CÁLCULO AVANZADO
Segundo Cuatrimestre — 2019

Práctica 5: Completitud, continuidad uniforme y el teorema de Baire

Completitud

1. Sea X un espacio métrico, sea $x = (x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en X y sea $a \in X$.

(a) La sucesión x converge a a si y solo si toda subsucesión de x converge a a.

(b) Si toda subsucesión de x posee una subsucesión que converge a a, entonces x misma converge a.

(c) Si x es de Cauchy y posee una subsucesión que converge a a, entonces x misma converge a a.

Solución. (a) El claro que si toda subsucesión de x converge a a, entonces x misma converge a a, simplemente porque x es una subsucesión de sí misma. Supongamos entonces que la sucesión x converge a x y sea $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ una subsucesión de x. Sea $\varepsilon > 0$. Como x converge a a, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq N$ es $d(x_n, a) < \varepsilon$. Pero entonces si $k \geq N$ es $n_k \geq k \geq N$ y $d(x_{n_k}, a) < \varepsilon$. Esto nos dice que $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ converge a a.

(b) Supongamos que x no converge a a, de manera que existe $\varepsilon > 0$ tal que no existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$ es $d(x_n, a) < \varepsilon$. En otras palabras, para todo $N \in \mathbb{N}$ existe $n \geq N$ tal que $d(a, x_n) \geq \varepsilon$ y, en consecuencia, el conjunto $I = \{n \in \mathbb{N} : d(a, x_n) \geq \varepsilon\}$ no es acotado. El conjunto debe ser, por lo tanto, infinito y hay entonces una función estrictamente creciente $\phi : \mathbb{N} \to I$. Consideremos la subsucesión $(x_{\phi(n)})_{n\geq 1}$ de $(x_n)_{n\geq 1}$. La hipótesis nos dice que esta subsucesión posee una subsucesión $(x_{\phi(n_k)})_{k\geq 1}$ que converge a a: esto es absurdo, ya que $d(x_{\phi(n_k)}, a) \geq \varepsilon$ para todo $k \geq 1$.

(c) Supongamos que la sucesión $x = (x_n)_{n\geq 1}$ es de Cauchy y que posee una subsucesión $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ que converge a a. Sea $\varepsilon > 0$. Como la sucesión es de Cauchy, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n, m \geq N \implies d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por otro lado, como la subsucesión converge a a, existe $K \in \mathbb{N}$ tal que

$$k \geq K \implies d(x_{n_k}, a) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Si ahora $r \in \mathbb{N}$ es tal que $r \geq \max\{N, K\}$, entonces

$$d(x_r, a) \leq d(x_r, x_{n_r}) + d(x_{n_r}, a) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

porque $n_r \geq r \geq N$ y $r \geq K$. Esto nos dice que la sucesión x converge a a. □

2. (a) Una sucesión en un espacio métrico que converge es de Cauchy. ¿Vale la recíproca?

(b) Una sucesión en un espacio métrico que es de Cauchy es acotada.

Solución. Fijemos un espacio métrico X.

(a) Sea $(x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en X que converge a x y sea $\varepsilon > 0$. Como la sucesión converge a x, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x) < \varepsilon/2$ siempre que $n \geq N$. En particular, si $n, m \geq N$ tenemos que

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Vemos así que la sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ es de Cauchy.

La implicación recíproca no vale. Por ejemplo, la sucesión $(1/n)_{n\geq 1}$ en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ es de Cauchy pero no converge en ese espacio.

(b) Sea $(x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de Cauchy en X. En particular, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x_m) < 1$ siempre que $n, m \geq N$. Sea $R = 1 + \max\{d(x_N, x_i) : i \in [\![N]\!]\}$, que es claramente un número positivo. Si $n \in \mathbb{N}$ entonces hay dos casos: o bien $n \leq N$, y entonces $d(x_N, x_n) < R$ y $x_n \in B_R(x_N)$, o bien $n \geq N$, y entonces $d(x_N, x_n) < 1 \leq R$. Vemos así que toda la sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ está contenida en la bola $B_R(x_N)$. □

3. Sea X un espacio métrico. Si toda bola cerrada de X es un espacio completo, entonces X es un espacio completo.

Solución. Supongamos que toda bola cerrada de X es un espacio completo y sea $(x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de Cauchy en X. Como vimos en el Ejercicio **2**, existe un punto $y \in X$ y $R > 0$ tal que $x_n \in \overline{B}_R(y)$ para todo $n \in \mathbb{R}$, esto es, la sucesión toma valores en la bola cerrada $\overline{B}_R(y)$. Como se trata entonces de una sucesión de Cauchy en esa bola cerrada, la hipótesis nos dice que tiene allí un límite x. Es claro que $(x_n)_{n\geq 1}$ converge a x también en el espacio X. La conclusión de esto es que X es completo, como queremos. □

4. Sea X un espacio métrico.

(a) Todo subespacio completo de X es cerrado.

(b) Si X es completo, entonces todo subespacio cerrado de X es completo.

Solución. (a) Sea Y un subespacio de X que es completo y sea $y \in \bar{Y}$, la clausura de Y en X. Existe entonces una sucesión $(y_n)_{n\geq 1}$ con valores en Y que converge en X a y. En particular, esa sucesión es de Cauchy en X y, como toma valores en Y, también en Y. Como Y es completo, existe $y' \in Y$ tal que $(y_n)_{n\geq 1}$ converge a y' en Y. Por supuesto, $(y_n)_{n\geq 1}$ también converge a y' en X y como una sucesión posee a lo sumo un límite, vemos que $y = y' \in Y$. Esto nos dice que $\overline{Y} \subseteq Y$, es decir, que Y es cerrado en X.

(b) Supongamos ahora que X es completo y sea Y un subespacio cerrado de X. Sea $(y_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de Cauchy en Y. Claramente esa sucesión también es una sucesión de Cauchy en X, así que la hipótesis hecha sobre X implica que existe $y \in X$ tal que $(y_n)_{n\geq 1}$ converge a y en X. Como Y es un cerrado de X, debe ser $y \in Y$, y como es claro que $(y_n)_{n\geq 1}$ converge también a y en Y, vemos que Y es un espacio completo. □

5. Un espacio métrico X es completo si y solamente si cada sucesión $(F_n)_{n\geq 1}$ de cerrados no vacíos de X tal que $F_n \supseteq F_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y con $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(F_n) = 0$ tiene intersección no vacía.

