Cálculo Avanzado

Segundo Cuatrimestre — 2019

Práctica 4: Continuidad y separabilidad

Continuidad

1. Sean (X,d) e (Y,d') dos espacios métricos y sea $f : X \to Y$ una función.

(a) La función f es continua en un punto x_0 de X si y solo si para toda sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ en X que converge a x_0 se tiene que $\lim f(x_n) = f(x_0)$.

(b) Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (i) La función f es continua.
- (ii) Para todo abierto G de Y el conjunto $f^{-1}(G)$ es abierto en X.
- (iii) Para todo cerrado F de Y el conjunto $f^{-1}(F)$ es cerrado en X.

2. Decida cuáles de las siguientes funciones son continuas.

(a) $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2 + y^2 \in \mathbb{R}$, con $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}$ dotados de sus métricas euclídeas.

(b) La función identidad $(\mathbb{R}^2, \delta) \to (\mathbb{R}^2, d_\infty)$, con δ la métrica discreta.

(c) La función identidad $(\mathbb{R}^2, d_\infty) \to (\mathbb{R}^2, \delta)$, con δ la métrica discreta.

(d) La inclusión $(E, d|_E) \to (X,d)$, con (X,d) un espacio métrico cualquiera, E un subconjunto de X y $d|_E$ la métrica sobre E inducida por la de X.

3. Sean f, g, $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ las funciones tales que para todo $x \in [0,1]$ se tiene

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Q}; \\ 1 & \text{si } x \notin \mathbb{Q}; \end{cases} \qquad g(x) = x f(x); \qquad h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q}; \\ \frac{1}{n} & \text{si } x = \frac{m}{n} \text{ y } (m,n) = 1; \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Muestre que f es discontinua en todos los puntos de su dominio, que g es continua únicamente en 0, y que h es continua en $[0,1] \setminus \mathbb{Q}$ y en ningún otro punto de $[0,1]$.

4. Un espacio métrico (X,d) es discreto si y solamente si toda función $X \to Y$ con valores en un espacio métrico (Y,d') es continua.

5. *Métricas topológicamente equivalentes.*

(a) Sea X un conjunto y sean d_1 y d_2 dos métricas sobre X. Si existen dos números reales α y β tales que

$$d_1(x,y) \leq \alpha d_2(x,y) \leq \beta d_1(x,y)$$

para todo x, $y \in X$, entonces las métricas d_1 y d_2 son topológicamente equivalentes.

(b) Dos métricas d_1 y d_2 sobre un conjunto X son topológicamente equivalentes si y solamente si la función identidad $(X, d_1) \to (X, d_2)$ es un homeomorfismo.

(c) Si $1 \leq p, q \leq \infty$, entonces las métricas d_p y d_q sobre $\mathbb{R}^n$ son topológicamente equivalentes.

(d) La función $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$d(x, y) = \left| \frac{x}{1 + |x|} - \frac{y}{1 + |y|} \right|$$

cada vez que x e y están en $\mathbb{R}$ es una métrica equivalente a la métrica euclídea pero para la que el espacio métrico $(\mathbb{R}, d')$ no es completo.

6. Consideremos a todos los espacios $\mathbb{R}^n$ con sus métricas euclídeas. Muestre que

(a) el conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y(e^x - 1) = -1\}$ es cerrado,

(b) el conjunto $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -1 \leq x^3 - 3y^4 + z - 2 \leq 3\}$ es cerrado, y

(c) el conjunto $\{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 : 3 < x_1 - x_2\}$ es abierto.

¿Puede dar otras métricas no equivalentes a las euclídeas para las que estas afirmaciones sigan siendo válidas?

7. Sea $C[0, 1]$ el conjunto de las funciones $[0, 1] \to \mathbb{R}$ que son continuas y sean $E, I : C[0, 1] \to \mathbb{R}$ las funciones tales que

$$E(f) = f(0), \qquad I(f) = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$$

para toda $f \in C[0, 1]$.

(a) Tanto E como I son continuas sobre $(C[0, 1], d_\infty)$.

(b) La función I es continua sobre $(C[0, 1], d_1)$ pero la función E no lo es.

(c) ¿Hay alguna función $F : C[0, 1] \to \mathbb{R}$ que sea continua para la métrica d_1 pero no para la métrica d_∞?

