CÁLCULO AVANZADO

Segundo Cuatrimestre — 2019

Práctica 6: Conexión y arco-conexión

Conexión

1. (*a*) ¿Cuáles de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$ son conexos?

$$\{x \in \mathbb{R} : 0 < |x| < 2\}, \qquad \mathbb{N}, \qquad [0,1), \qquad \mathbb{Q}, \qquad \{\tfrac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}.$$

(*b*) Si X es un espacio métrico, $x \in X$ y $\varepsilon > 0$, ¿es conexa la bola $B_\varepsilon(x)$?

Solución. (*a*) Tenemos que

$$\begin{aligned}
&\{x \in \mathbb{R} : 0 < |x| < 2\} = (-2,0) \cup (0,2),\\
&\mathbb{N} = \mathbb{N} \cap (-\infty, 1/2) \cup \mathbb{N} \cap (1/2, +\infty),\\
&\mathbb{Q} = \mathbb{Q} \cap (-\infty, \sqrt{2}) \cup \mathbb{Q} \cap (\sqrt{2}, +\infty),\\
&\{\tfrac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} = \{\tfrac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cap (0, 1/\sqrt{5}) \cup \{\tfrac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cap (1/\sqrt{5}, 2).
\end{aligned}$$

así que cada uno de esos conjuntos es desconexo. Por otro lado, la función

$$t \in \mathbb{R} \mapsto 1 - \frac{1}{1+t^2} \in \mathbb{R}$$

es continua y tiene por imagen al intervalo $[0,1)$, así que este último es conexo.

(*b*) Depende del espacio, del punto y del radio de la bola! Por ejemplo, en un espacio con métrica discreta y con más de un punto una bola abierta es conexa si y solamente si su radio es menor o igual a 1. Por otro lado, en $\mathbb{R}^n$ toda bola es conexa. □

2. De ejemplos de dos conjuntos conexos de $\mathbb{R}^n$ que tengan *(i)* unión no conexa; *(ii)* intersección no conexa; *(iii)* diferencia no conexa. ¿Puede encontrar ejemplos con $n = 1$?

Solución. Los intervalos $(0,1)$ y $(1,2)$ son conexos, pero $(0,1) \cup (1,2)$ no es conexo.

Si $\phi : t \in \mathbb{R} \mapsto (\cos t, \sin t) \in \mathbb{R}^2$, entonces los conjuntos $\phi([0,\pi])$ y $\phi([\pi, 2\pi])$ son conexos, pero su intersección $\{\phi(0), \phi(\pi)\}$ no lo es. Finalmente, $\mathbb{R}^2$ y $X = \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\}$ son conexos de $\mathbb{R}^2$, pero la diferencia $\mathbb{R}^2 \setminus X$ no lo es.

No hay ejemplos para *(ii)* y *(iii)* en $\mathbb{R}$. Para verlo, mostremos primero que

un subconjunto no vacío y conexo de $\mathbb{R}$ es un intervalo posiblemente degenerado.

En efecto, supongamos que A es un subconjunto no vacío y conexo de $\mathbb{R}$ y sean

$$a = \inf A \in [-\infty, +\infty), \qquad b = \sup A \in (-\infty, +\infty].$$

Si x es un elemento de $\mathbb{R}$ tal que $a < x < b$, entonces existen $y, z \in A$ tales que $y < x < z$

Si x no fuera un elemento de A, entonces las intersecciones $A \cap (-\infty, x)$ y $A \cap (x, +\infty)$ serían entonces no vacías, abiertas en A y con unión igual a A, lo que es imposible. Vemos de esta forma que $(a, b) \subseteq A$. La elección de a y b implica que además $A \subseteq [a, b]$, así que A es alguno de los conjuntos (a, b), $[a, b)$, $(a, b]$ o $[a, b]$.

Ahora bien, como la intersección de dos intervalos es un intervalo y la diferencia de dos intervalos es un intervalo, vemos que, como dijimos, no hay ejemplos para *(ii)* o *(iii)* en $\mathbb{R}$. □

3. (a) Si C es un subconjunto conexo de $\mathbb{R}^n$ y x es un punto de acumulación de C, entonces $C \cup \{x\}$ es conexo.

(b) ¿Son ciertas las siguientes afirmaciones?

(i) El interior de un conjunto conexo es conexo.

(ii) La clausura de un conjunto conexo es conexa.

Solución. (a) Sea C un subconjunto conexo de $\mathbb{R}^n$, sea x un punto de acumulación de C, sea $D := C \cup \{x\}$ y supongamos que hay dos abiertos A y B de D no vacíos, disjuntos y tales que $A \cup B = D$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $x \in A$. Como $C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ y los conjuntos $A \cap C$ y $B \cap C$ son abiertos disjuntos de C, que C sea conexo implica que o bien $C \subseteq A$ o bien $C \subseteq B$. La segunda posibilidad no puede ocurrir: como A es un abierto de D, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon^D(x) \subseteq A$ y, por lo tanto, si $C \subseteq B$ es $B_\varepsilon(x) \cap C \subseteq B_\varepsilon(x) \cap B \subseteq B_\varepsilon^D(x) \cap B \subseteq A \cap B = \varnothing$, lo que es absurdo, ya que $x \in \overline{C}$.

Vemos así que $C \subseteq A$ y, en definitiva, que $D \subseteq A$. Esto prueba que D es conexo.