Solución. Supongamos primero que X es un espacio métrico que satisface la condición de enunciado y mostremos que es necesariamente completo. Sea $(x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de Cauchy de X. Para cada $n \in \mathbb{N}$ pongamos $G_n := \{x_m : m \geq n\}$ y $F_n := \overline{G}_n$. Es claro que para todo $n \in \mathbb{N}$ es $G_n \supseteq G_{n+1}$, así que $F_n \supseteq F_{n+1}$. Por otro lado, si $\varepsilon > 0$, que la sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ sea de Cauchy implica que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n, m \geq N \implies d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Si ahora $n \geq N$, entonces tenemos que $G_n \subseteq \overline{B}_{\varepsilon/2}(x_N)$ y, por lo tanto, $F_n \subseteq \overline{B}_{\varepsilon/2}(x_N)$, así que, en particular, es $\operatorname{diam}(F_n) < \varepsilon$. Esto nos dice que $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(F_n) = 0$. De acuerdo a la hipótesis que hicimos sobre X, existe un punto x en la intersección $\bigcap_{n\geq 1} F_n$.

Mostremos que la sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ converge a x. Sea $\varepsilon > 0$. Como $(\operatorname{diam}(F_n))_{n\geq 1}$ converge a 0, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\operatorname{diam}(F_N) < \varepsilon$. Como $\{x\} \cup G_N \subseteq F_N$, tenemos que para todo $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N$ es $d(x, x_n) < \varepsilon$. Esto prueba lo que queríamos.

Probemos ahora la necesidad de la condición del enunciado. Supongamos que X es un espacio métrico completo y sea $(F_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de cerrados no vacíos de X tal que $F_n \supseteq F_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(F_n) = 0$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos elegir un punto x_n en F_n: obtenemos así una sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ en X. Es una sucesión de Cauchy: si $\varepsilon > 0$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\operatorname{diam}(F_N) < \varepsilon$ y si n, $m \geq N$ entonces x_n, $x_m \in F_N$, así que $d(x_n, x_m) < \varepsilon$. Como X es completo, existe $x \in X$ tal que $(x_n)_{n\geq 1}$ converge a x.

Si $m \in \mathbb{N}$, entonces la sucesión $(x_{m+n})_{n\geq 1}$ toma valores en F_m y converge a x, así que $x \in F_m$. Esto implica que $x \in \bigcap_{m\geq 1} F_m$ y, por lo tanto, que esta intersección no es vacía. $\square$

6. Sean X e Y dos espacios métricos. El espacio métrico $X \times Y$, con su métrica d_∞, es completo si y solamente si X e Y son completos.

Solución. Mostremos primero que

> *una sucesión $((x_n, y_n))_{n\geq 1}$ de puntos de $X \times Y$ es de Cauchy si y solamente si las sucesiones $(x_n)_{n\geq 1}$ e $(y_n)_{n\geq 1}$ son de Cauchy en X y en Y.*

y que

> *una sucesión $((x_n, y_n))_{n\geq 1}$ de puntos de $X \times Y$ converge a (x, y) si y solamente si las sucesiones $(x_n)_{n\geq 1}$ e $(y_n)_{n\geq 1}$ en X y en Y convergen a x y a y, respectivamente.*

Tenemos que probar cuatro implicaciones.

- Sea $((x_n, y_n))_{n\geq 1}$ una sucesión de puntos de $X \times Y$, supongamos que es de Cauchy y sea $\varepsilon > 0$. Como $((x_n, y_n))_{n\geq 1}$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

  $$n, m \geq N \implies d_\infty((x_n, y_n), (x_m, y_m)) < \varepsilon.$$

  Si ahora n, $m \geq N$, entonces que

  $$d_X(x_n, x_m) \leq \max\{d(x_n, x_m), d(y_n, y_m)\} = d_\infty((x_n, y_n), (x_m, y_m)) < \varepsilon$$

y

$$d_Y(y_n, y_m) \leq \max\{d(x_n, x_m), d(y_n, y_m)\} = d_\infty((x_n, y_n), (x_m, y_m)) < \varepsilon.$$

Esto nos dice que las sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ e $(y_n)_{n\geq 1}$ son de Cauchy en X y en Y.

- Sea $((x_n, y_n))_{n\geq 1}$ una sucesión de puntos de $X \times Y$, supongamos que converge a (x, y) y sea $\varepsilon > 0$. Como $((x_n, y_n))_{n\geq 1}$ converge a (x, y), existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq N \implies d_\infty((x_n, y_n), (x, y)) < \varepsilon.$$

Tenemos entonces que si $n \geq N$ es

$$d_X(x_n, x) \leq \max\{d(x_n, x), d(y_n, y)\} = d_\infty((x_n, y_n), (x, y)) < \varepsilon$$

y

$$d_Y(y_n, y) \leq \max\{d(x_n, x), d(y_n, y)\} = d_\infty((x_n, y_n), (x, y)) < \varepsilon,$$

y vemos así que la sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ converge a x en X y que la sucesión $(y_n)_{n\geq 1}$ converge a y en Y.

- Supongamos ahora que $(x_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy en X, que $(y_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy en Y y sea $\varepsilon > 0$. Como $(x_n)_{n\geq 1}$ es de Cauchy, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n, m \geq N \implies d_X(x_n, x_m) < \varepsilon,$$

y como $(y_n)_{n\geq 1}$ es de Cauchy, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que

$$n, m \geq M \implies d_Y(y_n, y_m) < \varepsilon.$$

Se sigue de esto que si n, $m \geq \max\{N, M\}$, entonces

$$d_\infty((x_n, y_n), (x_m, y_m)) = \max\{d_X(x_n, x_m), d_Y(y_n, y_m)\} < \varepsilon.$$

Podemos concluir con esto que la sucesión $((x_n, y_n))_{n\geq 1}$ es de Cauchy en $X \times Y$.

- Finalmente, supongamos que $(x_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión en X que converge a x, que $(y_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión en Y que converge a y, y sea $\varepsilon > 0$. Como $(x_n)_{n\geq 1}$ converge a x, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq N \implies d_X(x_n, x) < \varepsilon,$$

y como $(y_n)_{n\geq 1}$ converge a y, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq M \implies d_y(y_n, y) < \varepsilon.$$

Si ahora $n \geq \max\{N, M\}$, entonces es

$$d((x_n, y_n), (x, y)) = \max\{d_X(x_n, x), d_Y(y_n, y)\} < \varepsilon.$$

Vemos así que la sucesión $((x_n, y_n))_{n\geq 1}$ converge a (x, y) en $X \times Y$.

Hagamos ahora el ejercicio.

