CÁLCULO AVANZADO

Segundo Cuatrimestre — 2019

Práctica 4: Continuidad y separabilidad

Continuidad

1. Sean (X,d) e (Y,d') dos espacios métricos y sea $f : X \to Y$ una función.

(a) La función f es continua en un punto x_0 de X si y solo si para toda sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ en X que converge a x_0 se tiene que $\lim f(x_n) = f(x_0)$.

(b) Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) La función f es continua.

(ii) Para todo abierto G de Y el conjunto $f^{-1}(G)$ es abierto en X.

(iii) Para todo cerrado F de Y el conjunto $f^{-1}(F)$ es cerrado en X.

Solución. (a) Supongamos que f es continua en x_0, sea $(x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en X que converge a x_0 y sea $\varepsilon > 0$. Como f es continua en x_0, existe $\delta > 0$ tal que $d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ cada vez que $d(x, x_0) < \delta$, y como la sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ converge a x_0 existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x_0) < \delta$ si $n \geq N$. Se sigue de estas dos cosas que si $n \geq N$, entonces $d(f(x_n), f(x_0)) < \delta$. En definitiva tenemos que la sucesión $(f(x_n))_{n\geq 1}$ converge a $f(x_0)$.

Probemos ahora la implicación recíproca. Supongamos que cada vez que $(x_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión en X que converge a x_0 la sucesión $(f(x_n))_{n\geq 1}$ converge a $f(x_0)$ y supongamos, para llegar a un absurdo, que f no es continua en x_0, de manera que existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ existe $y_\delta \in X$ tal que $d(y_\delta, x_0) < \delta$ y $d(f(y_\delta), f(x_n)) \geq \varepsilon$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $x_n = y_{1/n}$: tenemos entonces que $d(x_n, x_0) < 1/n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, de manera que la sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ converge a x. La hipótesis implica ahora que la sucesión $(f(x_n))_{n\geq 1}$ converge a $f(x_0)$ y, en particular, que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $d(f(x_m), f(x_0)) < \varepsilon$. Esto es absurdo, ya que $d(f(x_m), f(x_0)) = d(f(y_{1/m}), f(x_0)) \geq \varepsilon$.

(b) $(i \Rightarrow ii)$ Supongamos que f es continua, sea G un abierto de Y y sea $x \in f^{-1}(G)$. Es $f(x) \in G$ y, como G es abierto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(f(x)) \subseteq G$. Por otro lado, como f es continua en x, existe $\delta > 0$ tal que para todo $y \in X$ se tiene que $d(x,y) < \delta \implies d((f(x), f(y)) < \varepsilon$. Sea ahora $z \in B_\delta(x)$. Como $d(x,z) < \delta$, sabemos que $d(f(x), f(z)) < \varepsilon$ y, por lo tanto, que $f(z) \in B_\varepsilon(f(x)) \subseteq G$. Vemos así que $B_\delta(x) \subseteq f^{-1}(G)$ y, por lo tanto, que el conjunto $f^{-1}(G)$ es abierto.

$(ii \Rightarrow iii)$ Supongamos que para todo abierto G de Y el conjunto $f^{-1}(G)$ es abierto de X y sea F un cerrado de X. El conjunto $Y \setminus G$ es abierto, así que la hipótesis implica que $f^{-1}(Y \setminus G)$ es un abierto de X y, por lo tanto, que $f^{-1}(F) = X \setminus f^{-1}(Y \setminus F))$ es cerrado.

$(iii \Rightarrow i)$ Supongamos que para todo cerrado F de Y el conjunto $f^{-1}(F)$ es cerrado en X, sea $x \in X$ y sea $\varepsilon > 0$. El conjunto $Y \setminus B_\varepsilon(f(x))$ es un cerrado de Y, así que la hipótesis nos dice que $X \setminus f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)) = f^{-1}(Y \setminus B_\varepsilon(f(x)))$ es un cerrado de X y, por lo tanto, que $f^{-1}(B_\varepsilon(f(x))$ un abierto de X. Como $f(x) \in B_\varepsilon(f(x))$, es $x \in f^{-1}(B_\varepsilon(f(x))$ y, como este último conjunto es abierto, existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(x) \subseteq f^{-1}(B_\varepsilon(f(x))$. Ahora bien, si $y \in X$ es tal que $d(x,y) < \delta$, entonces $y \in B_\delta(x) \subseteq f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$ y, por lo tanto, $f(y) \in B_\varepsilon(f(x))$, de manera que $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Vemos así que la función f es continua en x. □

2. Decida cuáles de las siguientes funciones son continuas.

(a) $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2 + y^2 \in \mathbb{R}$, con $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}$ dotados de sus métricas euclídeas.

(b) La función identidad $(\mathbb{R}^2, \delta) \to (\mathbb{R}^2, d_\infty)$, con δ la métrica discreta.

(c) La función identidad $(\mathbb{R}^2, d_\infty) \to (\mathbb{R}^2, \delta)$, con δ la métrica discreta.

(d) La inclusión $(E, d|_E) \to (X, d)$, con (X,d) un espacio métrico cualquiera, E un subconjunto de X y $d|_E$ la métrica sobre E inducida por la de X.

Solución. (b) La preimagen de todo abierto del espacio métrico $(\mathbb{R}^2, d_\infty)$ por la función $\mathsf{id} : (\mathbb{R}^2, \delta) \to (\mathbb{R}^2, d_\infty)$ es abierta, simplemente porque *todo* subconjunto de $(\mathbb{R}^2, \delta)$ es abierto. Esto nos dice que la función es continua.

(c) El conjunto $\{(0,0)\}$ es un abierto de $(\mathbb{R}^2, \delta)$, pero su preimagen por la función $\mathsf{id} : (\mathbb{R}^2, d_\infty) \to (\mathbb{R}^2, \delta)$ no es un abierto de $(\mathbb{R}^2, d_\infty)$.

(d) Sea (X,d) un espacio métrico, sea E un subconjunto de X, sea $d|_E$ la restricción de la métrica d a E y sea $f : x \in E \mapsto x \in X$. Esta función es continua: si $\varepsilon > 0$ y x e y son dos puntos de E tales que $d|_E(x,y) < \varepsilon$, entonces $d(f(x), f(y)) = d|_E(x,y) < \varepsilon$. □

3. Sean f, g, $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ las funciones tales que para todo $x \in [0,1]$ se tiene

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Q}; \\ 1 & \text{si } x \notin \mathbb{Q}; \end{cases} \qquad g(x) = x f(x); \quad h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q}; \\ \frac{1}{n} & \text{si } x = \frac{m}{n} \text{ y } (m,n) = 1; \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Muestre que f es discontinua en todos los puntos de su dominio, que g es continua únicamente en 0, y que h es continua en $[0,1] \setminus \mathbb{Q}$ y en ningún otro punto de $[0,1]$.