(b) La primera de las dos afirmaciones del enunciado no es cierta: en $\mathbb{R}^2$ el conjunto $\overline{B}_1((-1,0)) \cup \overline{B}_1((1,0))$ es conexo — cada una de las dos bolas cerradas es conexa y esas bolas tienen intersección no vacía — pero su interior $B_1(-1,0) \cup B_1(1,0)$ no lo es. Veamos que la segunda sí es cierta.

Sea X un espacio métrico, sea C un subconjunto conexo de X y sean A y B dos abiertos disjuntos de $\overline{C}$ tales que $A \cup B = \overline{C}$. Como $(A \cap C)$ y $(B \cap C)$ son abiertos disjuntos de C cuya unión es C, uno de los dos coincide con C: sin pérdida de generalidad podemos suponer entonces que $C \subseteq A$. Sea ahora $x \in \bar{C}$ y supongamos que $x \in B$. Como B es abierto en $\bar{C}$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $C \cap B_\varepsilon(x) \subseteq \bar{C} \cap B_\varepsilon(x) = B_\varepsilon^{\bar{C}}(x) \subseteq B$ y entonces $C \cap B_\varepsilon(x) = C \cap B_\varepsilon(x) \cap A \subseteq B \cap A = \varnothing$: esto es absurdo, ya que $x \in \overline{C}$. Vemos así que $\overline{C} \subseteq A$ y, en definitiva, que $\overline{C}$ es conexo. □

4. Sea X un espacio métrico y sea C un subconjunto de X. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) No existen abiertos no vacíos y disjuntos U y V de C tales que $C = U \cup V$.

(ii) No existen abiertos disjuntos U y V de X tales que $U \cap C \neq \varnothing$, $V \cap C \neq \varnothing$ y $C \subseteq U \cup V$.

(iii) Si A es un subconjunto no vacío de C que es abierto y cerrado en C, entonces $A = C$.

Solución. $(i \Rightarrow ii)$ Si U y V son abiertos disjuntos de X tales que $U \cap C \neq \varnothing$, $V \cap C \neq \varnothing$ y $C \subseteq U \cap B$, entonces $U' = U \cap C$ y $V' = V \cap C$ son abiertos disjuntos y no vacíos de C tales que $U' \cup V' = C$. Esto muestra que si no vale (ii) no vale (i).

($ii \Rightarrow i$) Supongamos que (i) no vale. Sean U y V dos abiertos no vacíos y disjuntos de C tales que $C = U \cap V$. Como son cerrados en C, existen cerrados F y G de X tales que $F \cap C = U$ y $F \cap C = V$, y esto implica que $\overline{U} \cap V \subseteq F \cap V \subseteq F \cap C \cap V = U \cap V = \varnothing$ y, de manera similar, que $U \cap \overline{V} = \varnothing$. Sean d_U, $d_V : X \to \mathbb{R}$ las funciones distancia a U y a V, respectivamente. Sean $\tilde{U} = \{x \in \mathbb{R} : d_U(x) < d_V(x)\}$ y $\tilde{V} = \{x \in \mathbb{R} : d_U(x) > d_V(x)\}$. Se trata de abiertos, porque las funciones d_U y d_V son continuas, y son claramente disjuntos. Si $x \in U$, entonces $d_U(x) = 0$ y $d_V(x) > 0$ porque $x \notin \overline{V}$, así que $U \subseteq \tilde{U}$; de la misma forma, $V \subseteq \tilde{V}$, y entonces $C \subseteq \tilde{U} \cup \tilde{V}$. Es $\tilde{U} \cap C \supseteq U \cap C = U \neq \varnothing$ y $\tilde{V} \cap C \supseteq V \cap C = V \neq \varnothing$. Esto nos dice que ($ii$) no vale.

($i \Rightarrow iii$) Supongamos que vale (i) y sea A un subconjunto no vacío de C que es abierto y cerrado en C. Entonces $C \setminus A$ es un abierto de C disjunto de A y tal que $A \cup (C \setminus A) = C$: la hipótesis implica que $C \setminus A = \varnothing$, es decir, que $A = C$.

($iii \Rightarrow i$) Sean U y V dos abiertos disjuntos de C tales que $C = U \cap V$ y supongamos que $U \neq \varnothing$. El conjunto $U = C \setminus V$ es entonces también cerrado y la hipótesis (iii) implica que $U = C$, es decir, que V es vacío. □

5. Sea X un espacio métrico. Si $\mathscr{A}$ es una familia de subconjuntos conexos de X tal que

> *cada vez que A y B son dos elementos de $\mathscr{A}$, existen $n \in \mathbb{N}_0$ y elementos $C_0, \dots, C_n$ de $\mathscr{A}$ tales que $A = C_0$, $B = C_n$ y para cada $i \in [\![n]\!]$ es $C_{i-1} \cap C_i \neq \varnothing$,*

entonces la unión $\bigcup_{A \in \mathscr{A}} A$ es conexa.