- Supongamos que $X \times Y$ es completo y sean $(x_n)_{n\geq 1}$ e $(y_n)_{n\geq 1}$ sucesiones de Cauchy en X y en Y, respectivamente. Sabemos que la sucesión $((x_n, y_n))_{n\geq 1}$ es entonces de Cauchy en $X \times Y$ y, como este espacio es completo, converge a un punto $(x, y) \in X \times Y$. Como vimos arriba, esto implica que la sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ converge a x en X y la sucesión $(y_n)_{n\geq 1}$ converge a y en Y: podemos concluir, por lo tanto, que X e Y son espacios métricos completos.
- Recíprocamente, supongamos que X e Y son espacios métricos completos y sea $((x_n, y_n))_{n\geq 1}$ una sucesión de Cauchy en $X \times Y$. Vimos arriba que las sucesiones $(x_n)_{n\geq 1}$ e $(y_n)_{n\geq 1}$ son de Cauchy en X y en Y, así que como estos espacios son completos por hipótesis existen $x \in X$ e $y \in Y$ tales que $(x_n)_{n\geq 1}$ e $(y_n)_{n\geq 1}$ convergen a x y a y, respectivamente, y esto implica que la sucesión $(x_n, y_n))_{n\geq 1}$ converge a (x, y). Vemos así que $X \times Y$ es un espacio métrico completo. □

7. (a) Sea X un conjunto, sea $B(X)$ el conjunto de todas las funciones $X \to \mathbb{R}$ que son acotadas y consideremos la métrica d_∞ sobre $B(X)$ tal que

$$d_\infty(f, g) := \sup_{x\in X} |f(x) - g(x)|$$

cada vez que f y g son elementos de $B(X)$. El espacio métrico $(B(X), d_\infty)$ es completo.

(b) Sea X un espacio métrico y sea $C_b(X)$ el conjunto de las funciones $X \to \mathbb{R}$ que son continuas y acotadas. Es $C_b(X) \subseteq B(X)$, así que podemos restringir la métrica d_∞ de $B(X)$ a $C_b(X)$. El espacio métrico $(C_b(X), d_\infty)$ es completo.

(c) El conjunto c_0 de la sucesiones de números reales que convergen a 0 dotado de la métrica d_∞ tal que

$$d_\infty(a, b) = \sup_{n\geq 1} |a_n - b_n|$$

cada vez que $a = (a_n)_{n\geq 1}$ y $b = (b_n)_{n\geq 1}$ son elementos de c_0 es un espacio métrico completo.

Solución. (a) Sea $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de Cauchy en $B(X)$.

Sea $x \in X$. Si $\varepsilon > 0$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $n, m \geq N \implies d_\infty(f_n, f_m) < \varepsilon$ y entonces si n y m son elementos de $\mathbb{N}$ tales que $n, m \geq 1$ tenemos que

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \sup_{x\in X} |f(x) - g(x)| = d_\infty(f_n, f_m) < \varepsilon.$$

Vemos así que la sucesión $(f_n(x))_{n\geq 1}$ de números reales es de Cauchy. Como $\mathbb{R}$ es un espacio métrico completo, esa sucesión tiene límite: llamémoslo $f(x)$.

Obtenemos de esta forma una función $f : X \to \mathbb{R}$. Veamos que es acotada. Como $(f_n)_{n\geq 1}$ es de Cauchy, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$ se tiene que $d_\infty(f_N, f_n) < 1$. Esto implica que para todo $x \in X$ es $|f_N(x), f_n(x)| < 1$ siempre que $n \geq N$ y, por lo tanto, que la sucesión $(f_n(x))_{n\geq 1}$ está a la larga en $B_1(f_N(x))$: como consecuencia de esto, el límite de esa sucesión, $f(x)$, pertenece a $\overline{B}_1(f_N(x))$, esto es, $|f(x) - f_N(x)| \leq 1$. Sea ahora $M = \sup_{x\in X} |f_N(x)|$. Para cada $x \in X$ tenemos que

$$|f(x)| \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x)| \leq 1 + M.$$

Vemos así que la función f es acotada y, por lo tanto, que se trata de un elemento de $B(X)$.

Para terminar, mostremos que la sucesión $(f_n)_{n\geq 1}$ converge a f en $B(X)$. Sea $\varepsilon > 0$. Como $(f_n)_{n\geq 1}$ es de Cauchy, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $n, m \geq N \implies d_\infty(f_n, f_m) < \varepsilon/3$. Se sigue de esto, por supuesto, que para cada $x \in X$ y cada $n, m \in \mathbb{N}$ con $n, m \geq N$ se tiene que $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon/3$. Tomando límite cuando m crece en esta desigualdad, vemos que para todo $x \in X$ y todo $n \geq N$ es $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon/3 < \varepsilon/2$ y, por lo tanto, que para todo $n \geq N$ es $d_\infty(f_m, f) \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$. Esto muestra que $(f_n)_{n\geq 1}$ converge a f en $B(X)$, como queríamos.

(b) Como $C_b(X)$ es un subespacio de $B(X)$, para mostrar que es completo es suficiente con mostrar que es cerrado en $B(X)$. Supongamos que $(f_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión de funciones de $C_b(X)$ que converge a f en $B(X)$: tenemos que mostrar que f pertenece a $C_b(X)$, esto es, que f es continua. Sea $x \in X$ y sea $\varepsilon > 0$. Como la sucesión $(f_n)_{n\geq 1}$ converge en $B(X)$ a f, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $d_\infty(f_n, f) < \varepsilon/3$. Por otro lado, la función f_n es continua en x, así que existe $\delta > 0$ tal que $y \in B_\delta(x) \implies f(y) \in B_{\varepsilon/3}(f(x))$. Si ahora $y \in B_\delta(x)$, entonces

$$
\begin{aligned}
|f(y) - f(x)| &\leq |f(y) - f_n(y)| + |f_n(y) - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)| \\
&\leq d_\infty(f, f_n) + |f_n(y) - f_n(x)| + d_\infty(f_n, f) \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Vemos así que la función f es continua en x.

(c) Sea $(a_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de Cauchy en c_0 y supongamos que para cada $n \in \mathbb{N}$ es $a_n = (a_{n,k})_{k\geq 1}$. Si $k \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon > 0$, entonces como $(a_n)_{n\geq 1}$ es de Cauchy existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $m, m' \geq N \implies d(a_m, a_{m'}) < \varepsilon$ y, en particular, tenemos que cada vez que m y m' son mayores que N es $|a_{m,k}, a_{m',k}| \leq d(a_m, a_{m'}) < \varepsilon$. Esto nos dice que la sucesión de números reales $(a_{m,k})_{m\geq 1}$ es de Cauchy y, por lo tanto, que converge: sea b_k su límite.

Sea $b = (b_k)_{k\geq 1}$. Queremos probar primero que b es un elemento de c_0, es decir, que es una sucesión de números reales que converge a 0, y segundo que la sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$ con la que empezamos converge a b en c_0.