Solución. (a) Sea $x \in [0,1]$ y sea $\varepsilon := 1/4$. Si $\delta > 0$, entonces hay puntos a y b en $[0,1] \cap (x - \delta, x + \delta)$ tales que $a \in \mathbb{Q}$ y $b \notin \mathbb{Q}$, y entonces $0 = f(a) \in f(B_\delta(x))$ y $1 = f(b) \in f(B_\delta(x))$, así que $\operatorname{diam} f(B_\delta(x)) \geq 1$: como $\operatorname{diam} B_\varepsilon(f(x)) = 1/2$, es claro que $f(B_\delta(x)) \nsubseteq B_\varepsilon(f(x))$. Como esto es así cualquiera sea $\delta > 0$, vemos que f no es continua en x.

(b) Supongamos que $x \in (0,1)$ y que la función g es continua en x. Como la función $k : x \in (0,1] \mapsto 1/t \in \mathbb{R}$ es continua, tenemos entonces que $k \cdot g$ es continua en x: pero este producto es la función $f|_{(0,1]}$, que no es continua en x, ya que es la restricción de la función f, que no es continua en x, al entorno abierto $(0,1]$ de x en $[0,1]$. Concluimos de esta forma que el único punto en el que g puede ser continua es 0.

Mostremos que, efectivamente, es allí continua. Sea $\varepsilon > 0$. Si $y \in [0,1]$ es tal que $d(x,y) < \varepsilon$, entonces como $f(y) \in \{0,1\}$, tenemos que $g(y) \in \{0,y\}$ y, por lo tanto, que $d(g(0), g(y)) = |g(y)| \leq y < \varepsilon$.

(c) Sea $x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$, sea $\varepsilon > 0$ y sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $\varepsilon > 1/n$. El conjunto

$$F = \{a/b \in \mathbb{Q} : 0 \leq a \leq b \leq n,\ b \neq 0\}$$

tiene por elementos todos los números racionales de $[0,1]$ que se pueden escribir en la forma a/b con $a \in \mathbb{N}_0$, $b \in \mathbb{N}$, $(a,b) = 1$ y $b \leq n$. Es finito, así que es cerrado, y entonces $U = [0,1] \setminus F$ es un abierto de $[0,1]$. Como todos los elemento de F son racionales y $x \notin \mathbb{Q}$, tenemos que $x \in U$: así, U es un entorno abierto de x. Sea $y \in U$. Claramente, o bien $y \notin \mathbb{Q}$ o bien $y \in \mathbb{Q}$. En el primer caso tenemos que $|h(y)| = 0 < \varepsilon$. En el segundo, como $y \in [0,1]$ y $y \notin F$, cuando escribimos $y = a/b$ con $a \in \mathbb{N}_0$, $b \in \mathbb{N}$ y $(a,b) = 1$, se tiene que $b > n$ y, por lo tanto, que $|h(y)| = 1/b < 1/n < \varepsilon$. Vemos así que para todo $y \in U$ es $|h(x) - h(y)| < \varepsilon$. Eso nos dice que la función h es continua en x.

Supongamos ahora que $x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$. Sabemos que existe una sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ de números irracionales contenidos en $[0,1]$ que converge a x y claramente tenemos que $\lim_{n\to\infty} h(x_n) = 0$. Como $h(x) \neq 0$, vemos que h no es continua en x. □

4. Un espacio métrico (X,d) es discreto si y solamente si toda función $X \to Y$ con valores en un espacio métrico (Y,d') es continua.

Solución. Supongamos primero que (X,d) es discreto, sea (Y,d') otro espacio métrico y sea $f : X \to Y$ una función. Si U es un abierto de Y, entonces el conjunto $f^{-1}(U)$ es un abierto de X, simplemente porque todos los subconjuntos de X son abiertos: esto nos dice, como ya sabemos, que la función f es continua.

Supongamos ahora que para todo espacio métrico (Y,d') se tiene que toda función $f : X \to Y$ es continua. En particular, si δ es la métrica discreta en X, la función $\mathrm{id} : (X,d) \to (X,\delta)$ es continua y, por lo tanto, todo subconjunto A de X es abierto para d, ya que coincide con $\mathrm{id}^{-1}(A)$ y A es abierto para δ. Esto muestra que (X,d) es discreto. □

5. *Métricas topológicamente equivalentes.*

(a) Sea X un conjunto y sean d_1 y d_2 dos métricas sobre X. Si existen dos números reales α y β tales que

$$d_1(x,y) \leq \alpha d_2(x,y) \leq \beta d_1(x,y)$$

para todo x, $y \in X$, entonces las métricas d_1 y d_2 son topológicamente equivalentes.

(b) Dos métricas d_1 y d_2 sobre un conjunto X son topológicamente equivalentes si y solamente si la función identidad $(X,d_1) \to (X,d_2)$ es un homeomorfismo.

(c) Si $1 \leq p,q \leq \infty$, entonces las métricas d_p y d_q sobre $\mathbb{R}^n$ son topológicamente equivalentes.

(d) La función $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$d(x,y) = \left| \frac{x}{1+|x|} - \frac{y}{1+|y|} \right|$$

cada vez que x e y están en $\mathbb{R}$ es una métrica equivalente a la métrica euclídea pero para la que el espacio métrico $(\mathbb{R},d')$ no es completo.

Solución. (a) Supongamos que existen α y β en $\mathbb{R}$ que satisfacen la condición del enunciado. Si X tiene un único punto, entonces las dos métricas coinciden y son obviamente topológicamente equivalentes. Supongamos entonces que hay en X dos puntos distintos x_1 y x_2. Como $0 < d_1(x_1,x_2) \leq \alpha d_2(x_1,x_2) \leq \beta d_1(x_1,x_2)$, tenemos que $\alpha > 0$ y $\beta > 0$.

Sea U un abierto de X para d_1 y sea $x \in U$. Como U es abierto para d_1, existe $r > 0$ tal que $B_r(x,d_1) \subseteq U$. Si ahora $y \in B_{r/\alpha}(x,d_2)$, entonces

$$d_1(x,y) \leq \alpha d_2(x,y) < \alpha r/\alpha = r,$$

así que $y \in B_r(x,d_1) \subseteq U$: vemos así que $B_{r/\alpha}(x,d_2) \subseteq U$ y, en definitiva, que U es un abierto para d_2.

Recíprocamente, sea V un abierto de X para la métrica d_2 y sea $x \in V$. Como V es abierto para d_2, existe $r > 0$ tal que $B_r(x,d_2) \subseteq V$. Si $y \in B_{\alpha r/\beta}(x,d_1)$, entonces $\alpha d_2(x,y) \leq \beta d_1(x,y) < \beta\alpha r/\beta = \alpha r$, de manera que $d_2(x,y) < r$ y, por lo tanto, $y \in B_r(x,d_2)$. Esto muestra que $B_{\alpha r/\beta}(x,d_1) \subseteq V$ y, en definitiva, que V es un abierto para la métrica d_1.