Solución. Basta mostrar que todo par de puntos de $Y = \bigcup_{A \in \mathscr{A}} A$ está contenido en un subconjunto conexo. Sean entonces x e y dos puntos de Y y sean A y B dos elementos de $\mathscr{A}$ tales que $x \in A$ e $y \in B$. Por hipótesis, existen $n \in \mathbb{N}_0$ y $C_0, \dots, C_n$ en $\mathscr{A}$ tales que $A = C_0$, $B = C_n$ y para cada $i \in [\![n]\!]$ es $C_{i-1} \cap C_i \neq \varnothing$. Queremos mostrar que $\bigcup_{i=0}^n C_i$ es un conexo que contiene a x y a y. Que contiene a los dos puntos es evidente, ya que contiene a A y a B, así que solo hay que probar que es conexo. Mostremos entonces que

> *si $n \in \mathbb{N}_0$ y $C_0, \dots, C_n$ son elementos de $\mathscr{A}$ tales que $C_{i-1} \cap C_i \neq \varnothing$ para cada $i \in [\![n]\!]$, entonces la unión $\bigcup_{i=0}^n C_i$ es conexa.*

Lo hacemos por inducción con respecto a n. Si $n = 0$, esto es claro, ya que los elementos de $\mathscr{A}$ son conexos. Por otro lado, si $n > 0$, entonces la hipótesis inductiva evidente implica que $\bigcup_{i=0}^{n-1} C_i$ es conexo. Como este conjunto se interseca con el conexo C_n en por lo menos los puntos de $C_{n-1} \cap C_n$, tenemos que $\bigcup_{i=0}^n C_i = C_n \cup \bigcup_{i=0}^{n-1} C_i$ es conexo. Esto completa la inducción. □

6. Una función continua $\mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ es constante.

Solución. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ una función continua. Como $\{f(0)\}$ y $\mathbb{Z} \setminus \{f(0)\}$ son abiertos disjuntos de $\mathbb{Z}$ con unión $\mathbb{Z}$ y la función es continua, los conjuntos $f^{-1}(\{f(0)\})$ y $f^{-1}(\mathbb{Z} \setminus \{f(0)\})$ son abiertos disjuntos de $\mathbb{R}$ con unión $\mathbb{R}$. El primero no es vacío, ya que contiene a 0, así que, como $\mathbb{R}$ es un espacio métrico conexo, el segundo tiene que ser vacío: como se trata del conjunto $\{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq f(0)\}$, vemos que f es constante de valor $f(0)$. □

7. Un espacio métrico X es conexo si y solo si toda función continua $X \to \{0,1\}$ es constante.

Solución. Supongamos primero que X es conexo y sea $f : X \to \{0,1\}$ una función continua. Como $\{0\}$ y $\{1\}$ son abiertos disjuntos de $\{0,1\}$ que lo cubren, $f^{-1}(0)$ y $f^{-1}(1)$ son abiertos disjuntos de X que lo cubren: alguno de los dos tiene que ser vacío, porque X es conexo, y esto claramente implica que f es constante.

Supongamos ahora que toda función continua $X \to \{0,1\}$ es constante y sean A y B dos abiertos disjuntos de X que lo cubren. Hay por lo tanto una función $f : X \to \{0,1\}$ tal que para todo $x \in X$ es

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in A; \\ 1 & \text{si } x \in B. \end{cases}$$

Más aún, esta función es continua, porque sus restricciones a los abiertos del cubrimiento abierto $\{A, B\}$ lo son. La hipótesis, entonces, nos dice que f es constante, esto es, que alguno de A o B es vacío. □

8. Si $n \geq 2$, entonces los espacios métricos $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^n$ no son homeomorfos.

Solución. Supongamos que hay un homeomorfismo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$. El intervalo $I = (0,1)$ tiene la propiedad de que es conexo y que existe $x \in I$ tal que $I \setminus \{x\}$ no es conexo. El conjunto $U = f(I)$ es por lo tanto un abierto de $\mathbb{R}^n$ conexo y para el que existe $x \in U$ con $U \setminus \{x\}$ no conexo. Existe entonces una función $g : U \setminus \{x\} \to \{0,1\}$ que es continua y no constante. Como U es abierto, existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(x) \subseteq U$. El conjunto $B^*_\delta(x)$ es conexo, así que la restricción $g|_{B^*_\delta(x)}$ es constante: sea u su valor allí. Es claro que $\lim_{y \to x} g(y) = u$, así que la función $h : U \to \{0,1\}$ tal que $h(x) = u$ y $h(y) = g(y)$ para todo $y \in U \setminus \{x\}$ es continua. Claramente no es constante, porque g no lo es: esto es absurdo, porque U es conexo.

Observemos que para poder hacer esto necesitamos saber que

para todo $\delta > 0$ y todo $x \in \mathbb{R}^n$ el conjunto $B^*_\delta(x)$ es conexo.

Es fácil probarlo. Sean y y z dos puntos distintos de $B^*_\delta(x)$. Si $y - x$ y $z - x$ son linealmente independientes, entonces la función

$$\gamma : t \in [0,1] \mapsto ty + (1-t)z \in \mathbb{R}^n$$

toma valores en $B^*_\delta(x)$: en efecto, si tuviéramos que $\gamma(t) = x$ para algún $t \in [0,1]$, entonces

$$0 = x - x = (ty + (1-t)z) + (tx + (1-t)x) = t(y-x) + (1-t)(z-x),$$

lo que es absurdo, porque estamos suponiendo que $y - x$ y $z - x$ son linealmente independientes. Por otro lado, para cada $t \in [0,1]$ es

$$\begin{aligned} d(\gamma(t), x) &= |ty + (1-t)z - x| = |t(y-x) + (1-t)(z-x)| \\ &\leq t|y-x| + (1-t)|z-x| < t\delta + (1-t)\delta = \delta. \end{aligned}$$

Como γ es continua, vemos que que y y z están en la misma componente conexa de $B^*_\delta(x)$.