8. Sean (X, d) e (Y, d') dos espacios métricos y pongamos en $X \times Y$ la métrica d_1. Si una función $f : X \to Y$ es continua, entonces el *gráfico* de f, es decir, el conjunto

$$G(f) = \{(x, f(x)) \in X \times Y : x \in X\}$$

es un cerrado de $X \times Y$. ¿Vale la afirmación recíproca?

9. Sean (X, d) e (Y, d') dos espacios métricos y sea $f : X \to Y$ una función. Decida si las siguientes afirmaciones son válidas:

(a) Si $\mathscr{U}$ es un cubrimiento abierto de X y para todo $U \in \mathscr{U}$ es continua la restricción $f|_U : U \to Y$, entonces la función $f : X \to Y$ es continua.

(b) Si $\mathscr{F}$ es un cubrimiento cerrado de X y para todo $F \in \mathscr{F}$ es continua la restricción $f|_F : F \to Y$, entonces la función $f : X \to Y$ es continua.

(c) Si $\mathscr{F}$ es un cubrimiento cerrado y finito de X y para todo $F \in \mathscr{F}$ la restricción $f|_F : F \to Y$ es continua, entonces la función $f : X \to Y$ es continua.

(d) Si $\mathscr{Q}$ es un cubrimiento finito de X y para todo $Q \in \mathscr{G}$ la restricción $f|_Q : Q \to Y$ es continua, entonces $f : X \to Y$ es continua.

10. Sea X un espacio métrico. Una familia $\mathscr{F}$ de subconjuntos de X es *localmente finita* si para todo $x \in X$ existe un entorno U de x en X tal que el conjunto $\{F \in \mathscr{F} : F \cap U \neq \varnothing\}$ es finito.

(a) Si $\mathscr{F}$ es una familia localmente finita de cerrados de X, entonces $\bigcup_{F\in\mathscr{F}} F$ es un cerrado de X.

(b) Si $\mathscr{F}$ es un cubrimiento cerrado y localmente finito de X y $f : X \to Y$ es una función con valores en un espacio métrico Y tal que para todo $F \in \mathscr{F}$ la restricción $f|_F : F \to Y$ es continua, entonces f misma es una función continua.

11. Sea (X, d) un espacio métrico. Una función $f : X \to \mathbb{R}$ es continua si y solamente si para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ los conjuntos $\{x \in X : f(x) < \alpha\}$ y $\{x \in X : f(x) > \alpha\}$ son abiertos.

12. Sea (X, d) un espacio métrico. Si A es un subconjunto no vacío de X, entonces la función $d_A : x \in X \mapsto d(x,A) \in \mathbb{R}$ es uniformemente continua.

13. *Teorema de Urysohn.* Sea (X, d) un espacio métrico

(a) Si A y B son dos cerrados disjuntos de X, entonces existe una función $f : X \to \mathbb{R}$ que es continua y tal que $f|_A \equiv 0$, $f|_B \equiv 1$ y $0 \leq f(x) \leq 1$ para todo $x \in X$.
Sugerencia. Considere la función f tal que $f(x) = \dfrac{d_A(x)}{d_A(x) + d_B(y)}$.

(b) Si A y B son dos cerrados disjuntos de X, entonces existen abiertos U y V de X tales que $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ y $U \cap V = \varnothing$.

14. Una función $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ es siempre continua. ¿Puede ser un homeomorfismo? ¿Qué puede decirse en este sentido de una función $\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$?

15. Sea (X, d) un espacio métrico. La función $\Delta : x \in X \mapsto (x, x) \in X \times X$ es un homeomorfismo de X a su imagen $\Delta(X)$ y el conjunto $\Delta(X)$ es cerrado en $X \times X$.

16. Sean (X, d) e (Y, d') dos espacios métricos. Una función $f : X \to Y$ es *abierta* si para todo abierto A de X el conjunto $f(A)$ es abierto en Y, y es *cerrada* si para todo cerrado F de X el conjunto $f(F)$ es cerrado en Y.

(a) Una función biyectiva $f : X \to Y$ es abierta si y solamente si su función inversa $f^{-1} : Y \to X$ es continua.

(b) Dé ejemplos de funciones continuas $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que no son abiertas.

(c) Dé ejemplos de funciones continuas $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que no son cerradas.

(d) Una función puede ser biyectiva, abierta y cerrada y no un homeomorfismo: dé un ejemplo de esto.

17. (a) Sean (X, d) e (Y, d') dos espacios métricos y sea D un subconjunto de X que es denso. Si f, $g : X \to Y$ son dos funciones continuas sobre X tales que $f|_D = g|_D$, entonces $f = g$.