(b) Sean d_1 y d_2 dos métricas sobre un conjunto X. Es inmediato que la función identidad $\mathsf{id} : (X,d_1) \to (X,d_2)$ es continua si y solamente si todo abierto para d_2 es abierto para d_1 y, por lo tanto, su inversa $\mathsf{id} : (X,d_2) \to (X,d_1)$ es continua si y solamente si todo abierto para d_1 es abierto para d_1. Vemos así que $\mathsf{id} : (X,d_1) \to (X,d_2)$ es un homeomorfismo si y solamente si los abiertos para d_1 y los abiertos para d_2 coinciden, es decir, si y solamente si d_1 y d_2 son topológicamente equivalentes.

(c) Si $n = 0$ no hay nada que probar, así que suponemos que $n > 0$. Por otro lado, ya probamos que las métricas d_1, d_2 y d_∞ son equivalentes en un ejercicio anterior, así que es suficiente que mostremos que las métricas d_p con $p \in (1,\infty)$ son equivalentes entre sí.

Fijemos entonces p, $q \in (1,\infty)$. Para todo $r > 1$ las funciones $t \in \mathbb{R} \mapsto |t|^r \in \mathbb{R}$ y $t \in (0,+\infty) \to t^{1/r} \in (0+\infty)$ son diferenciables con continuidad y esto implica inmediatamente que la función

$$(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \mapsto \|x\|_p \in (0,+\infty)$$

es diferenciable con continuidad. Como la esfera unidad $S_q = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_q = 1\}$ es un compacto de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, existe entonces una constante $\alpha_{p,q}$ que es cota superior para esa función sobre S_q: esto significa que

$$\|x\|_p \leq \alpha_{p,q} \text{ para todo } x \in S_q.$$

Como hay elementos no nulos en S y estos tienen p-norma positiva, es claro que $\alpha_{p,q} > 0$. Si ahora x es un punto cualquiera de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, entonces $x/\|x\|_q$ es un elemento de S_q y, por lo tanto, tenemos que

$$\left\| \frac{x}{\|x\|_q} \right\|_p \leq \alpha_{p,q},$$

de manera que

$$\|x\|_p \leq \alpha_{p,q}\|x\|_q.$$

Si $x = 0$ esta última desigualdad también vale, así que vale cualquiera sea $x \in \mathbb{R}^n$. Por supuesto, también tenemos que

$$\|x\|_q \leq \alpha_{q,p}\|x\|_p$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y estas dos desigualdades implican que inmediatamente que

$$d_p(x,y) \leq \alpha_{p,q} d_q(x,y), \qquad d_q(x,y) \leq \alpha_{q,p} d_p(x,y)$$

cualesquiera sean x e y en $\mathbb{R}^n$ y, por lo tanto, que las métricas d_p y d_q son topológicamente equivalentes.

Determinemos explícitamente y de manera óptima la constante $\alpha_{p,q}$. Supongamos que $p \neq q$; si no es ese el caso podemos tomar simplemente $\alpha_{p,q} = 1$. Las funciones $f = \|-\|_p^p$ y $g = \|-\|_q^q$ son diferenciables con continuidad en $\mathbb{R}^n \setminus 0$, así que el método de los multiplicadores de Lagrange nos dice que en todo punto ξ del conjunto $S = \{x \in \mathbb{R}^n \setminus 0 : g(x) = 1\}$ donde la función f alcanza un extremo relativo a S se tiene que existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$g(\xi) = 1, \qquad \nabla f(\xi) = \lambda \nabla g(\xi). \tag{1}$$

Para cada $i \in [\![n]\!]$ es $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\xi) = p|\xi_i|^{p-1}$, así que las dos ecuaciones (1) son equivalentes a las $n+1$ ecuaciones

$$|\xi_1|^q + \cdots + |\xi_n|^q = 1, \qquad p|\xi_1|^{p-1} = q\lambda|\xi_1|^{q-1}, \quad \ldots, \quad p|\xi_n|^{p-1} = q\lambda|\xi_n|^{q-1}. \tag{2}$$

Sea $I = \{i \in [\![n]\!] : \xi_i \neq 0\}$. La primera ecuación implica que $I \neq \emptyset$. Por otro lado, si $i \in I$, entonces la $(i+1)$-ésima ecuación nos dice que

$$\lambda = \frac{p|\xi_i|^{p-1}}{q|\xi_i|^{q-1}}. \tag{3}$$

Como la función

$$t \in (0,+\infty) \mapsto \frac{pt^{p-1}}{qt^{q-1}} \in (0,+\infty)$$

es o estrictamente creciente o estrictamente decreciente dependiendo de si $p > q$ o $p < q$, es en cualquier caso inyectiva: de las igualdades (3) vemos entonces que existe $a \in (0,\infty)$ tal que $|\xi_i| = a$ para todo $i \in I$. Volviendo ahora a la primera ecuación de (2) vemos que si ponemos $m := \#I$ es $a = m^{-1/q}$ y que $f(\xi) = m^{1/p-1/q}$. Concluimos de esta forma que el valor máximo de f en el conjunto S_q es uno de los n números

$$m^{1/p-1/q}, \qquad \text{con } m \in [\![n]\!]. \tag{4}$$

Tenemos ahora dos casos.

- Supongamos primero que $q > p$. El punto $\zeta = (n^{-1/q}, \ldots, n^{-1/q})$ pertenece a S_q y $f(\zeta) = n^{1/p-1/q}$. Como $n^{1/p-1/q}$ es el más grande de los números listados en (4), vemos que es el máximo de f en S_q.
- Si en cambio $q < p$, entonces $\zeta = (1,0,\ldots,0) \in S_q$ y $f(\zeta) = 1$. Como $m^{1/p-1/q} \leq 1$ para todo $m \in [\![n]\!]$, vemos que el máximo de f en S_q en este caso es 1.

La conclusión de esto es que si $p \neq q$ la menor constante $\alpha_{p,q}$ que podemos elegir para que se tenga

$$\|x\|_p \leq \alpha_{p,q}\|x\|_q \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^n$$

es

$$\alpha_{p,q} = \begin{cases} n^{1/p-1/q} & \text{si } q > p; \\ 1 & \text{si } q < p. \end{cases}$$

Podemos obtener este mismo resultado en el caso en que $q > p$ usando la desigualdad de Hölder. Recordemos que si x e y son dos elementos de $\mathbb{R}^n$ y r y s son dos números de $[1,+\infty)$ tales que $1/r + 1/s = 1$, entonces la desigualdad de Hölder nos dice que

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i||y_i| \le \|x\|_r \|y\|_s.$$

En particular, si $z \in \mathbb{R}^n$, $p, q \in \mathbb{R}$ son tales que $1 < p < q$, y ponemos $x = (|z_1|^p, \cdots, |z_n|^p)$, $y = (1,\ldots,1)$, $r = q/p$ y $s = 1/(1-1/r)$, de la desigualdad de Hölder vemos que

$$\sum_{i=1}^{n} |z_i|^p \le \left(\sum_{i=1}^{n} |z_i|^{p\cdot q/p}\right)^{p/q} \left(\sum_{i=1}^{n} 1^s\right)^{1/s} = n^{1-p/q} \|z\|_q^p$$

y, por lo tanto, tomando raíces p-ésimas que

$$\|z\|_p \le n^{1/q-1/q} \|z\|_q.$$

Como eligiendo $z = (1,\ldots,1)$ vale la igualdad, esto muestra que la mejor constante es $n^{1/q-1/p}$, como dijimos arriba.