Por otro lado, si $y-x$ y $z-x$ son linealmente dependientes existe $w \in \mathbb{R}^n$ que es linealmente independiente de los dos, ya que $n \geq 2$, y, sin pérdida de generalidad, podemos elegirlo de manera que $\|w\| < \delta$, de manera que $u = w + x \in B^*_\delta(x)$. Como $y-x$ y $u-x$, por un lado, y $z-x$ y $u-x$, por otro, son linealmente independientes, lo que ya hicimos muestra que y y u, por un lado, y z y u, por otro, están en la misma componente conexa de $B^*_\delta(x)$: por supuesto, esto implica que y y z están en la misma componente conexa de $B^*_\delta(x)$. □

9. (a) Una función continua $f : [0,1] \to [0,1]$ posee un punto fijo, esto es, existe $x \in [0,1]$ tal que $f(x) = x$.

(b) Sea X un espacio métrico, sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función continua y sean a y b dos elementos de $f(X)$ tales que $a \leq b$. Si X es conexo, entonces para todo $c \in [a,b]$ existe $x \in X$ tal que $f(x) = c$. ¿Es cierta la implicación recíproca?

(c) Un espacio métrico conexo con más de un punto es no numerable.

Solución. (a) Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una función continua. Si $f(x) \neq x$ para todo $x \in [0,1]$, entonces los conjuntos $U = \{x \in [0,1] : f(x) < x\}$ y $V = \{x \in [0,1] : f(x) > x\}$, que son abiertos y disjuntos, cubren $[0,1]$: esto es absurdo, porque $[0,1]$ es conexo.

(b) Supongamos que X es conexo y sea $c \in [a,b]$. Si $c \notin f(X)$, entonces tenemos que los conjuntos $U = f(X) \cap (-\infty, c)$ y $V = f(X) \cap (c, +\infty)$ son abiertos disjuntos de $f(X)$ con $f(X) = U \cup V$. Ambos abiertos son no vacíos, ya que $a \in U$ y $b \in V$: esto es absurdo, porque $f(X)$ es conexo.

La implicación recíproca no es cierta. Por ejemplo, cualquier función constante $f : X \to \mathbb{R}$ con dominio un espacio métrico desconexo da un ejemplo.

(c) Sea X un espacio métrico conexo con al menos dos puntos distintos x e y. La función $f : z \in X \mapsto d(f, x) \in \mathbb{R}$ es continua y no constante, ya que tenemos por supuesto que $f(x) = 0 \neq d(x,y) = f(y)$. La imagen de f es, por lo tanto, un conexo de $\mathbb{R}$ con más de un punto, así que no es numerable: X no puede ser entonces numerable. □

10. Encuentre las componentes conexas de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$ o $\mathbb{R}^2$:

$$\operatorname{arcsen}([\sqrt{2}/2, 1]), \qquad \mathbb{Q},$$

$$B_1((-1,0)) \cup B_1((1,0)), \qquad B_1((-1,0)) \cup B_1((1,0)) \cup \{(0,0)\}.$$

Solución. (a) La imagen de un conexo por una función continua es conexa, así que el conjunto del enunciado es conexo.

(b) Si C es un subconjunto de $\mathbb{Q}$ que tiene al menos dos puntos distintos x e y y, sin pérdida de generalidad, $x < y$, entonces hay un número irracional ξ tal que $x < \xi < y$ y los conjuntos $C \cap (-\infty, \xi)$ y $C \cap (\xi, +\infty)$ son abiertos disjuntos de C que lo cubren: vemos así que C no es conexo.

La conclusión de esto es que los únicos conexos de $\mathbb{Q}$ son los conjuntos con exactamente un punto y, por lo tanto, esas son sus componentes conexas.

(c) Los conjuntos $U = B_1((-1,0))$ y que $V = B_1((1,0))$ son conexos y disjuntos, y $U \cup V$ es el espacio del enunciado, así que son sus componentes conexas.

(d) Sabemos que los conjuntos $U = B_1((-1,0))$ y que $V = B_1((1,0))$ son conexos, y $x = \{(0,0)\}$ está en la clausura de ambos. De acuerdo al Ejercicio **3**(a), $U \cup \{x\}$ y $V \cup \{x\}$ son conexos. Como tienen intersección no vacía, su unión $U \cup V \cup \{x\}$, el conjunto del enunciado, es conexo. □

11. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $A_n = \{\frac{1}{n}\} \times [0,1]$ y sea

$$X = \{(0,0),(0,1)\} \cup \bigcup_{n \geq 1} A_n.$$

(a) Los conjuntos $\{(0,0)\}$ y $\{(0,1)\}$ son componentes conexas de X.

(b) Si B es un subconjunto abierto y cerrado de X, entonces o bien B contiene al conjunto $\{(0,0),(0,1)\}$ o es disjunto con él.

Solución. (a) Es claro que $\{(0,0)\}$ es conexo. Veamos que se trata de un conjunto maximal con esa propiedad. Sea U un conexo de X que contiene a $(0,0)$ y sea $f : X \to \mathbb{R}$ la proyección en la primera coordenada. Como f es continua y $(0,0) \in U$, $f(U)$ es un conexo de $\mathbb{R}$ que contiene a 0. Ahora bien, la imagen de f es el conjunto $\{0\} \cup \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ y la componente de 0 en él es $\{0\}$. Esto significa que $f(U) \subseteq \{0\}$ y, por lo tanto, que $U \subseteq \{(0,0),(0,1)\}$. Como U es conexo, debe ser $U = \{(0,0)\}$.

El mismo argumento se aplica a $\{(0,1)\}$, por supuesto.

