Cálculo Avanzado

Segundo Cuatrimestre — 2019

Práctica 5: Completitud, continuidad uniforme y el teorema de Baire

Completitud

1. Sea X un espacio métrico, sea $x = (x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en X y sea $a \in X$.

(a) La sucesión x converge a a si y solo si toda subsucesión de x converge a a.

(b) Si toda subsucesión de x posee una subsucesión que converge a a, entonces x misma converge a.

(c) Si x es de Cauchy y posee una subsucesión que converge a a, entonces x misma converge a a.

2. (a) Una sucesión en un espacio métrico que converge es de Cauchy. ¿Vale la recíproca?

(b) Una sucesión en un espacio métrico que es de Cauchy es acotada.

3. Sea X un espacio métrico. Si toda bola cerrada de X es un espacio completo, entonces X es un espacio completo.

4. Sea X un espacio métrico.

(a) Todo subespacio completo de X es cerrado.

(b) Si X es completo, entonces todo subespacio cerrado de X es completo.

5. Un espacio métrico X es completo si y solamente si cada sucesión $(F_n)_{n\geq 1}$ de cerrados no vacíos de X tal que $F_n \supseteq F_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y con $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(F_n) = 0$ tiene intersección no vacía.

6. Sean X e Y dos espacios métricos. El espacio métrico $X \times Y$, con su métrica d_∞, es completo si y solamente si X e Y son completos.

7. (a) Sea X un conjunto, sea $B(X)$ el conjunto de todas las funciones $X \to \mathbb{R}$ que son acotadas y consideremos la métrica d_∞ sobre $B(X)$ tal que

$$d_\infty(f, g) := \sup_{x\in X} |f(x) - g(x)|$$

cada vez que f y g son elementos de $B(X)$. El espacio métrico $(B(X), d_\infty)$ es completo.

(b) Sea X un espacio métrico y sea $C_b(X)$ el conjunto de las funciones $X \to \mathbb{R}$ que son continuas y acotadas. Es $C_b(X) \subseteq B(X)$, así que podemos restringir la métrica d_∞ de $B(X)$ a $C_b(X)$. El espacio métrico $(C_b(X), d_\infty)$ es completo.

(*c*) El conjunto c_0 de la sucesiones de números reales que convergen a 0 dotado de la métrica d_∞ tal que

$$d_\infty(a,b) = \sup_{n\geq 1}|a_n - b_n|$$

cada vez que $a = (a_n)_{n\geq 1}$ y $b = (b_n)_{n\geq 1}$ son elementos de c_0 es un espacio métrico completo.

8. Sea X un espacio métrico y sea D un subconjunto denso de X. Si toda sucesión de Cauchy con valores en D converge en X, entonces X es un espacio métrico completo.

Continuidad uniforme

9. Sean X e Y dos espacios métricos. Una función $f : X \to Y$ tal que existe $\lambda > 0$ con $d(f(x), f(x')) \leq \lambda d(x,x')$ cada vez que x y x' son puntos de X es uniformemente continua.

10. (*a*) Sean X e Y espacios métricos, sea A un subconjunto de X y sea $f : X \to Y$ una función. Si existe $\alpha > 0$, un entero $n_0 \in \mathbb{N}$ y sucesiones $(x_n)_{n\geq 1}$ e $(y_n)_{n\geq 1}$ en A tales que

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0, \qquad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies d(f(x_n), f(y_n)) \geq \alpha,$$

entonces f no es uniformemente continua sobre A.

(*b*) La función $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2 \in \mathbb{R}$ no es uniformemente continua. ¿Y su restricción al intervalo $(-\infty, -\pi]$?

(*c*) La función $g : t \in (0,1) \mapsto 1/t \in \mathbb{R}$ no es uniformemente continua.

11. (*a*) Sean X e Y dos espacios métricos y sea $f : X \to Y$ una función uniformemente continua. Si $(x_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy en X, entonces $(f(x_n))_{n\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy en Y.