(d) Es evidente que la función d del enunciado es simétrica, no negativa y que se anula cuando sus argumentos son iguales. Por otro lado, si x e y son elementos de $\mathbb{R}$ tales que tales que $d(x,y) = 0$, entonces claramente tenemos que

$$\frac{x}{1+|x|} = \frac{y}{1+|y|}$$

y, tomando valores absolutos, que

$$\frac{|x|}{1+|x|} = \frac{|y|}{1+|y|}.$$

Como la función $f : t \in [0,\infty) \mapsto t/(1+t) \in [0,\infty)$ es estrictamente creciente —ya su derivada es estrictamente positiva— es una función inyectiva y, por lo tanto, de la última igualdad deducimos que $|x| = |y|$. Si multiplicamos ahora nuestra primera igualdad por $1+|x|$, entonces podemos concluir que $x = y$.

Nos queda mostrar que la función d satisface la desigualdad triangular, pero esto es inmediato: si x, y y z tres elementos de $\mathbb{R}$, entonces

$$d(x,z) = \left|\frac{x}{1+|x|} - \frac{z}{1+|z|}\right| \le \left|\frac{x}{1+|x|} - \frac{y}{1+|y|}\right| + \left|\frac{y}{1+|y|} - \frac{z}{1+|z|}\right|$$

simplemente por la desigualdad triangular de la métrica euclídea de $\mathbb{R}$, y esto es

$$= d(x,y) + d(y,z).$$

Sean x e y son dos elementos de $\mathbb{R}$. Si $x \ge y$, entonces

$$\begin{aligned} d(x,y) &= \left|\frac{x}{1+|x|} - \frac{y}{1+|y|}\right| = \frac{x}{1+|x|} - \frac{y}{1+|y|} \le \frac{x}{1+|y|} - \frac{y}{1+|y|} \\ &= \frac{|x-y|}{1+|y|} \le d_2(x,y). \end{aligned}$$

y si $x < y$ vale también que $d(x,y) \leq d_2(x,y)$ porque ambas métricas son simétricas. De esto se deduce que para cada $x \in \mathbb{R}$ y cada $r > 0$ es $B_r(x,d_2) \subseteq B_r(x,d)$ y, por lo tanto, que todo abierto para d es abierto para d_2.

Por otro lado, si $x \in \mathbb{R}$ y $r > 0$, entonces $y \in B_r(x,d)$ si y solamente si

$$\left|\frac{y}{1+|y|} - \frac{x}{1+|x|}\right| < s,$$

es decir, si $y/(1+|y|)$ pertenece al intervalo abierto

$$\left(\frac{x}{1+|x|} - s, \frac{x}{1+|x|} + s\right)$$

En otras palabras, $B_r(x,d)$ es la preimagen de este intervalo abierto por la función $t \in \mathbb{R} \mapsto t/(1+|t|) \in \mathbb{R}$, que es manifiestamente continua: esto nos dice $B_r(x,d)$ es un abierto para la métrica euclídea d_2.

Concluimos de esta forma que d y d_2 son métricas topológicamente equivalentes sobre $\mathbb{R}$. Sabemos que $\mathbb{R}$ es completo con respecto a d_2: veamos, para terminar con el ejercicio, que $\mathbb{R}$ no es completo con respecto a la métrica d.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ es

$$d(n+1,n) = \left|\frac{(n+1)}{2+n} - \frac{n}{1+n}\right| = \left|\frac{(n+1)^2 - n(n+2)}{(n+1)(n+2)}\right| = \frac{1}{(n+1)(n+2)},$$

así que si n, m y N son elementos de $\mathbb{N}$ tales que $n \geq m \geq N$ se tiene

$$\begin{aligned} d(n,m) &\leq \sum_{i=m}^{n-1} d(i+1,i) \leq \sum_{i=m}^{n-1} \frac{1}{(i+1)(i+2)} = \sum_{i=m}^{n-1}\left(\frac{1}{i+1} - \frac{1}{i+2}\right) \\ &= \frac{1}{m+1} - \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{N+1}. \end{aligned}$$

Esto nos dice que la sucesión $(n)_{n\geq 1}$ es de Cauchy para la métrica d. Sin embargo no converge con respecto a d: en efecto, como d y d_2 son equivalentes, si lo hiciera también convergería con respecto a d_2 y es evidente no lo hace. □

6. Consideremos a todos los espacios $\mathbb{R}^n$ con sus métricas euclídeas. Muestre que

(a) el conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y(e^x - 1) = -1\}$ es cerrado,

(b) el conjunto $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -1 \leq x^3 - 3y^4 + z - 2 \leq 3\}$ es cerrado, y

(c) el conjunto $\{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in \mathbb{R}^5 : 3 < x_1 - x_2\}$ es abierto.

¿Puede dar otras métricas no equivalentes a las euclídeas para las que estas afirmaciones sigan siendo válidas?

Solución. La función $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2 + y(e^x - 1) \in \mathbb{R}$ es continua, así que el conjunto $f^{-1}(\{-1\})$, que es el de (a), es un cerrado de $\mathbb{R}^2$.

La función $g : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto x^3 - 3y^4 + z - 2 \in \mathbb{R}$ es continua, así que el conjunto $g^{-1}([-1,3])$, que coincide con el de (b), es un cerrado de $\mathbb{R}^3$.

La función $h : (x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in \mathbb{R}^5 \mapsto x_1 - x_2 \in \mathbb{R}$ es continua, así que el conjunto $h^{-1}((3,+\infty))$, el de (c), es abierto en $\mathbb{R}^5$. □

7. Sea $C[0,1]$ el conjunto de las funciones $[0,1] \to \mathbb{R}$ que son continuas y sean

$E, I : C[0,1] \to \mathbb{R}$ las funciones tales que

$$E(f) = f(0), \qquad I(f) = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$$

para toda $f \in C[0,1]$.

(a) Tanto E como I son continuas sobre $(C[0,1], d_\infty)$.

(b) La función I es continua sobre $(C[0,1], d_1)$ pero la función E no lo es.

(c) ¿Hay alguna función $F : C[0,1] \to \mathbb{R}$ que sea continua para la métrica d_1 pero no para la métrica d_∞?