(b) Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua tal que $f(x+y) = f(x)+f(y)$ cada vez que x e y son elementos de $\mathbb{Q}$, entonces existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \alpha x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

18. Sean (X,d) e (Y,d') dos espacios métricos y pongamos sobre el producto cartesiano $X \times Y$ la métrica d_∞.

(a) Las proyecciones $\pi_1 : (x,y) \in X \times Y \mapsto x \in X$ y $\pi_2 : (x,y) \in X \times Y \mapsto y \in Y$ son continuas y abiertas, pero en general no son cerradas.

(b) Sea (Z,d'') un tercer espacio métrico. Una función $f : Z \to X \times Y$ es continua si y solamente si las composiciones $\pi_1 \circ f$ y $\pi_2 \circ f$ lo son.

19. Sea (X,d) un espacio métrico y sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función. La función f es

- *semicontinua inferiormente* en un punto $x_0 \in X$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $d(x,x_0) < \delta \implies f(x_0) - \varepsilon < f(x)$, y
- *semicontinua superiormente* en un punto $x_0 \in X$ si para todo $\varepsilon >$ existe $\delta > 0$ tal que $d(x,x_0) < \delta \implies f(x) < f(x_0) + \varepsilon$.

(a) Una función $X \to \mathbb{R}$ es continua en un punto x_0 de X si y solamente si es allí semicontinua inferiormente y semicontinua superiormente.

(b) Una función $f : X \to \mathbb{R}$ es semicontinua inferiormente si y solamente si para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ el conjunto $f^{-1}((\alpha, +\infty))$ es abierto.

(c) Una función $f : X \to \mathbb{R}$ es semicontinua superiormente si y solamente si para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ el conjunto $f^{-1}((-\infty, \alpha))$ es abierto.

(d) Si A es un subconjunto de X, entonces la función característica $\chi_A : X \to \mathbb{R}$ de A es semicontinua inferiormente si y solamente si A es abierto, y es semicontinua superiormente si y solamente si A es cerrado.

Separabilidad

20. El espacio $\mathbb{R}^n$ con su métrica euclídea es separable.

21. sea $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ el conjunto de todas las sucesiones $(a_n)_{n\geq 1}$ de números reales para las que existe un entero $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n = 0$ para todo $n \geq n_0$. Si $a = (a_n)_{n\geq 1}$ y $b = (b_n)_{n\geq 1}$ son dos elementos de $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$, el conjunto $\{|a_n - b_n| : n \in \mathbb{N}\}$ es acotado: hay, por lo tanto, una función $d_\infty : \mathbb{R}^{(\mathbb{N})} \times \mathbb{R}^{(\mathbb{N})} \to \mathbb{R}$ tal que

$$d_\infty(a,b) = \sup_{n\geq 1} |a_n - b_n|$$

cada vez que $a = (a_n)_{n\geq 1}$ y $b = (b_n)_{n\geq 1}$ son dos elementos de $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$. Muestre que $(\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}, d_\infty)$ es un espacio métrico separable.

22. Sea (X,d) un espacio métrico. Una familia $\mathscr{B}$ de abiertos de X es una *base* si todo abierto de X es unión de elementos de $\mathscr{B}$. Muestre que una familia $\mathscr{B}$ de abiertos de X es una base si y solamente si para todo abierto U de X y todo punto x de U existe $B \in \mathscr{B}$ tal que $x \in B \subseteq U$.

23. Sea (X, d) un espacio métrico. Si todo cubrimiento abierto de X posee un subcubrimiento numerable, entonces X es separable.

24. Todo subespacio de un espacio métrico separable es él mismo separable.

25. Sea (X, d) un espacio métrico separable.

(a) Toda familia de abiertos de X dos a dos disjuntos es a lo sumo numerable.

(b) El conjunto de puntos aislados de X es a lo sumo numerable.

26. Sean (X, d) e (Y, d') dos espacios métricos. El espacio métrico $(X \times Y, d_\infty)$ es separable si y solamente si tanto el espacio (X, d) como (Y, d') es separables.

27. ¿Es separable el espacio métrico (ℓ_∞, d_∞)?

28. Sean (X, d) e (Y, d') dos espacios métricos y sea $f : X \to Y$ una función continua y sobreyectiva.

(a) Si X es separable, entonces Y es separable.

(b) ¿Es cierto que si X es completo entonces Y es completo?