- Sea $\varepsilon > 0$. Como la sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$ es de Cauchy, sabemos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N \implies d(a_n, a_N) < \varepsilon/2$. Por otro lado, como la sucesión $(a_{N,k})_{k\geq 1}$ converge a 0, existe $K \in \mathbb{N}$ tal que $k \geq K \implies |a_{N,k}| < \varepsilon/2$. Si ahora $n \geq N$ y $k \in \mathbb{N}$ tenemos que $|a_{n,k} - a_{N,k}| < \varepsilon/2$ y, como $(a_{n,k})_{n\geq 1}$ converge a b_k, que $|b_k - a_{N,k}| \leq \varepsilon/2$. Pero entonces para cada $k \geq K$ es $|b_k| \leq |b_k - a_{N,k}| + |a_{N,k}| < \varepsilon$. Esto muestra que la sucesión $(b_k)_{k\geq 1}$ converge a 0.
- Sea otra vez $\varepsilon > 0$. Como la sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$ es de Cauchy, sabemos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $n, m \geq N \implies d(a_n, a_m) < \varepsilon/2$. Esto significa que siempre que $n, m \geq N$ y $k \in \mathbb{N}$ se tiene que $|a_{n,k} - a_{m,k}| < \varepsilon/2$. Como la sucesión $(a_{n,k})_{n\geq 1}$ converge a b_k, esto implica que para todo $m \geq N$ y todo $k \in \mathbb{N}$ es $|b_k - a_{m,k}| \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$, es decir, que para todo $m \geq N$ es $d(b, a_m) \leq \varepsilon$.

Con todo esto vemos que c_0 es completo. □

8. Sea X un espacio métrico y sea D un subconjunto denso de X. Si toda sucesión de Cauchy con valores en D converge en X, entonces X es un espacio métrico completo.

Solución. Supongamos que toda sucesión de Cauchy con valores en D converge en X y sea $(x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de Cauchy en X. Como D es denso en X, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $a_n \in D$ tal que $d(a_n, x_n) < 1/n$. Mostremos que la sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$, que toma valores en D, es de Cauchy. Sea $\varepsilon > 0$. Como la sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ es de Cauchy, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que cada vez que n y m son elementos de $\mathbb{N}$ se tiene que

$$n, m \geq N \implies d(x_n, x_m) < \varepsilon/3.$$

Por otro lado, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $1/M < \varepsilon/3$. Si ahora n y m son dos elementos de $\mathbb{N}$ tales que n, $m \geq \max\{N, M\}$, entonces

$$d(a_n, a_m) \leq d(a_n, x_n) + d(x_n, x_m) + d(x_m, a_m) < \frac{1}{n} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{1}{m} < \varepsilon.$$

Ahora bien, como la sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$ es de Cauchy y toma valores en D, nuestra hipótesis nos dice que existe $x \in X$ tal que $(a_n)_{n\geq 1}$ converge a x. Mostremos que la sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ con la que empezamos también converge a x.

Sea $\varepsilon > 0$. Como $(a_n)_{n\geq 1}$ converge a x, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(a_n, x) < \varepsilon/2$ para todo $n \geq N$. Por otro lado, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $1/M < \varepsilon/2$. Si ahora n es un elemento de $\mathbb{N}$ tal que $n \geq \max\{N, M\}$, entonces tenemos que

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, a_n) + d(a_n, x) < \frac{1}{n} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Esto muestra que la sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ tiene límite en X y, en definitiva, que X es un espacio métrico completo. □

Continuidad uniforme

9. Sean X e Y dos espacios métricos. Una función $f : X \to Y$ tal que existe $\lambda > 0$ con $d(f(x), f(x')) \leq \lambda d(x, x')$ cada vez que x y x' son puntos de X es uniformemente continua.

Solución. Sea $\varepsilon > 0$ y sea $\delta := \varepsilon/\lambda$. Si x e x' son elementos de X tales que $d(x, x') < \delta$, entonces $d(f(x), f(x')) \leq \lambda d(x, x') < \lambda\delta = \varepsilon$. □

10. (*a*) Sean X e Y espacios métricos, sea A un subconjunto de X y sea $f : X \to Y$ una función. Si existe $\alpha > 0$, un entero $n_0 \in \mathbb{N}$ y sucesiones $(x_n)_{n\geq 1}$ e $(y_n)_{n\geq 1}$ en A tales que

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0, \qquad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies d(f(x_n), f(y_n)) \geq \alpha,$$

entonces f no es uniformemente continua sobre A.

(*b*) La función $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2 \in \mathbb{R}$ no es uniformemente continua. ¿Y su restricción al intervalo $(-\infty, -\pi]$?

(*c*) La función $g : t \in (0, 1) \mapsto 1/t \in \mathbb{R}$ no es uniformemente continua.

Solución. (a) Supongamos existen α, n_0, $(x_n)_{n\geq 1}$ e $(y_n)_{n\geq 1}$ que satisfacen las condiciones del enunciado y supongamos, para llegar a un absurdo, que la función f es uniformemente continua. Como α es positivo, existe entonces $\delta > 0$ tal que siempre que x, $x' \in X$ son tales que $d(x,x') < \delta$ se tiene que $d(f(x),f(x')) < \alpha$. Como $\lim_{n\to\infty} d(x_n,y_n) = 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0$ y $d(x_n,y_n) < \delta$. De acuerdo a la hipótesis y a la forma en que elegimos δ, tenemos entonces que $\alpha > d(f(x_n),f(y_n)) \geq \alpha$. Esta es la contradicción que queríamos.

(b) Sea $\alpha := 1$, $n_0 := 1$ y para cada $n \in \mathbb{N}$ pongamos $x_n := -n$ e $y_n := -n - 1/n$. Claramente

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n,y_n) = \lim_{n\to\infty}\left|-n-\left(-n-\frac{1}{n}\right)\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0.$$

y para todo $n \in \mathbb{N}$ es

$$d(f(x_n),f(y_n)) = \left|n^2-\left(n+\frac{1}{n}\right)^2\right| = \left|2-\frac{1}{n^2}\right| \geq 2-\frac{1}{n^2} \geq 1 = \alpha.$$

De acuerdo a la primera parte, la función f no es uniformemente continua. Su restricción a $(-\infty,-\pi]$ tampoco lo es, por exactamente la misma razón.

(c) Pongamos $\alpha := 1/4$, $n := 1$ y para cada $n \in \mathbb{N}$ sean $x_n = 1/n$ e $y_n = 1/n - 1/(n+1)^2$. Tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n,y_n) = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n}-\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)^2} = 0$$

y para todo $n \in \mathbb{N}$ es

$$d(g(x_n),g(y_n)) = \left|g\left(\frac{1}{n}\right)-g\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\right| = \frac{n^2}{1+n+n^2} \geq \frac{1}{4}.$$

Otra vez, la primera parte del ejercicio nos dice que la función g no es uniformemente continua. □

11. (a) Sean X e Y dos espacios métricos y sea $f : X \to Y$ una función uniformemente continua. Si $(x_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy en X, entonces $(f(x_n))_{n\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy en Y.

