Cálculo Avanzado

Segundo Cuatrimestre — 2019

Práctica 6: Conexión y arco-conexión

Conexión

1. (*a*) ¿Cuáles de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$ son conexos?

$$\{x \in \mathbb{R} : 0 < |x| < 2\}, \qquad \mathbb{N}, \qquad [0,1), \qquad \mathbb{Q}, \qquad \{\tfrac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}.$$

(*b*) Si X es un espacio métrico, $x \in X$ y $\varepsilon > 0$, ¿es conexa la bola $B_\varepsilon(x)$?

2. De ejemplos de dos conjuntos conexos de $\mathbb{R}^n$ que tengan *(i)* unión no conexa; *(ii)* intersección no conexa; *(iii)* diferencia no conexa. ¿Puede encontrar ejemplos con $n = 1$?

3. (*a*) Si C es un subconjunto conexo de $\mathbb{R}^n$ y x es un punto de acumulación de C, entonces $C \cup \{x\}$ es conexo.

(*b*) ¿Son ciertas las siguientes afirmaciones?

(*i*) El interior de un conjunto conexo es conexo.

(*ii*) La clausura de un conjunto conexo es conexa.

4. Sea X un espacio métrico y sea C un subconjunto de X. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(*i*) No existen abiertos no vacíos y disjuntos U y V de C tales que $C = U \cup V$.

(*ii*) No existen abiertos disjuntos U y V de X tales que $U \cap C \neq \varnothing$, $V \cap C \neq \varnothing$ y $C \subseteq U \cup V$.

(*iii*) Si A es un subconjunto no vacío de C que es abierto y cerrado en C, entonces $A = C$.

5. Sea X un espacio métrico. Si $\mathscr{A}$ es una familia de subconjuntos conexos de X tal que

> *cada vez que A y B son dos elementos de $\mathscr{A}$, existen $n \in \mathbb{N}_0$ y elementos $C_0, \dots, C_n$ de $\mathscr{A}$ tales que $A = C_0$, $B = C_n$ y para cada $i \in [\![n]\!]$ es $C_{i-1} \cap C_i \neq \varnothing$,*

entonces la unión $\bigcup_{A \in \mathscr{A}} A$ es conexa.

6. Una función continua $\mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ es constante.

7. Un espacio métrico X es conexo si y solo si toda función continua $X \to \{0,1\}$ es constante.

8. Si $n \geq 2$, entonces los espacios métricos $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^n$ no son homeomorfos.

9. (*a*) Una función continua $f : [0,1] \to [0,1]$ posee un punto fijo, esto es, existe $x \in [0,1]$ tal que $f(x) = x$.

(*b*) Sea X un espacio métrico, sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función continua y sean a y b dos elementos de $f(X)$ tales que $a \leq b$. Si X es conexo, entonces para todo $c \in [a,b]$ existe $x \in X$ tal que $f(x) = c$. ¿Es cierta la implicación recíproca?

(*c*) Un espacio métrico conexo con más de un punto es no numerable.

10. Encuentre las componentes conexas de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$ o $\mathbb{R}^2$:

$$\operatorname{arcsen}([\sqrt{2}/2, 1]), \qquad \mathbb{Q},$$
$$B_1((-1,0)) \cup B_1((1,0)), \qquad B_1((-1,0)) \cup B_1((1,0)) \cup \{(0,0)\}.$$

11. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $A_n = \{\frac{1}{n}\} \times [0,1]$ y sea

$$X = \{(0,0),(0,1)\} \cup \bigcup_{n\geq 1} A_n.$$

(*a*) Los conjuntos $\{(0,0)\}$ y $\{(0,1)\}$ son componentes conexas de X.

(*b*) Si B es un subconjunto abierto y cerrado de X, entonces o bien B contiene al conjunto $\{(0,0),(0,1)\}$ o es disjunto con él.

12. Las componentes conexas de un espacio métrico son cerradas. ¿Son abiertas?

13. Muestre que los siguientes conjuntos son totalmente desconexos:

(*a*) Un espacio métrico discreto con mas de 1 punto.

(*b*) $\mathbb{Q}$.

(*c*) El conjunto de Cantor.

Arco-conexión

Recordemos que un subconjunto A de un espacio métrico X es *arco-conexo* si no es vacío y cada vez que x e y son puntos de A existe una función continua $\sigma : [0,1] \to A$ tal que $\sigma(0) = x$ y $\sigma(1) = y$.

14. Un subconjunto arco-conexo de un espacio métrico es conexo, pero existen espacios conexos que no son arco-conexos.

15. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son arco-conexos?

(*a*) El gráfico $\Gamma_f = \{(x,y,f(x,y)) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$ de una función continua $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

(*b*) Los conjuntos $B_1(0)$ y $\mathbb{R}^n \setminus B_1(0)$.

(*c*) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\}$.

(*d*) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

16. Sea $f : X \to Y$ una función continua entre espacios métricos. Si X es arco-conexo, entonces $f(X)$ es un subconjunto arco-conexo de Y.

17. Un espacio métrico X es *localmente conexo* o *localmente arco-conexo* si cada vez que x es un punto de X y U un entorno de x en X existe un entorno V de x en X tal que $V \subseteq U$ y V es conexo o arco-conexo, respectivamente.

(a) $\mathbb{R}^n$ es localmente conexo y localmente arco-conexo.

(b) Un abierto de $\mathbb{R}$ es conexo si y solamente si es arco-conexo.

(c) Un espacio métrico es localmente conexo si y solamente si las componentes conexas de sus abiertos no vacíos son abiertas.

(d) Las componentes arco-conexas de un espacio métrico localmente arco-conexo son abiertas.

(e) Un espacio métrico conexo y localmente arco-conexo es arco-conexo.

(f) En un espacio métrico localmente arco-conexo todo abierto conexo es arco-conexo.

(g) Un espacio métrico es localmente conexo si y solamente si cada vez que x es un punto de X y U es un entorno *abierto* de x en X existe un entorno *abierto* V de x en X tal que $V \subseteq U$ y V es conexo.

18. Muestre que el conjunto

$$U = \{f \in C[0,1] : f(x) \neq 0 \text{ para todo } x \in [0,1]\}$$

es un abierto de $C[0,1]$ y encuentre sus componentes conexas.