(b) Sea ahora B un subconjunto de X que es abierto y cerrado y supongamos que contiene a $(0,0)$. Como es abierto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon^X((0,0)) \subseteq B$ y, por lo tanto, si $n \in \mathbb{N}$ es tal que $1/n < \varepsilon$, tenemos que $(0,1/n) \in B$. Vemos así que B interseca no trivialmente a A_n y, por lo tanto, como A_n es conexo y B es abierto y cerrado en X, que $A_n \subseteq B$. En particular, $(1/n,1) \in B$. La conclusión de esto es que $(1/n,1)$ está en B para todo $n \in \mathbb{N}$ tal que $1/n < \varepsilon$ y, como B es cerrado, que $(0,1)$ está en B.

Esto muestra que si $(0,0)$ está en B, entonces $(0,1)$ también está en B, y la recíproca puede probarse de la misma forma. La afirmación que queremos probar es consecuencia inmediata de esto. □

12. Las componentes conexas de un espacio métrico son cerradas. ¿Son abiertas?

Solución. Sea X un espacio métrico y sea C una de sus componentes conexas, esto es, un subconjunto conexo maximal de X. Como $\overline{C}$ es conexo y contiene a C, debe ser $C = \overline{C}$, esto es, C debe ser cerrado.

En general, las componentes conexas de un espacio métrico no son abiertas: por ejemplo, las componentes conexas de $\mathbb{Q}$ tienen exactamente un punto todas y, por lo tanto, ninguna de ellas es abierta. Es cierto, sin embargo, que son abiertas cuando son finitas: al ser finitas y cerradas, la unión de todas salvo una de ellas es un cerrado y, por lo tanto, el complemente de esa unión, que es la componente restante, es abierto. □

13. Muestre que los siguientes conjuntos son totalmente desconexos:

(a) Un espacio métrico discreto con mas de 1 punto.

(b) $\mathbb{Q}$.

(c) El conjunto de Cantor.

Solución. (a) Todo subconjunto de un espacio métrico discreto es él mismo discreto, así que para ver que los únicos conexos de un espacio métrico discreto son los conjuntos que tienen exactamente un punto es suficiente con mostrar que un espacio métrico discreto conexo tiene un solo punto.

Sea entonces X un espacio métrico discreto y conexo. Sea $x \in X$ y sea $f : X \to \{0, 1\}$ la función tal que $f(x) = 1$ y $f(y) = 0$ para todo $y \in X \setminus \{x\}$. Esta función es continua: como X es conexo, tiene que ser constante y claramente esto significa que $X \setminus \{x\} = \varnothing$, esto es, que es $X = \{x\}$.

(b) Queremos probar que las componentes conexas de $\mathbb{Q}$ tienen exactamente un punto y para eso es suficiente con ver que un subconjunto de $\mathbb{Q}$ con más de un punto no es conexo.

Sea A un subconjunto de $\mathbb{Q}$ y supongamos que x e y son dos elementos distintos de A con $x < y$. Sea ξ un número irracional tal que $x < \xi < y$ y sean $U = A \cap (-\infty, \xi)$ y $V = A \cap (\xi, +\infty)$. Se trata de dos abiertos no vacíos disjuntos de A tales que $U \cup V = A$, así que A no es conexo.

(c) Sea K el conjunto de Cantor y sea A un subconjunto de K con al menos dos puntos distintos x e y. Sin pérdida de generalidad suponemos que $x < y$. Sean $x = 0.x_1x_2\ldots$ e $y = 0.y_1y_2\ldots$ los desarrollos ternarios de x y de y que no usan el dígito 1. Supongamos que $n \in \mathbb{N}$ es tal que $x_i = y_i$ para todo $i \in [\![n-1]\!]$ y que $x_n = 0$, $y_n = 2$, y sea $\xi = 0.x_1x_2\ldots x_{n-1}1$ en base 3. Es $x < \xi < y$ y $\xi \notin K$. Los conjuntos $A \cap (-\infty, \xi)$ y $A \cap (\xi, +\infty)$ son entonces dos abiertos no vacíos y disjuntos de A que lo cubren. $\square$

Arco-conexión

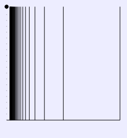
Recordemos que un subconjunto A de un espacio métrico X es *arco-conexo* si no es vacío y cada vez que x e y son puntos de A existe una función continua $\sigma : [0, 1] \to A$ tal que $\sigma(0) = x$ y $\sigma(1) = y$.

14. Un subconjunto arco-conexo de un espacio métrico es conexo, pero existen espacios conexos que no son arco-conexos.

Solución. Sea X un espacio métrico y sea A un subconjunto no vacío arco-conexo de X. Para cada a, $b \in A$ existe una función continua $f_a : [0, 1] \to A$ que tiene a a y a b en su imagen: como $[0, 1]$ es conexo, $f([0, 1])$ es conexo. Vemos así que todo par de puntos de A está contenido en un conexo contenido en A y, por lo tanto, que A es conexo.