†(b) Si $f : X \to Y$ es una función entre espacios métricos que tiene la propiedad de que para cada sucesión de Cauchy $(x_n)_{n\geq 1}$ en X la sucesión $(f(x_n))_{n\geq 1}$ es de Cauchy en Y, ¿es f necesariamente uniformemente continua?

(c) Sean X e Y dos espacios métricos y sea $f : X \to Y$ un homeomorfismo uniforme. El espacio X es completo si y solamente si el espacio Y lo es.

(d) Si un espacio métrico (X,d) es completo y d' es una métrica sobre X uniformemente equivalente a d, entonces el espacio métrico (X,d') es completo.

Solución. (a) Supongamos que $(x_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy y sea $\varepsilon > 0$. Como f es uniformemente continua, existe $\delta > 0$ tal que

$$d(x,x') < \delta \implies d(f(x),f(x')) < \varepsilon.$$

Por otro lado, como $(x_n)_{n\geq 1}$ es de Cauchy, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n, m \geq N \implies d(x_n, x_m) < \delta.$$

Si ahora n y m son elementos de $\mathbb{N}$ tales que $n, m \geq N$, entonces tenemos que $d(x_n, x_m) < \delta$ y, por lo tanto, $d(f(x), f(x')) < \varepsilon$. Esto muestra que $(f(x_n))_{n\geq 1}$ es de Cauchy.

(b) Consideremos la función $f : t \in \mathbb{R} \mapsto t^2 \in \mathbb{R}$. Sabemos del Ejercicio **10**(b) que no es uniformemente continua. Sea, por otro lado, $(x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$. Como $\mathbb{R}$ es completo, esa sucesión converge a un punto $x \in \mathbb{R}$ y, como la función f es continua, sabemos que la sucesión $(f(x_n))_{n\geq 1}$ converge a $f(x)$ así que, en particular, es de Cauchy. Vemos así que la respuesta a la pregunta del enunciado es negativa.

(c) Es suficiente que mostremos que Y es completo si X lo es, porque para probar la implicación recíproca a partir de la directa es suficiente reemplazar a la función f por su inversa, que también es un homeomorfismo uniforme.

Supongamos entonces que X es completo y sea $(y_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de Cauchy en Y. Como f es un homeomorfismo uniforme, existen constantes positivas α y β tales que

$$\alpha d(x, x') \leq d(f(x), f(x')) \leq \beta d(x, x')$$

cada vez que x y x' están en X. Por otro lado, como f es una biyección, hay una sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ en X tal que $f(x_n) = y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Mostremos que $(x_n)_{n\geq 1}$ es de Cauchy en X. Sea $\varepsilon > 0$. Como $(y_n)_{n\geq 1}$ es de Cauchy, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n, m \geq N \implies d(y_n, y_m) < \alpha\varepsilon.$$

Si ahora n y m son dos elementos de $\mathbb{N}$ tales que n, $m \geq N$, entonces tenemos que $\alpha d(x_n, x_m) \leq d(f(x_n), f(x_m)) = d(y_n, y_m) \leq \alpha\varepsilon$, así que $d(x_n, x_m) \leq \varepsilon$.

Como estamos suponiendo que X es un espacio completo, existe $x \in X$ tal que $(x_n)_{n\geq 1}$ converge a x y, como f es una función continua, tenemos que $(y_n)_{n\geq 1} = (f(x_n))_{n\geq 1}$ converge a $f(x)$. El espacio Y es, por lo tanto, completo.

(d) Sean d y d' dos métricas sobre X uniformemente equivalentes, de manera que la función $\mathrm{id}_X : (X, d) \to (X, d')$ es un homeomorfismo uniforme. Si (X, d) es completo, la parte (c) del ejercicio nos dice que (X, d') es completo. □

12. Dé ejemplos de

(a) una función $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que es acotada y continua, pero no uniformemente.

(b) una función $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que es uniformemente continua pero no acotada.

Solución. Sea $f : t \in \mathbb{R} \mapsto \cos t^2 \in \mathbb{R}$, que es claramente una función continua y acotada. Veamos que no es uniformemente continua. Supongamos, por el contrario, que lo es. Existe entonces $\delta > 0$ tal que

$$|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < 1.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ sean $x_n = \sqrt{2n\pi}$ e $y_n = \sqrt{(2n+1)\pi}$. Es como la función

$$h : t \in (0, +\infty) \to \sqrt{t} \in \mathbb{R}$$

es diferenciable, el teorema de Lagrange nos dice que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe ξ_n en el intervalo $(2n\pi, (2n+1)\pi)$ tal que

$$\sqrt{(2n+1)\pi} - \sqrt{2n\pi} = h((2n+1)\pi) - h(2n\pi) = h'(\xi_n) = \frac{1}{2\sqrt{\xi_n}},$$

así que

$$\left|\sqrt{(2n+1)\pi} - \sqrt{2n\pi}\right| \leq \frac{1}{2\sqrt{2n\pi}}.$$

En particular, como $\lim_{n\to\infty} 1/2\sqrt{2n\pi} = 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left|\sqrt{(2n+1)\pi} - \sqrt{2n\pi}\right| < \delta$$

y, por lo tanto, en vista de la forma en que elegimos a δ, es

$$2 = |\cos(2n+1)\pi - \cos 2n\pi| = \left|f\left(\sqrt{(2n+1)\pi}\right) - f\left(\sqrt{2n\pi}\right)\right| < 1.$$

Esto es, por supuesto, absurdo. Esto da un ejemplo para la primera parte.

Para la segunda es suficiente considerar la función $\mathrm{id}_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, que es uniformemente continua pero no acotada. □

13. Sean X e Y dos espacios métricos y sea $f : X \to Y$ una función uniformemente continua. Si A y B son subconjuntos no vacíos de X tales que $d(A,B) = 0$, entonces $d(f(A), f(B)) = 0$.

Solución. Sea A y B subconjuntos no vacíos de X tales que $d(A,B) = 0$ y sea $\varepsilon > 0$. Como f es uniformemente continua, existe $\delta > 0$ tal que

$$d(x,x') < \delta \implies d(f(x), f(x')) < \varepsilon.$$

Por otro lado, como $\inf\{d(a,b) : a \in A, b \in B\} = d(A,B) = 0 < \delta$, existen $a \in A$ y $b \in B$ tales que $d(a,b) < \delta$ y, por lo tanto, $d(f(a), f(b)) < \varepsilon$. Esto nos dice que

$$d(f(A), f(B)) = \inf\{d(f(a), f(b)) : a \in A, b \in B\} < \varepsilon.$$

Como esto vale cualquiera sea $\varepsilon > 0$, podemos concluir que $d(f(A), f(B)) = 0$. □

14. Sean X e Y dos espacios métricos, sea D un subconjunto denso de X y sea $f : D \to Y$ una función uniformemente continua. Si Y es completo, entonces existe una y solo una función continua $\bar{f} : X \to Y$ tal que $\bar{f}|_D = f$ y, más aún, esta función $\bar{f}$ es uniformemente continua.