Solución. (a) Sea $f \in C[0,1]$ y sea $\varepsilon > 0$. Si $g \in C[0,1]$ es tal que

$$d_\infty(f,g) = \sup_{t\in[0,1]} |f(t) - g(t)| < \varepsilon,$$

entonces por un lado tenemos que

$$|E(f) - E(g)| = |f(0) - g(0)| \leq \sup_{t\in[0,1]} |f(t) - g(t)| < \varepsilon$$

y, por otro, como para todo $\tau \in [0,1]$ es $|f(\tau) - g(\tau)| < \varepsilon$, tenemos que

$$\begin{aligned}|I(f) - I(g)| &= \left| \int_0^1 f(\tau)\,\mathrm{d}\tau - \int_0^1 g(\tau)\,\mathrm{d}\tau \right| = \left| \int_0^1 (f(\tau) - g(\tau))\,\mathrm{d}\tau \right| \\ &\leq \int_0^1 |f(\tau) - g(\tau)|\,\mathrm{d}\tau < \int_0^1 \varepsilon\,\mathrm{d}\tau = \varepsilon\end{aligned}$$

(En la última desigualdad usamos el hecho de que si g y h son funciones continuas en $[0,1]$ y $g < h$ entonces $\int_0^1 g < \int_0^1 h$.) Hemos mostrado entonces que $E(B_\varepsilon(f, d_\infty)) \subseteq B_\varepsilon(E(f))$ y que $I(B_\varepsilon(f, d_\infty)) \subseteq B_\varepsilon(I(f))$. Así, las funciones E e I son continuas en f con respecto a la métrica d_∞.

(b) Sean otra vez $f \in C[0,1]$ y $\varepsilon > 1$ y sea ahora $g \in B_\varepsilon(f, d_1)$. En ese caso tenemos que

$$\begin{aligned}|I(f) - I(g)| &= \left| \int_0^1 f(\tau)\,\mathrm{d}\tau - \int_0^1 g(\tau)\,\mathrm{d}\tau \right| = \left| \int_0^1 (f(\tau) - g(\tau))\,\mathrm{d}\tau \right| \\ &\leq \int_0^1 |f(\tau) - g(\tau)|\,\mathrm{d}\tau = d_1(f,g) < \varepsilon.\end{aligned}$$

Así, $I(B_\varepsilon(f, d_1)) \subseteq B_\varepsilon(I(f))$ para todo $\varepsilon > 0$ y, por lo tanto, la función I es continua en f.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos la función $f_n : t \in [0,1] \mapsto (1-t)^n \in \mathbb{R}$, que pertenece a $C[0,1]$. Es

$$d_1(f_n, 0) = \int_0^1 |(1-\tau)^n|\,\mathrm{d}\tau = \int_0^1 (1-\tau)^n\,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{n+1},$$

así que claramente la sucesión $(f_n)_{n\geq1}$ converge a 0 con respecto a d_1. Por otro lado, $E(f_n) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, así que la sucesión $(E(f_n))_{n\geq1}$ converge a 1, que es distinto de $E(0)$. Esto muestra que la función E no es continua con respecto a la métrica d_1.

(c) Supongamos que $F : C[0,1] \to \mathbb{R}$ es una función que es continua con respecto a la métrica d_1 y sean $f \in C[0,1]$ y $\varepsilon > 0$. Como F es continua con respecto a d_1, existe $\delta > 0$ tal que $F(B_\delta(f,d_1)) \subseteq B_\varepsilon(F(f))$. Por otro lado, si $g \in B_\delta(f,d_\infty)$, entonces

$$d_1(f,g) = \int_0^1 |f(\tau)-g(\tau)|\,\mathrm{d}\tau \le \sup_{\tau\in[0,1]} |f(\tau)-g(\tau)| = d_\infty(f,g) < \delta,$$

así que $B_\delta(f,d_\infty) \subseteq B_\delta(f,d_1)$ y, por lo tanto,

$$F(B_\delta(f,d_\infty)) \subseteq F(B_\delta(f,d_1)) \subseteq B_\varepsilon(F(f)).$$

Esto muestra que F es continua en f con respecto a d_∞. □

8. Sean (X,d) e (Y,d') dos espacios métricos y pongamos en $X \times Y$ la métrica d_1. Si una función $f : X \to Y$ es continua, entonces el *gráfico* de f, es decir, el conjunto

$$G(f) = \{(x,f(x)) \in X \times Y : x \in X\}$$

es un cerrado de $X \times Y$. ¿Vale la afirmación recíproca?

Solución. Sea $f : X \to Y$ una función continua y mostremos que $G(f)$ es cerrado en $X \times Y$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea p_n un punto de $G(f)$ y supongamos que la sucesión $(p_n)_{n\ge1}$ converge en $X \times Y$ a $p = (x,y)$. Si $n \in \mathbb{N}$, entonces que p_n pertenezca a $G(f)$ significa que existe $x_n \in X$ tal que $p_n = (x_n, f(x_n))$. Es

$$d(x_n,x) \le d(x_n,x) + d(f(x_n),y) = d(p_n,p)$$

y

$$d(f(x_n),y) \le d(x_n,x) + d(f(x_n),y) = d(p_n,p)$$

así que, como $\lim_{n\to\infty} d(p_n,p) = 0$, tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n,x) = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} d(f(x_n),y) = 0,$$

y esto nos dice que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x, \qquad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = y.$$

Ahora bien, nuestra hipótesis de que f es continua implica que $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$ y, por lo tanto, que $y = f(x)$. Vemos así que $p = (x,y) = (x,f(x)) \in G(f)$ y, por lo tanto, que $\overline{G(f)} \subseteq G(f)$, es decir, que $G(f)$ es cerrado.

Consideremos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que si $x \in \mathbb{R}$ es

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0; \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

El gráfico $G(f)$ es un cerrado de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ pero es claro que f no es continua. La implicación recíproca a la del enunciado no es, por lo tanto, cierta. □

9. Sean (X,d) e (Y,d') dos espacios métricos y sea $f : X \to Y$ una función. Decida si las siguientes afirmaciones son válidas:

(a) Si $\mathscr{U}$ es un cubrimiento abierto de X y para todo $U \in \mathscr{U}$ es continua la restricción $f|_U : U \to Y$, entonces la función $f : X \to Y$ es continua.

(b) Si $\mathscr{F}$ es un cubrimiento cerrado de X y para todo $F \in \mathscr{F}$ es continua la restricción $f|_F : F \to Y$, entonces la función $f : X \to Y$ es continua.

(c) Si $\mathscr{F}$ es un cubrimiento cerrado y finito de X y para todo $F \in \mathscr{F}$ la restricción $f|_F : F \to Y$ es continua, entonces la función $f : X \to Y$ es continua.

(d) Si $\mathscr{Q}$ es un cubrimiento finito de X y para todo $Q \in \mathscr{G}$ la restricción $f|_Q : Q \to Y$ es continua, entonces $f : X \to Y$ es continua.