Veamos ahora que hay espacios conexos que no son arco-conexos. Consideremos en $\mathbb{R}^2$ el subconjunto

$$X := \{(0, 1)\} \cup [0, 1] \times \{0\} \cup \bigcup_{n \geq 1} \{\tfrac{1}{n}\} \times [0, 1].$$



Su subespacio

$$Y = [0, 1] \times \{0\} \cup \bigcup_{n \geq 1} \{\tfrac{1}{n}\} \times [0, 1].$$

es arco-conexo — el conjunto $[0, 1] \times \{0\}$ y cada uno de los conjuntos $\{1/n\} \times [0, 1]$ con $n \in \mathbb{N}$ es evidentemente arco-conexo y todos ellos intersecan al primero— así que es conexo. Como $(0,1)$ está en la clausura de Y, X también es conexo. Veamos que X no es arco-conexo. Supongamos que $f : [0,1] \to X$ es una función continua tal que $f(0) = (0,1)$, sea

$$D \coloneqq \{\delta \in [0,1] : \forall t \in [0,\delta], f(t) = (0,1)\}$$

y sea $T \coloneqq \sup D$. Como f es continua, es claro que $f(T) = (0,1)$. Supongamos que $T < 1$. Como f es continua, existe $\delta > 0$ tal que $[T, T+\delta) \subseteq [0,1]$ y

$$t \in [T, T+\delta) \implies d(f(t),(0,1)) < \tfrac{1}{2}.$$

Supongamos que existe $t \in [T, T+\delta)$ tal que $\pi_1(f(t)) > 0$: entonces hay un número irracional ζ tal que $0 < \zeta < \pi_1(f(t))$ y tiene que existir $s \in [T, T+\delta)$ tal que $\pi_1(f(s)) = \zeta$. Pero $X \cap B_{1/2}((0,1)) \cap \{\zeta\} \times \mathbb{R} = \varnothing$.

Vemos así que para todo $t \in [T, T+\delta)$ es $\pi_1(f(t)) = 0$ y, por lo tanto, $f(t)$ es $(0,0)$ o $(0,1)$. Como $[T, T+\delta)$ es conexo y $f(T) = (0,1)$, tenemos que, de hecho, $f(t) = (0,1)$ para todo $t \in [T, T+\delta)$. La elección de T implica entonces que $f(t) = (0,1)$ para todo $t \in [0, T+\delta/2]$, de manera que $T + \delta/2 \in D$: esto contradice la elección de T.

Vemos así que $T = 1$ y, por lo tanto, que la función f es constante de valor $(0,1)$. Esto significa que la componente arco-conexa de $(0,1)$ en X tiene un único punto. El espacio X no es, en consecuencia, arco-conexo. □

15. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son arco-conexos?

(a) El gráfico $\Gamma_f = \{(x,y,f(x,y)) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$ de una función continua $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

(b) Los conjuntos $B_1(0)$ y $\mathbb{R}^n \setminus B_1(0)$.

(c) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\}$.

(d) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Solución. (a) Sean p y q dos puntos de Γ_f, de manera que existen (x,y) y (x',y') en $\mathbb{R}^2$ tales que $p = (x,y,f(x,y))$ y $q = (x',y',f(x',y'))$. La función

$$\gamma : t \in [0,1] \mapsto ((1-t)x + tx', (1-t)y + ty', f((1-t)x + tx', (1-t)y + ty')) \in \Gamma_f$$

es claramente continua y tiene $\gamma(0) = p$ y $\gamma(1) = q$. El conjunto Γ_f es, por lo tanto, arco-conexo.

(b) Si $x \in B_1(0)$, entonces la función $\gamma : t \in [0,1] \mapsto tx \in B_1(0)$ es continua y tiene $\gamma(0) = 0$ y $\gamma(1) = x$. Todos los puntos de $B_1(0)$ están por lo tanto en la componente arco-conexa de 0 y, por lo tanto, $B_1(0)$ es arco-conexo.

Sea ahora $X = \mathbb{R}^n \setminus B_1(0)$ con $n \geq 2$. Si $x \in X$ e $y = 2x/\|x\|$, entonces la función

$$\gamma : t \in [0,1] \mapsto (1-t)x + ty \in \mathbb{R}^n$$

es continua y tiene imagen en X. En efecto,

$$\|(1-t)x + ty\| = \left\|\left((1-t) + \frac{2t}{\|x\|}\right)x\right\| = \left|(1-t) + \frac{2t}{\|x\|}\right|\|x\| = |(1-t)\|x\| + 2t|$$

y esto es mayor que 1, porque está entre $\|x\|$, que es mayor que 1, y 2. Como $\gamma(0) = x$

y $\|\gamma(1)\| = 2$, vemos que todo punto de X se puede conectar con una curva contenida en X con un punto de $S = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 2\}$.

Para probar que X es arco-conexo, entonces, es suficiente que mostremos que S es arco-conexo. Ahora bien, S es la unión de los conjuntos $S_+ := \{x \in S : x_1 \geq 0\}$ y $S_- := \{x \in S : x_1 \geq 0\}$ y estos dos conjuntos se intersecan no trivialmente, así que es suficiente que mostremos que S_+ y S_- son arco-conexos.

Sea $B := \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| \leq 2\}$ y sea

$$f : (x, y) \in B \mapsto (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2} \in \mathbb{R}^3.$$

Esta función es continua y tiene imagen igual a S_+: como B es arco-conexo, esto implica que S_+ es arco-conexo. De la misma forma podemos ver que S_- es arco-conexo.

(c) Sea $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$. Los puntos e_2 y $-e_2$ están en X. Supongamos que hay una curva $\gamma : [0, 1] \to X$ tal que $\gamma(0) = e_2$ y $\gamma(1) = -e_2$. La composición $\pi_2 \circ \gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}$ es continua y vale 1 y -1 en 0 y en 1, respectivamente, así que existe $t \in [0, 1]$ tal que $\pi_1(\gamma(t)) = 0$: esto es absurdo, porque entonces $\gamma(t) \in \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$.