Solución. Sea $x \in X$. Como D es denso, existe una sucesión $(q_n)_{n\geq 1}$ en D que converge a x. Afirmamos que la sucesión $(f(q_n))_{n\geq 1}$ es de Cauchy. Veámoslo: sea $\varepsilon > 0$. Como f es uniformemente continua, existe $\delta > 0$ tal que $d(f(z), f(z')) < \varepsilon$ siempre que z y z' son elementos de X tales que $d(z,z') < \delta$. Por otro lado, como la sucesión $(q_n)_{n\geq 1}$ converge a x, es de Cauchy, y existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n, m \geq N \implies d(q_n, q_m) < \delta.$$

Si ahora n y m son dos elementos de $\mathbb{N}$ tales que $n, m \geq N$, entonces la elección de N implica que $d(q_n, q_m) < \delta$ y, a su vez, la elección de δ, que $d(f(q_n), f(q_m)) < \varepsilon$. Esto prueba que $(f(q_n))_{n\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy en Y y, como Y es completo por hipótesis, que converge a un punto y.

Afirmamos ahora que este punto y depende solamente del punto x de X con el que empezamos y no de la forma en que elegimos la sucesión $(q_n)_{n\geq 1}$ en D que converge a x. Para verlo, supongamos que $(q'_n)_{n\geq 1}$ es otra sucesión en D que converge a x. Podemos considerar entonces la sucesión $(r_n)_{n\geq 1}$ tal que

$$r_n = \begin{cases} q_{n/2} & \text{si } n \text{ es par;} \\ q'_{(n+1)/2} & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Es fácil ver, usando que $(q_n)_{n\geq 1}$ y $(q'_n)_{n\geq 1}$ son sucesiones que convergen a x, que la sucesión $(r_n)_{n\geq 1}$ converge a x. Lo que hicimos, entonces, nos dice que la sucesión $(f(r_n))_{n\geq 1}$ converge. En particular, todas sus subsucesiones convergen al mismo límite: esto implica, claro, que las sucesiones $(q_n)_{n\geq 1} = (r_{2n})_{n\geq 1}$ y $(q'_n) = (r_{2n-1})_{n\geq 1}$ tienen el mismo límite.

Como consecuencia de esto es claro que existe una función $\bar{f} : X \to Y$ con la siguiente propiedad:

> *si $x \in X$ y $(q_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión en D que converge a x, entonces la sucesión $(f(q_n))_{n\geq 1}$ converge a $\bar{f}(x)$.*

Si $q \in D$, entonces la sucesión $(q_n)_{n\geq 1}$ que tiene $q_n = q$ para todo $n \in \mathbb{N}$ claramente toma valores en D y converge a q: la propiedad que caracteriza a $\bar{f}$, entonces, nos dice que

$$\bar{f}(q) = \lim_{n\to\infty} f(q_n) = \lim_{n\to\infty} f(q) = f(q).$$

Esto nos dice que $\bar{f}|_D = f$. Veamos que $\bar{f}$ es uniformemente continua.

Sea $\varepsilon > 0$. Como f es uniformemente continua, existe $\delta > 0$ tal que

$$q, q' \in D,\ d(q, q') < \delta \implies d(f(q), f(q')) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Sean ahora x y x' dos elementos de X tales que $d(x, x') < \delta/3$. Podemos elegir sucesiones $(q_n)_{n\geq 1}$ y $(q'_n)_{n\geq 1}$ en D que convergen a x y a x', respectivamente, y sabemos que las sucesiones $(f(q_n))_{n\geq 1}$ y $(f(q'_n))_{n\geq 1}$ convergen a $f(x)$ y a $f(x')$, respectivamente. En particular, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $d(q_n, x) < \delta/3$, $d(q'_n, x') < \delta/3$, $d(f(q_n), \bar{f}(x)) < \varepsilon/3$ y $d(f(q'_n), \bar{f}(x')) < \varepsilon/3$, y tenemos entonces que

$$d(q_n, q'_n) \leq d(q_n, x) + d(x, x') + d(x', q'_n) < \frac{\delta}{3} + \frac{\delta}{3} + \frac{\delta}{3} = \delta,$$

así que $d(f(q_n), f(q'_n)) < \varepsilon/3$ y, por lo tanto,

$$\begin{aligned} d(\bar{f}(x), \bar{f}(x')) &\leq d(\bar{f}(x), f(q_n)) + d(f(q_n), f(q'_n)) + d(f(q'_n), \bar{f}(x')) \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Para terminar, tenemos que ver que la afirmación de unicidad es cierta. Sea $g : X \to Y$ otra función continua tal que $g|_D = f$. Si $x \in X$, entonces existe una sucesión $(q_n)_{n\geq 1}$ en D que converge a x y, como $\bar{f}$ y g son continuas y $\bar{f}(q) = g(q)$ para todo $q \in D$,

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} g(q_n) = \lim_{n\to\infty} \bar{f}(q_n) = f(x).$$

Esto nos dice que $g = \bar{f}$. □

El teorema de Baire

15. Si n es positivo, entonces $\mathbb{R}^n$ no es unión finita de subespacios vectoriales propios.

Solución. Sean $V_1, \dots, V_m$ subespacios vectoriales propios de $\mathbb{R}^n$ tales que $\mathbb{R}^n = \bigcup_{i=1}^m V_i$ y, por lo tanto, tales que $\bigcap_{i=1}^m (\mathbb{R}^n \setminus V_i) = \varnothing$. Para llegar a un absurdo es suficiente en vista del teorema de Baire, que mostremos que cada $\mathbb{R}^n \setminus V_i$ es un abierto denso de $\mathbb{R}^n$.

En general, mostremos que

si V es un subespacio propio de $\mathbb{R}^n$, entonces $\mathbb{R}^n \setminus V$ es un abierto denso de $\mathbb{R}^n$.

Sea, para ello, V un subespacio propio de $\mathbb{R}^n$ y sea $m := \dim V$ su dimensión. Sabemos que existe una función lineal $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-m}$ tal que $V = \ker \phi$. La función ϕ es continua, porque es lineal, así que $V = \phi^{-1}(\{0\})$ es un cerrado de $\mathbb{R}^n$ y, por lo tanto, $\mathbb{R}^n \setminus V$ es un abierto de $\mathbb{R}^n$.