Solución. (a) Sea $\mathscr{U}$ un cubrimiento abierto de X y supongamos que para todo $U \in \mathscr{U}$ la función $f|_U : U \to Y$ es continua. Sea V un abierto de Y. Si $U \in \mathscr{U}$, entonces la continuidad de $f|_U$ implica que $(f|_U)^{-1}(V)$ es un abierto de U y, como U es abierto en X, un abierto de X. Tenemos entonces que

$$f^{-1}(V) = f^{-1}(V) \cap X = f^{-1}(V) \cap \bigcup_{U \in \mathscr{U}} U = \bigcup_{U \in \mathscr{U}} (f^{-1}(V) \cap U) = \bigcup_{U \in \mathscr{U}} (f|_U)^{-1}(V)$$

y esto muestra que $f^{-1}(V)$ es abierto, ya que lo exhibe como unión de abiertos. Vemos así que f es continua.

(b) Sea $f : X \to Y$ una función que no es continua y pongamos $\mathscr{F} = \{\{x\} : x \in X\}$. Es claro que $\mathscr{F}$ es un cubrimiento de X por cerrados y que para todo $F \in \mathscr{F}$ la restricción $f|_F : F \to Y$ es continua. La afirmación del enunciado es por lo tanto falsa en general.

(c) Sea $f : X \to Y$ una función, sea $\mathscr{F}$ un cubrimiento cerrado y finito de X y supongamos que para cada $F \in \mathscr{F}$ la restricción $f|_F : F \to Y$ es continua. Sea G un cerrado de Y. Si $F \in \mathscr{F}$, el conjunto $(f|_F)^{-1}(G)$ es un cerrado de F porque la restricción $f|_F$ es continua, y, como F es cerrado en X, también un cerrado de X. Como

$$f^{-1}(G) = f^{-1}(G) \cap X = f^{-1}(G) \cap \bigcup_{F \in \mathscr{F}} F = \bigcup_{F \in \mathscr{F}} (f^{-1}(G) \cap F) = \bigcup_{F \in \mathscr{F}} (f|_F)^{-1}(G),$$

vemos que $f^{-1}(G)$ es una unión finita de cerrados, así que es él mismo cerrado. Esto muestra que la función f es continua.

(d) Sean $X = Y = \mathbb{R}$, sea $\mathscr{Q} = \{(-\infty, 0], (0, +\infty)\}$ y sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función tal que para cada $x \in \mathbb{R}$ es

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0; \\ 1 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Es inmediato verificar que para cada $Q \in \mathscr{Q}$ la restricción $f|_Q$ es continua y que, sin embargo, la función f misma no lo es. Esto muestra que la afirmación del enunciado es falsa. □

10. Sea X un espacio métrico. Una familia $\mathscr{F}$ de subconjuntos de X es *localmente finita* si para todo $x \in X$ existe un entorno U de x en X tal que el conjunto $\{F \in \mathscr{F} : F \cap U \neq \varnothing\}$ es finito.

(a) Si $\mathscr{F}$ es una familia localmente finita de cerrados de X, entonces $\bigcup_{F \in \mathscr{F}} F$ es un cerrado de X.

(b) Si $\mathscr{F}$ es un cubrimiento cerrado y localmente finito de X y $f : X \to Y$ es una función con valores en un espacio métrico Y tal que para todo $F \in \mathscr{F}$ la restricción $f|_F : F \to Y$ es continua, entonces f misma es una función continua.

Solución. (a) Sea $\mathscr{F}$ una familia localmente finita de cerrados de X y sea $G = \bigcup_{F\in\mathscr{F}} F$. Queremos mostrar que G es cerrado. Sea $x \in \overline{G}$. Como $\mathscr{F}$ es localmente finita, existe un entorno U tal que $\mathscr{F}_U = \{F \in \mathscr{F} : F \cap U \neq \varnothing\}$ es finito y, sin pérdida de generalidad (reemplazando a U por su interior, si es necesario) podemos suponer que U es abierto. Como x está en $\overline{G}$, hay una sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ con valores en G que converge a x. En particular, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in U$ si $n \geq N$.

Ahora bien, si $n \geq N$, el punto x_n está tanto en U como en G, así que está en $G \cap U = \bigcup_{F\in\mathscr{F}} F \cap U = \bigcup_{F\in F_U} F \cap U$ y existe $F \in \mathscr{F}_U$ tal que $x_n \in F$. Vemos de esta forma que hay una función $\phi : \mathbb{N}_{\geq N} \to \mathscr{F}_U$ tal que $x_n \in \phi(n)$ para todo $n \geq N$. Como $\mathscr{F}_U$ es un conjunto finito y $\mathbb{N}_{\geq N}$ no lo es, es claro que existe $F_0 \in \mathscr{F}_U$ tal que $\{n \in \mathbb{N}_{\geq N} : x_n \in F_0\}$ es infinito: esto nos dice que la sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ posee una subsucesión que toma valores en F_0. Como la sucesión converge a x y F_0 es cerrado, esto implica, por supuesto, que $x \in F_0 \subseteq G$. Hemos mostrado con todo esto que $\overline{G} \subseteq G$ y, por lo tanto, que G es cerrado.

(b) Sea $\mathscr{F}$ un cubrimiento cerrado y localmente finito de X y sea $f : X \to Y$ una función con valores en un espacio métrico Y y tal que para todo $F \in \mathscr{F}$ la restricción $f|_F : F \to Y$ es continua. Sea G un cerrado de Y. Es

$$f^{-1}(G) = \bigcup_{F\in\mathscr{F}} (f|_F)^{-1}(G).$$

Si $F \in \mathscr{F}$, entonces el conjunto $(f|_F)^{-1}(G)$ es un cerrado de F y, como F es cerrado en X, de X. Más aún, la familia $\{(f|_F)^{-1}(G) : F \in \mathscr{F}\}$ es localmente finita en X: si $x \in X$, entonces como $\mathscr{F}$ es localmente finita, hay un entorno U de X tal que el conjunto $\mathscr{F}_U = \{F \in \mathscr{F} : F \cap U \neq \varnothing\}$ es finito, y es evidente que $\{F \in \mathscr{F} : U \cap (f|_F)^{-1}(G) \neq \varnothing\}$ está contenido en $\mathscr{F}_U$. La primera parte del ejercicio, entonces, nos dice que $f^{-1}(G)$ es un cerrado de X, ya que es la unión de una familia localmente finita de cerrados de X. □

11. Sea (X, d) un espacio métrico. Una función $f : X \to \mathbb{R}$ es continua si y solamente si para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ los conjuntos $\{x \in X : f(x) < \alpha\}$ y $\{x \in X : f(x) > \alpha\}$ son abiertos.

Solución. Sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función y supongamos que f satisface la condición del enunciado. Sea $x \in X$ y sea $\varepsilon > 0$. De acuerdo a la hipótesis, el conjunto

$$U = \{y \in X : f(y) < f(x) + \varepsilon\} \cap \{y \in X : f(y) > f(x) - \varepsilon\}$$

es un abierto de X y claramente contiene a x, así que se trata de un entorno de x. Como $f(U) \subseteq B_\varepsilon(f(x))$, esto muestra que f es continua en x.