(d) Sea $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Sean x e y dos puntos de X. Si $y \notin \mathbb{R}_{<0}x$ (observemos que esta condición se cumple si, por ejemplo, x e y son linealmente independientes), entonces la función

$$f : t \in [0, 1] \mapsto (1 - t)x + ty \in \mathbb{R}^2$$

toma valores en X. En efecto, si $t \in [0, 1]$ fuese tal que $\gamma(t) = 0$, tendríamos que $(1-t)x+ty = 0$: como $x \neq 0$ e $y \neq 0$, es $t \in (0, 1)$, y, por lo tanto, $y = -(1-t)x/t \in \mathbb{R}_{<0}x$, lo que es absurdo. Como f es continua y $f(0) = x$ y $f(1) = y$, vemos que x e y están en la misma componente arco-conexa.

Supongamos ahora que $y = -\lambda x$ con $\lambda > 0$. Como $\mathbb{R}^2$ tiene dimensión 2 y $x \neq 0$, existe $z \in X$ tal que x y z son linealmente independientes; es claro que y y z son también linealmente independientes. Lo que ya hicimos nos dice que x y z están en la misma componente arco-conexa y que y y z están en la misma componente arco-conexa: vemos así que también en este caso x e y están en la misma componente arco-conexa. □

16. Sea $f : X \to Y$ una función continua entre espacios métricos. Si X es arco-conexo, entonces $f(X)$ es un subconjunto arco-conexo de Y.

Solución. Supongamos que X es arco-conexo y sean y e y' dos puntos de $f(X)$, de manera que existen dos puntos x y x en X tales que $y = f(x)$ e $y' = f(x')$. Como el espacio X es arco-conexo, existe una función continua $\gamma : [0, 1] \to X$ tal que $\gamma(0) = x$ y $\gamma(1) = x'$. La composición $\sigma := f \circ \gamma : [0, 1] \to Y$ es continua, su imagen está contenida en $f(X)$ y tiene $\sigma(0) = y$ y $\sigma(1) = y'$. Vemos así que $f(Y)$ es un subconjunto arco-conexo de Y, como queremos. □

17. Un espacio métrico X es *localmente conexo* o *localmente arco-conexo* si cada vez que x es un punto de X y U un entorno de x en X existe un entorno V de x en X tal que $V \subseteq U$ y V es conexo o arco-conexo, respectivamente.

(a) $\mathbb{R}^n$ es localmente conexo y localmente arco-conexo.

(b) Un abierto de $\mathbb{R}$ es conexo si y solamente si es arco-conexo.

(c) Un espacio métrico es localmente conexo si y solamente si las componentes conexas de sus abiertos no vacíos son abiertas.

(d) Las componentes arco-conexas de un espacio métrico localmente arco-conexo son abiertas.

(e) Un espacio métrico conexo y localmente arco-conexo es arco-conexo.

(f) En un espacio métrico localmente arco-conexo todo abierto conexo es arco-conexo.

(g) Un espacio métrico es localmente conexo si y solamente si cada vez que x es un punto de X y U es un entorno *abierto* de x en X existe un entorno *abierto* V de x en X tal que $V \subseteq U$ y V es conexo.

Solución. (a) Basta probar que toda bola abierta de $\mathbb{R}^n$ es arco-conexa y esto es claro, ya que es convexa.

(b) Sea U un abierto no vacío de $\mathbb{R}^n$. Si U es arco-conexo, entonces es conexo. Supongamos, para probar la recíproca, que U es conexo. Queremos probar que U es arco-conexo: para eso es suficiente con mostrar que sus componentes arco-conexas son abiertas, ya que esas componentes dan entonces una partición abierta de U y, como U es conexo, esa partición solo puede tener una parte.

Sea entonces V una componente arco-conexa de U y sea $x \in V$. Como U es abierto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(x) \subseteq U$. Como la bola $B_\varepsilon(x)$ es arco-conexa, está contenida en U e interseca a V, tenemos que $B_\varepsilon(x) \subseteq V$. Esto prueba que x es un punto interior de V y, por lo tanto, que V es abierto.

(c) Sea X un espacio métrico localmente conexo, sea U un abierto de X y sea C una componente conexa de U. Si $x \in C$, entonces $x \in U$ y, como X es localmente conexo y U es un entorno de x, existe un entorno conexo V de x contenido en U: como V es conexo, está contenido en U e interseca a C, vemos que está totalmente contenido en C. Esto muestra que $x \in V \subseteq C$ y, por lo tanto, que x es un punto interior de C. Concluimos así que C es un abierto de X y, en definitiva, que toda componente conexa de un abierto de X es conexa.

Para probar la recíproca, supongamos que X es un espacio métrico con la propiedad de que las componentes conexas de todo abierto no vacío son abiertas y sean x un punto de X y U un entorno de x en X. Si V es la componente conexa de x en U°, entonces por supuesto $x \in V$ y la hipótesis nos dice que V es abierto: como V está contenido en U y es conexo, vemos que X es localmente conexo.

(d) Sea X un espacio métrico localmente arco-conexo, sea C una componente arco-conexa de X y sea $x \in C$. Como X es localmente arco-conexo, x posee un entorno arco-conexo U y tiene que ser que $U \subseteq C$, porque C es el máximo subconjunto arco-conexo de X que contiene a x. Vemos así que x es interior a su componente arco-conexa C y, en definitiva, que esta última es abierta.

(e) Sea X un espacio métrico conexo y localmente arco-conexo. En vista de la parte (d), las componentes arco-conexas de X nos dan una partición de X por abiertos: como X es conexo, esta partición solo puede tener una parte y, por lo tanto, X es arco-conexo.