Veamos ahora que $\mathbb{R}^n \setminus V$ es denso. Como V es un subespacio propio de $\mathbb{R}^n$, existe $w \in \mathbb{R}^n \setminus V$ y, en particular $\phi(w) \neq 0$. Sea $x \in \mathbb{R}^n$. Si x está en $\mathbb{R}^n \setminus V$, es claro que $x \in \overline{\mathbb{R}^n \setminus V}$. Supongamos entonces que $x \in V$. Si $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\phi\left(x + \frac{w}{n}\right) = \frac{\phi(w)}{n} \neq 0,$$

de manera que $x + w/n \in \mathbb{R}^n \setminus V$. Como

$$\lim_{n\to\infty} d(x + w/n, x) = \lim_{n\to\infty} d(w/n, 0) = 0,$$

tenemos que $x \in \overline{\mathbb{R}^n \setminus V}$ también en este caso. □

16. En un espacio métrico completo sin puntos aislados, un subconjunto denso y numerable no es un conjunto G_δ.

Solución. Sea X un espacio métrico completo sin puntos aislados y sea D un subconjunto denso y numerable de X. Supongamos que D es un conjunto G_δ, de manera que su complemento $X \setminus D$ es un conjunto F_σ, es decir, es unión numerable de conjuntos cerrados. Más aún, cada uno de esos cerrados tiene interior vacío, ya que es disjunto de D y D interseca cada abierto de X.

Por otro lado, como X no tiene puntos aislados, para todo $q \in D$ el conjunto $\{q\}$ tiene interior vacío y, por lo tanto, $D = \bigcup_{q\in D}\{q\}$ es también unión numerable de cerrados de interior vacío. Por supuesto, de estas dos cosas se sigue que $X = D \cup (X \setminus D)$ es unión numerable de cerrados de interior vacío, esto es, de primera categoría. Esto es absurdo, porque el teorema de Baire nos dice que X es de segunda categoría. □

17. No existen funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que sean continuas solo en los elementos de $\mathbb{Q}$.

Sugerencia. Para cada $n \in \mathbb{N}$ considere el conjunto

$$U_n := \{x \in \mathbb{R} : \text{existe un abierto } U \subseteq \mathbb{R} \text{ tal que } x \in U \text{ y } \operatorname{diam}(f(U)) < 1/n\}.$$

Solución. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función que es continua en los puntos de $\mathbb{Q}$ y consideremos para cada $n \in \mathbb{N}$ el conjunto U_n de la sugerencia. Si $n \in \mathbb{N}$ y $x \in U_n$, entonces existe un abierto U en $\mathbb{R}$ tal que $x \in U$ y $\operatorname{diam}(f(U)) < 1/n$ y, por lo tanto, $x \in U \subseteq U_n$: esto nos dice que U_n es abierto. Concluimos así que $V := \bigcap_{n\geq 1} U_n$ es un conjunto G_δ en X.

Mostremos que V es el conjunto de puntos de continuidad de f. Sea primero $x \in V$ y sea $\varepsilon > 0$. Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $2/n < \varepsilon$ y, como $x \in U_b$, hay un abierto U en $\mathbb{R}$ tal que $x \in U$ $\operatorname{diam}(f(U)) < 1/n$ y, en particular, $f(U) \subseteq B_{2/n}(f(x)) \subseteq B_\varepsilon(f(x))$. Así, la función f es continua en x.

Sea ahora $x \in \mathbb{R} \setminus V$, de manera que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \notin U$ y, por lo tanto, no existe ningún abierto U de $\mathbb{R}$ tal que $\in U$ y $\operatorname{diam}(f(U)) < 1/n$. En particular, para todo $\delta > 0$ existe $y \in B_\delta(x)$ tal que $d(f(x), f(y)) > 1/n$: vemos con esto que la función f no es continua en x.

La conclusión es que el conjunto de puntos de continuidad de una función $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es un conjunto G_δ y, como $\mathbb{Q}$ no es un conjunto G_δ, que una función $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ no puede ser continua exactamente en los puntos de $\mathbb{Q}$. □

18. Sea X un espacio métrico. Decimos que un subconjunto A de X es *nunca denso* en X si su clausura tiene interior vacío.

(a) El complemento de un subconjunto nunca denso de X es denso. ¿Vale la afirmación recíproca?

(b) Si U es un abierto denso de X, entonces $X \setminus U$ es nunca denso.

(c) Si A es un subconjunto de X, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) A es nunca denso en X.

(ii) Toda bola abierta B de X contiene otra B' tal que $B' \cap A = \varnothing$.

(iii) A no es denso en ninguna bola abierta.

Solución. (a) Sea A un conjunto nunca denso en X. Si U es un abierto no vacío de X, entonces $U \nsubseteq \overline{A}$, así que $U \cap (X \setminus A) \supseteq U \cap (X \setminus \overline{A}) \neq \varnothing$. Como U interseca no trivialmente a todo abierto no vacío de X, es denso.

La implicación recíproca no es cierta: el complemento de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ es denso en $\mathbb{R}$, pero $\mathbb{Q}$ no es nunca denso en $\mathbb{R}$.

(b) Sea U un abierto denso en X. El conjunto $A := X \setminus U$ es cerrado y tiene interior vacío: en efecto, si V es un abierto de X contenido en A, entonces V es disjunto de U, lo que es absurdo, ya que U es denso.

(c) ($i \Rightarrow ii$) Supongamos que A es nunca denso en X y sea B una bola abierta de X. Como $\overline{A}$ tiene interior vacío, no contiene a B, así que $B \setminus \overline{A}$ es un conjunto no vacío. Como además esa diferencia es abierta, es claro que existe otra bola abierta B' tal que $B \subseteq B \setminus \overline{A}$ y, en particular, $B \subseteq B'$ y $B' \cap A = \varnothing$.

($ii \Rightarrow iii$) Supongamos que toda bola abierta de X contiene otra bola abierta disjunta de A y sea B una bola abierta de X. Por hipótesis, existe una bola abierta B' tal que $B \subseteq B$ y $B' \cap A = \varnothing$: esto nos dice que $A \cap B$ no es denso en B, porque B' es un abierto no vacío de B.

($iii \Rightarrow i$) Si A no es nunca denso en X, entonces el interior de $\overline{A}$ no es vacío y existe una bola abierta B tal que $B \subseteq \overline{A}$. Si $b \in B$, entonces existe una sucesión de puntos de A que converge a b y, como B es un entorno de b, esa sucesión posee una subsucesión con valores en B: vemos así que $b \in \overline{B \cap A}$ y, por lo tanto, que el conjunto $B \cap A$ es denso en B, esto es, que A es denso en B. □

19. Sea $(I_n)_{n\geq 1}$ una enumeración de los subintervalos no degenerados (es decir, de longitud positiva) y cerrados de $[0,1]$ que tienen extremos racionales y para cada $n \in \mathbb{N}$ sea

$$E_n := \{f \in C[0,1] : f \text{ es monótona en } I_n\}.$$

(a) Cualquiera sea $n \in \mathbb{N}$, el conjunto E_n es un cerrado nunca denso de $C[0,1]$.