†(*b*) Si $f : X \to Y$ es una función entre espacios métricos que tiene la propiedad de que para cada sucesión de Cauchy $(x_n)_{n\geq 1}$ en X la sucesión $(f(x_n))_{n\geq 1}$ es de Cauchy en Y, ¿es f necesariamente uniformemente continua?

(*c*) Sean X e Y dos espacios métricos y sea $f : X \to Y$ un homeomorfismo uniforme. El espacio X es completo si y solamente si el espacio Y lo es.

(*d*) Si un espacio métrico (X, d) es completo y d' es una métrica sobre X uniformemente equivalente a d, entonces el espacio métrico (X, d') es completo.

12. Dé ejemplos de

(*a*) una función $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que es acotada y continua, pero no uniformemente.

(*b*) una función $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que es uniformemente continua pero no acotada.

13. Sean X e Y dos espacios métricos y sea $f : X \to Y$ una función uniformemente continua. Si A y B son subconjuntos no vacíos de X tales que $d(A,B) = 0$, entonces $d(f(A), f(B)) = 0$.

14. Sean X e Y dos espacios métricos, sea D un subconjunto denso de X y sea $f : D \to Y$ una función uniformemente continua. Si Y es completo, entonces existe una y solo una función continua $\bar{f} : X \to Y$ tal que $\bar{f}|_D = f$ y, más aún, esta función $\bar{f}$ es uniformemente continua.

El teorema de Baire

15. Si n es positivo, entonces $\mathbb{R}^n$ no es unión finita de subespacios vectoriales propios.

16. En un espacio métrico completo sin puntos aislados, un subconjunto denso y numerable no es un conjunto G_δ.

17. No existen funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que sean continuas solo en los elementos de $\mathbb{Q}$.
Sugerencia. Para cada $n \in \mathbb{N}$ considere el conjunto

$$U_n := \{x \in \mathbb{R} : \text{existe un abierto } U \subseteq \mathbb{R} \text{ tal que } x \in U \text{ y } \operatorname{diam}(f(U)) < 1/n\}.$$

18. Sea X un espacio métrico. Decimos que un subconjunto A de X es *nunca denso* en X si su clausura tiene interior vacío.

(a) El complemento de un subconjunto nunca denso de X es denso. ¿Vale la afirmación recíproca?

(b) Si U es un abierto denso de X, entonces $X \setminus U$ es nunca denso.

(c) Si A es un subconjunto de X, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

  (i) A es nunca denso en X.
  (ii) Toda bola abierta B de X contiene otra B' tal que $B' \cap A = \varnothing$.
  (iii) A no es denso en ninguna bola abierta.

19. Sea $(I_n)_{n\geq 1}$ una enumeración de los subintervalos no degenerados (es decir, de longitud positiva) y cerrados de $[0,1]$ que tienen extremos racionales y para cada $n \in \mathbb{N}$ sea

$$E_n := \{f \in C[0,1] : f \text{ es monótona en } I_n\}.$$

(a) Cualquiera sea $n \in \mathbb{N}$, el conjunto E_n es un cerrado nunca denso de $C[0,1]$.

(b) Existen funciones continuas $[0,1] \to \mathbb{R}$ que no son monótonas en ningún subintervalo propio de su dominio.

(c) El conjunto de las funciones $[0,1] \to \mathbb{R}$ que son continuas y que tienen algún intervalo de monotonía tiene interior vacío en $C[0,1]$.

20. Supongamos que $[a,b]$ es un intervalo no degenerado de $\mathbb{R}$. Una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es *de Lipschitz* si existe $k > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$ cada vez que x e y son elementos de $[a,b]$.

El conjunto $\operatorname{Lip}[a,b]$ de las funciones $[a,b] \to \mathbb{R}$ que son de Lipschitz está contenido en $C[a,b]$ y que allí tiene interior vacío.