(f) En vista de la parte (e), para probar que en un espacio métrico localmente arco-conexo todo abierto conexo es arco-conexo es suficiente con mostrar que en un espacio métrico localmente arco-conexo todo abierto es localmente arco-conexo.

Sea entonces X un espacio localmente arco-conexo, sea U un abierto de X, sea $x \in U$ y sea V un entorno de x en U. Como U es abierto, V es también un entorno de x en X y, ya que X es localmente arco-conexo, existe un entorno conexo W de x en X tal que $W \subseteq V$. Como W es un entorno de x en U, esto prueba lo que queremos.

(g) La suficiencia de la condición es evidente. Para probar la necesidad, entonces, supongamos que X es localmente conexo, sea $x \in X$ y sea U un entorno abierto de x en X. La componente conexa de x en U es un abierto de X por la parte (c), así que es un entorno abierto de x en X contenido en U. □

18. Muestre que el conjunto

$$U = \{f \in C[0,1] : f(x) \neq 0 \text{ para todo } x \in [0,1]\}$$

es un abierto de $C[0,1]$ y encuentre sus componentes conexas.

Solución. Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ un elemento de U. Como f es continua y no se anula en $[0,1]$, el número $\varepsilon := \inf\{|f(t)| : t \in [0,1]\}$ es positivo. Observemos que para todo $t \in [0,1]$ es $|f(t)| \geq \varepsilon$, así que $0 \notin B_\varepsilon(f(t))$. Si ahora $g \in B_\varepsilon(f)$, entonces para cada $t \in [0,1]$ tenemos que $|g(t) - f(t)| \leq d_\infty(f,g) < \varepsilon$ y, por lo tanto, que $g(t) \in B_\varepsilon(f(t))$, de manera que $g(t) \neq 0$. Esto nos dice que $B_\varepsilon(f)$ está totalmente contenido en U y, en definitiva, que U es un abierto de $C[0,1]$.

El espacio $C[0,1]$ es localmente arco-conexo, porque las bolas abiertas son convexas, así que U es localmente arco-conexo y las componentes conexas de U coinciden con las componentes arco-conexas. Determinemos estas últimas.

Sea $f \in U$ y supongamos, por ejemplo, que $f(0) > 0$. Como f es continua y no se anula en $[0,1]$ el teorema de Weierstraß nos dice que $f(t) > 0$ para todo $t \in [0,1]$. Ahora bien, si $s \in [0,1]$, entonces $f_s : t \in [0,1] \mapsto (1-s)f(t) + s \in \mathbb{R}$ es una función continua que pertenece a U: en efecto, si hubiera un elemento t en $[0,1]$ tal que $f_s(t) = (1-s)f(t) + s = 0$, tendría que ser $s \neq 0$ porque $f(t) > 0$, $s \neq 1$ y $f(t) = -s/(1-s) < 0$, lo que es absurdo.

Tenemos entonces una función

$$\eta : s \in [0,1] \mapsto f_s \in U.$$

Esta función es continua. Es, de hecho, uniformemente continua: si $\varepsilon > 0$ y s y s' son elementos de $[0,1]$ tales que $|s - s'| < \varepsilon$, entonces

$$\begin{aligned} d_\infty(f_s, f_{s'}) &= \sup_{t\in[0,1]} \Big| \big((1-s)f(t) + s\big) - \big((1-s')f(t) + s'\big) \Big| \\ &= |s - s'| \cdot \sup_{t\in[0,1]} |f(t) - 1| = \varepsilon \cdot \sup_{t\in[0,1]} |f(t) - 1| \end{aligned}$$

y este último supremo es finito.

Vemos así que f está en la componente arco-conexa de la función constante 1. De manera similar, si hubiera sido $f(0) < 0$ entonces f habría estado en la componente arco-conexa de la función constante -1. De esta forma concluimos que U tiene como mucho dos componentes arco-conexas, las de las funciones constantes $g = 1$ y $h = -1$. Veamos que g y h están en componentes arco-conexas separadas.

Supongamos que, por el contrario, hay una función continua $\sigma : [0,1] \to U$ tal que $\sigma(0) = g$ y $\sigma(1) = h$. Podemos considerar la función $e : s \in [0,1] \mapsto \sigma(s)(0) \in \mathbb{R}$.

Veamos que σ es continua. Sea $s \in [0,1]$ y sea $\varepsilon > 0$. Como σ es continua en s, existe $\delta > 0$ tal que si $s' \in [0,1] \cap B_\delta(s)$ se tiene que $d_\infty(\sigma(s), \sigma(s')) < \varepsilon$ y, en particular, que

$$|e(s) - e(s')| = |\sigma(s)(0) - \sigma(s')(0)| \leq \sup_{t \in [0,1]} |\sigma(s)(t) - \sigma(s')(t)| = d_\infty(\sigma(s), \sigma(s')) < \varepsilon.$$

Como e es continua y $e(0) = \sigma(0)(0) = g(0) = 1$ y $e(1) = \sigma(1)(0) = h(0) = -1$, el teorema de Weierstraß nos dice que existe $\xi \in [0,1]$ tal que $e(\xi) = \sigma(\xi)(0) = 0$. Esto es absurdo, porque $\sigma(\xi)$ es un elemento de U.

La conclusión de todo esto es que U tiene exactamente dos componentes conexas: una que tiene todas las funciones positivas y otra todas las funciones negativas. $\square$