(b) Existen funciones continuas $[0,1] \to \mathbb{R}$ que no son monótonas en ningún subintervalo propio de su dominio.

(c) El conjunto de las funciones $[0,1] \to \mathbb{R}$ que son continuas y que tienen algún intervalo de monotonía tiene interior vacío en $C[0,1]$.

Solución. (a) Sabemos que para cada $t \in [0,1]$ la función $e_t : f \in C[0,1] \mapsto f(t) \in \mathbb{R}$ es continua. Se sigue inmediatamente de eso que si s, $t \in [0,1]$, entonces la función $e_{s,t} : f \in C[0,1] \mapsto f(s) - f(t) \in \mathbb{R}$ es continua y, por lo tanto, que los conjuntos

$$D^-_{s,t} := \{f \in C[0,1] : e_{s,t}(f) \leq 0\}, \qquad D^+_{s,t} := \{f \in C[0,1] : e_{s,t}(f) \geq 0\}$$

son cerrados de $C[0,1]$. Si $n \in N$, vemos entonces que

$$E^-_n = \bigcap_{\substack{s,t\in I_n \\ s\leq t}} D^-_{s,t}, \qquad E^+_n = \bigcap_{\substack{s,t\in I_n \\ s\leq t}} D^+_{s,t}$$

son cerrados de $C[0,1]$. Observemos que E^-_n y E^+_n tienen por elementos a las funciones de $C[0,1]$ que son crecientes o decrecientes en I_n, respectivamente. Veamos que tienen interiorvacío.

Sea $f \in E^-_n$ y sea $\varepsilon > 0$. Como f es continua, hay un subintervalo no degenerado $[a,b]$ contenido en I_n tal que $\operatorname{diam} f([a,b]) < \varepsilon/2$. Sea $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ tal que si $x \in [0,1]$ es

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in [0,a] \text{ o } x \in [b,1]; \\ 2\dfrac{f(b)+\varepsilon-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a) & \text{si } x \in [a,(a+b)/2]; \\ -\dfrac{2\varepsilon}{b-a}\left(x-\dfrac{a+b}{2}\right)+f(b)+\varepsilon & \text{si } x \in [(a+b)/2,b]. \end{cases}$$

Esta función g es continua y tiene

$$g\left(\frac{a+b}{2}\right) = f(b)+\varepsilon > f(b) = g(b),$$

así que no pertenece a E^-_n. Sea $t \in [0,1]$. Si $t \in [0,a] \cup [b,1]$, es $|g(t)-f(t)| = 0$. Si $t \in [a,(a+b)/2]$, es

$$\begin{aligned} |g(t)-f(t)| &= \left|2\frac{f(b)+\varepsilon-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)-f(t)\right| \\ &\leq (f(b)+\varepsilon-f(a)) + |f(a)-f(t)| < 3\varepsilon. \end{aligned}$$

De manera similar, si $t \in [(a+b)/2, b]$, entonces

$$\begin{aligned}|g(t) - f(t)| &= \left| -\frac{2\varepsilon}{b-a}\left(t - \frac{a+b}{2}\right) + f(b) + \varepsilon - f(t)\right| \\ &= \varepsilon + |f(b) - f(t)| + \varepsilon < 3\varepsilon.\end{aligned}$$

Esto nos dice que E_n^- no contiene a la bola $B_{3\varepsilon}(f)$. Así, E_n^- no contiene ninguna bola abierta y, por lo tanto, tiene interior vacío. El mismo razonamiento se aplica a E_n^+, por supuesto.

(b), (c) De acuerdo a la primera parte, el conjunto $M = \bigcup_{n\geq 1} E_n^- \cup \bigcup_{n\geq 1} E_n^+$ es de primera categoría en $C[0,1]$ y, por lo tanto, es un subconjunto propio de $C[0,1]$: todo elemento de $C[0,1]$ que no está en esa unión es una función que no es creciente ni decreciente en ninguno de los intervalos I_n y, ya que todo subintervalo no degenerado de $[0,1]$ contiene uno de los I_n, en ningún subintervalo no degenerado de $[0,1]$. □

20. Supongamos que $[a,b]$ es un intervalo no degenerado de $\mathbb{R}$. Una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es *de Lipschitz* si existe $k > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| \leq k|x-y|$ cada vez que x e y son elementos de $[a,b]$.

El conjunto $\mathsf{Lip}[a,b]$ de las funciones $[a,b] \to \mathbb{R}$ que son de Lipschitz está contenido en $C[a,b]$ y que allí tiene interior vacío.

Solución. Es evidente que toda función de Lipschitz en $[a,b]$ es uniformemente continua, así que $\mathsf{Lip}[a,b] \subseteq C[a,b]$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea L_n el conjunto de las funciones f de $C[a,b]$ tales que $|f(x) - f(y)| \leq n|x-y|$ cada vez que x e y están en $[a,b]$. Si para cada x, $y \in [a,b]$ escribimos $e_{x,y} : f \in C[a,b] \mapsto |f(x) - f(y)| \in \mathbb{R}$, que es una función continua, entonces

$$L_n = \bigcap_{x,y\in[a,b]} \{f \in C[a,b] : e_{x,y}(f) \leq n|x-y|\}$$

es un cerrado de $C[a,b]$, ya que cada intersecando es cerrado. Vamos a probar que el interior de L_n es vacío. De esto se sigue, gracias al teorema de Baire, que la unión $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} L_n$, que es el conjunto $\mathsf{Lip}[a,b]$ de las funciones de Lipschitz de $C[a,b]$, tiene interior vacío.

Sea $f \in L_n$, sea $q \in \mathbb{N}$, sea $g : t \in [a,b] \mapsto \sin(qt) \in \mathbb{R}$ y sea $h = f + \varepsilon g/2$. Es claro que $h \in B_\varepsilon(f)$. Mostremos que podemos elegir q de manera que $h \notin L_n$. Como $a < b$, es posible elegir q suficientemente grande como para que existan α y β en $[a,b]$ tales que $0 < \beta - \alpha < \varepsilon/2n$, $\sin(q\alpha) = -1$ y $\sin(q\beta) = 1$, y entonces

$$h(\beta) - h(\alpha) = f(\beta) - f(\alpha) + \varepsilon \geq -n(\beta - \alpha) + \varepsilon \geq \frac{\varepsilon}{2} > n(\beta - \alpha),$$

ya que $|f(\beta) - f(\alpha)| < n|\beta - \alpha|$, y entonces $h \notin L_n$, como queremos. □