Para probar la recíproca, supongamos que la función f es continua. Si $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces los conjuntos $(-\infty, \alpha)$ y $(\alpha, +\infty)$ son abiertos de $\mathbb{R}$, así que las preimágenes $f^{-1}((-\infty, \alpha))$ y $f^{-1}((\alpha, +\infty))$ son abiertos: estas dos preimágenes son precisamente los dos conjuntos que aparecen en el enunciado. □

12. Sea (X,d) un espacio métrico. Si A es un subconjunto no vacío de X, entonces la función $d_A : x \in X \mapsto d(x,A) \in \mathbb{R}$ es uniformemente continua.

Solución. Sea $\varepsilon > 0$ y sean x e y dos puntos de B tales que $d(x,y) < \varepsilon$. En la práctica anterior probamos que $|d(x,A) - d(y,A)| \leq d(x,y)$ y, por lo tanto que $|d_A(x) - d_A(y)| < \varepsilon$. Esto muestra que la función d_A es uniformemente continua. □

13. *Teorema de Urysohn.* Sea (X,d) un espacio métrico

(*a*) Si A y B son dos cerrados disjuntos de X, entonces existe una función $f : X \to \mathbb{R}$ que es continua y tal que $f|_A \equiv 0$, $f|_B \equiv 1$ y $0 \leq f(x) \leq 1$ para todo $x \in X$.

Sugerencia. Considere la función f tal que $f(x) = \dfrac{d_A(x)}{d_A(x) + d_B(y)}$.

(*b*) Si A y B son dos cerrados disjuntos de X, entonces existen abiertos U y V de X tales que $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ y $U \cap V = \varnothing$.

Solución. Consideremos la función

$$f : x \in X \mapsto \frac{d_A(x)}{d_A(x) + d_B(x)} \in \mathbb{R}.$$

Como las funciones d_A, $d_B : X \to X$ son continuas y la función $d_A + d_B$ no se anula en ningún punto de X porque A y B son cerrados y disjuntos, la función f es continua. Es claro que satisface las tres condiciones del enunciado. Más aún, si ponemos $U = f^{-1}((-\infty, 1/2))$ y $V = f^{-1}((1/2, +\infty))$, entonces es claro que $U \cap V = \varnothing$, que $U \supseteq A$ y que $V \supseteq B$. □

14. Una función $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ es siempre continua. ¿Puede ser un homeomorfismo? ¿Qué puede decirse en este sentido de una función $\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$?

Solución. Sea $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ una función. Como todo subconjunto de $\mathbb{Z}$ es abierto, es claro que f es continua. Supongamos que además es un homeomorfismo, de manera que hay una función continua y biyectiva $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$. La sucesión $(1/n)_{n \geq 1}$ es inyectiva y converge a 0, así que la sucesión $(g(1/n))_{n \geq 1}$ es inyectiva y converge a $g(0)$. Esto es imposible: como el espacio métrico $\mathbb{Z}$ es discreto, toda sucesión convergente en él es a la larga constante.

Toda función $\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ es continua, otra vez porque $\mathbb{Z}$ es un espacio métrico discreto, pero no puede ser nunca un homeomorfismo simplemente porque no hay ninguna función biyectiva $\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$. □

15. Sea (X,d) un espacio métrico. La función $\Delta : x \in X \mapsto (x,x) \in X \times X$ es un homeomorfismo de X a su imagen $\Delta(X)$ y el conjunto $\Delta(X)$ es cerrado en $X \times X$.

Solución. Si $\varepsilon > 0$, entonces cada vez que x e y son puntos de X tales que $d(x,y) < \varepsilon/2$ se tiene que $d(\Delta(x), \Delta(y)) = 2d(x,y) < \varepsilon$: esto muestra que la función Δ es uniformemente continua. Como es claramente inyectiva, la correstricción $\Delta|^{\Delta(X)} : X \to \Delta(X)$ es una biyección. Sabemos que la proyección $\pi : (x,y) \in X \times X \mapsto x \in X$ es una función continua, así que su restricción $\pi|_{\Delta(X)} : \Delta(X) \to X$ también es continua. Es claro que $\Delta|^{\Delta(X)}$ y $\pi|_{\Delta(X)}$ son funciones inversas, así que se trata de homeomorfismos.

Observemos que $\Delta(X)$ es el gráfico de la función $\mathrm{id} : X \to X$, que es continua, así que, como probamos arriba, se trata de un cerrado de $X \times X$. □

16. Sean (X,d) e (Y,d') dos espacios métricos. Una función $f : X \to Y$ es *abierta* si para todo abierto A de X el conjunto $f(A)$ es abierto en Y, y es *cerrada* si para todo cerrado F de X el conjunto $f(F)$ es cerrado en Y.

(a) Una función biyectiva $f : X \to Y$ es abierta si y solamente si su función inversa $f^{-1} : Y \to X$ es continua.

(b) Dé ejemplos de funciones continuas $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que no son abiertas.

(c) Dé ejemplos de funciones continuas $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que no son cerradas.

(d) Una función puede ser biyectiva, abierta y cerrada y no un homeomorfismo: dé un ejemplo de esto.

Solución. (a) Sea $f : X \to Y$ una función biyectiva y sea $g : Y \to X$ su función inversa. Si f es abierta y B es un abierto de X, entonces $g^{-1}(B) = f(B)$ es una abierto de Y, así que g es continua. Recíprocamente, si g es continua y B es un abierto de X, entonces $f(B) = g^{-1}(B)$ es un abierto de Y, así que f es abierta.

(b) Una función constante $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua y no abierta, ya que $f(\mathbb{R})$ no es un abierto de $\mathbb{R}$.

(c) La función $: t \in \mathbb{R} \mapsto e^t \in \mathbb{R}$ es continua pero $f(\mathbb{R}) = (0, +\infty)$ no es un cerrado, así que no es cerrada.

(d) Sea (X,d) un espacio métrico que no es discreto y sea d' la métrica discreta sobre X. La función $\mathrm{id}_X : (X,d) \to (X,d')$ es biyectiva, abierta y cerrada, pero no es un homeomorfismo. □

17. (a) Sean (X,d) e (Y,d') dos espacios métricos y sea D un subconjunto de X que es denso. Si f, $g : X \to Y$ son dos funciones continuas sobre X tales que $f|_D = g|_D$, entonces $f = g$.

(b) Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua tal que $f(x+y) = f(x) + f(y)$ cada vez que x e y son elementos de $\mathbb{Q}$, entonces existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \alpha x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Solución. (a) Sean f, $g : X \to Y$ dos funciones continuas que coinciden en el subconjunto D y sea $x \in X$. Como D es denso, hay una sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ en D que converge a x y entonces porque f y g son continuas y coinciden sobre D tenemos que

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(x).$$

Esto muestra que $f = g$, como queremos.

