| < 1$, el teorema de Lagrange nos dice que existe un punto ξ que está entre x e y, y que en particular es mayor que K, tal que

$$|f(x)-f(y)| = |f'(\xi)||x-y| = \frac{1}{2\sqrt{\xi}}|x-y| < \frac{1}{2\sqrt{K}} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Procediendo como en la primer aparte del ejercicio, podemos ver que

$$x, y \in [0,+\infty),\ |x-y| < \min\{\delta, 1\} \implies |f(x)-f(y)| < \varepsilon.$$

(c) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ y sea $\varepsilon > 0$. La hipótesis implica que existe $R > 0$ tal que si $|x| > R$ entonces $|f(x)| < \varepsilon/2$. Por otro lado, como la función es continua en el intervalo compacto $[-R,R]$, existe $\delta > 0$, que podemos suponer menor que R, tal que

$$x, y \in [-R,R],\ |x-y| < \delta \implies |f(x)-f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Si ahora x e y son dos elementos de $\mathbb{R}$ que están a distancia menor que δ y tales que $x < y$, entonces o bien están los dos en uno los intervalos $(-\infty,-R]$, $[-R,R]$ o $[R,+\infty)$, o bien $x \in (-\infty, -R]$ e $y \in [-R, R]$, o bien $x \in [-R, R]$ e $y \in [R, +\infty)$. En el primer caso tenemos que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/2 < \varepsilon$. En el segundo, que $|x - (-R)|$ y $|(-R) - y|$ son menores que δ, así que $|f(x)-f(y)| \leq |f(x)-f(-R)|+|f(-R)-f(y)| < \varepsilon/2+\varepsilon/2 = \varepsilon$, y en el tercero que $|x - R|$ y $|R - y|$ son menores que δ, de manera que

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(R)| + |f(R) - f(y)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Vemos así que

$$x, y \in \mathbb{R}, |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

y, por lo tanto, que f es uniformemente continua. □

16. Sea X un espacio métrico y sea A un subconjunto compacto de X. Si $f : A \to \mathbb{R}$ es una función continua y $f(x) > 0$ para todo $x \in A$, entonces existe $K > 0$ tal que $f(x) \geq K$ para todo $x \in A$.

Solución. Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función continua sobre el compacto A que toma valores positivos, consideremos el número $K = \inf\{f(x) : x \in A\}$. Si $K = 0$, entonces existe una sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ de elementos de A tal que $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0$: como A es compacto, hay una subsucesión $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ que converge a un punto x de A, y como f es continua, tenemos que $f(x) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k})) = 0$, lo que es absurdo. Esto nos dice que K es positivo. Como $f(x) \geq K$ para todo $x \in A$, esto prueba lo que queremos. □

17. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua y abierta.

(a) La función f no tiene extremos locales.

(b) Existen a, $b \in [-\infty, +\infty]$ tales que $f(\mathbb{R}) = (a, b)$.

(c) La función f es un homeomorfismo de $\mathbb{R}$ al intervalo (a, b) y ella y su inversa son funciones monótonas.

Solución. (a) Supongamos que f tiene un máximo local en $x \in \mathbb{R}$, de manera que existe $\varepsilon > 0$ tal que $f(x) \geq f(y)$ para todo $y \in B_\varepsilon(x)$. Esto implica que $f(B_\varepsilon(x))$ está contenido en $(-\infty, f(x)]$: como evidentemente contiene a $f(x)$, ese conjunto no es abierto. Esto es absurdo, ya que f es abierta y $B_\varepsilon(x)$ es abierto.

(b) Como f es continua y $\mathbb{R}$ conexo, el conjunto $f(\mathbb{R})$ es un conexo abierto de $\mathbb{R}$ y sabemos que los conexos abiertos son los intervalos abiertos.

(c) Si x e y son dos elementos de $\mathbb{R}$ tales que $x < y$, entonces $f(x) \neq f(y)$. En efecto, supongamos que, por el contrario, es $f(x) = f(y)$. Si m y M son el mínimo y el máximo de f en $[x, y]$, entonces existen u, $v \in [x, y]$ tales que $f(u) = m$ y $f(v) = M$. Si fuese $u \in (x, y)$, entonces f tendría un mínimo local en u; de la misma forma, si fuese $v \in (x, y)$, f tendría un máximo local en v. Vemos así que u, $v \in \{x, y\}$. Como $f(x) = f(y)$, esto implica que $m = M$ y, por lo tanto, que f es constante en $[x, y]$. Pero en particular esto nos dice que la imagen del abierto (x, y) por f tiene un único punto: esto es absurdo, ya que f es abierta.

Vemos así que si

$$A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < y, f(x) < f(y)\},$$

y

$$B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < y, f(x) > f(y)\},$$

entonces

$$A \cup B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < y\}.$$

Ahora bien, es claro de la definición de los conjuntos A y B y de la continuidad de f que se trata de abiertos y que son disjuntos. Como el conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < y\}$ es conexo tenemos que o bien coincide con A o bien coincide con B: esto significa que o bien f es estrictamente creciente o bien es estrictamente decreciente.

En particular, la correstricción $f : \mathbb{R} \to (a, b)$ es sobreyectiva e inyectiva: como es continua y abierta, se trata de un homeomorfismo. $\square$