(b) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(x+y) = f(x) + f(y)$ siempre que x e y están en $\mathbb{Q}$ y pongamos $\alpha := f(1)$. Mostremos que

si $n \in \mathbb{N}$, entonces $f(n) = \alpha n$

haciendo inducción con respecto a n. Es claro que esto es cierto cuando $n = 1$, y si suponemos que $f(n) = \alpha n$ para algún $n \in \mathbb{N}$, entonces es

$$f(n+1) = f(n) + f(1) = \alpha n + \alpha = \alpha(n+1).$$

Si ahora n y m son dos elementos de $\mathbb{N}$ y $n > m$, entonces

$$f(m) = f(n+(m-n)) = f(n) + f(m-n)$$

porque n, m y $m-n$ están en $\mathbb{Q}$ y, por lo tanto,

$$f(m-n) = f(m) - f(n) = \alpha m - \alpha n = \alpha(m-n).$$

Finalmente, $f(1) = f(1+0) = f(1) + f(0)$, así que $f(0) = 0$. Juntando todo, vemos que

$$f(n) = \alpha n \text{ para cada } n \in \mathbb{Z}.$$

Fijemos ahora $n \in \mathbb{N}$ y mostremos que

$$f(n/2^m) = \alpha n/2^m \text{ para todo } m \in \mathbb{N}_0.$$

Si $m = 0$, ya sabemos que la afirmación vale. Por otro lado, si suponemos que $m \in \mathbb{N}$ y que $f(n/2^m) = \alpha n/2^m$, entonces

$$\frac{\alpha n}{2^m} = f\left(\frac{n}{2^m}\right) = f\left(\frac{n}{2^{m+1}}\right) + f\left(\frac{n}{2^{m+1}}\right) = 2f\left(\frac{n}{2^{m+1}}\right),$$

así que $f(n/2^{m+1}) = \alpha n/2^{m+1}$.

Concluimos de esta forma que f y la función $g : x \in \mathbb{R} \mapsto \alpha x \in \mathbb{R}$, que son ambas continuas, coinciden sobre el conjunto

$$D = \left\{\frac{n}{2^m} : n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}_0\right\}.$$

Como D es denso en $\mathbb{R}$, la primera parte del ejercicio nos permite concluir que $f = g$. Esto es precisamente lo que queríamos. □

18. Sean (X, d) e (Y, d') dos espacios métricos y pongamos sobre el producto cartesiano $X \times Y$ la métrica d_∞.

(a) Las proyecciones $\pi_1 : (x, y) \in X \times Y \mapsto x \in X$ y $\pi_2 : (x, y) \in X \times Y \mapsto y \in Y$ son continuas y abiertas, pero en general no son cerradas.

(b) Sea (Z, d'') un tercer espacio métrico. Una función $f : Z \to X \times Y$ es continua si y solamente si las composiciones $\pi_1 \circ f$ y $\pi_2 \circ f$ lo son.

Solución. (a) Por simetría, bastará que nos ocupemos de la función π_1. Si (x, y), $(x', y') \in X \times Y$, entonces

$$d(\pi_1(x, y), \pi_1(x', y')) = d(x, x') \leq d(x, x') + d(y, y') = d((x, y), (x', y'))$$

y esto implica inmediatamente que la función π_1 es uniformemente continua. Sea ahora U un abierto de $X \times Y$ y sea $x \in \pi_1(U)$, de manera que existe $y \in Y$ tal que $(x, y) \in U$. Como U es abierto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(x, y) \subseteq U$. Ahora bien, si $x' \in B_\varepsilon(x)$, entonces claramente $(x', y) \in B_\varepsilon(x, y)$ y, por lo tanto, $x' \in \pi_1(B_\varepsilon(x, y)) \subseteq \pi_1(U)$. Vemos así que $B_\varepsilon(x) \subseteq \pi_1(U)$ y, en definitiva, que $\pi_1(U)$ es un abierto de X. Concluimos con esto que π_1 es una función abierta.

Para ver que en general la proyección π_1 no es cerrada tomemos $X = Y = \mathbb{R}$ y $F = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : xy = 1\}$. Es fácil ver que F es un cerrado de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mientras que su imagen por la proyección $\pi_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es el conjunto $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, que no es cerrado en $\mathbb{R}$.

(b) Sea $f : Z \to X \times Y$ una función. Si f es continua, entonces sus composiciones con las proyecciones π_1 y π_2 son ellas mismas continuas. Supongamos, para probar la recíproca, que las composiciones $\pi_1 \circ f$ y $\pi_2 \circ f$ son continuas y mostremos que f es continua. Sea $z \in Z$ y sea $\varepsilon > 0$. Como $\pi_1 \circ f$ es continua, existe $\delta_1 > 0$ tal que $\pi_1(f(B_{\delta_1}(z))) \subseteq B_{\varepsilon/2}(\pi_1(f(z)))$. De manera similar, como $\pi_2 \circ f$ es continua, existe $\delta_2 > 0$ tal que $\pi_2(f(B_{\delta_2}(z))) \subseteq B_{\varepsilon/2}(\pi_2(f(z)))$. Sea ahora $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$ y sea $z' \in B_\delta(z)$. Como $B_\delta(z) \subseteq B_{\delta_1}(z)$ y $B_\delta(z) \subseteq B_{\delta_2}(z)$, tenemos que

$$\pi_1(f(z')) \in \pi_1(f(B_\delta(z'))) \subseteq \pi_1(f(B_{\delta_1}(z'))) \subseteq B_{\varepsilon/2}(\pi_1(f(z)))$$

y, de manera similar,

$$\pi_2(f(z')) \in B_{\varepsilon/2}(\pi_2(f(z))).$$

Esto nos dice que

$$f(z') = (\pi_1(f(z')), \pi_2(f(z'))) \in B_{\varepsilon/2}(\pi_1(f(z))) \times B_{\varepsilon/2}(\pi_2(f(z))) \subseteq B_\varepsilon(f(z)).$$

Vemos así que $f(B_\delta(z)) \subseteq B_\varepsilon(f(z))$ y, por lo tanto, que f es continua en z. □

19. Sea (X, d) un espacio métrico y sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función. La función f es

- *semicontinua inferiormente* en un punto $x_0 \in X$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $d(x, x_0) < \delta \implies f(x_0) - \varepsilon < f(x)$, y
- *semicontinua superiormente* en un punto $x_0 \in X$ si para todo $\varepsilon >$ existe $\delta > 0$ tal que $d(x, x_0) < \delta \implies f(x) < f(x_0) + \varepsilon$.

(a) Una función $X \to \mathbb{R}$ es continua en un punto x_0 de X si y solamente si es allí semicontinua inferiormente y semicontinua superiormente.

(b) Una función $f : X \to \mathbb{R}$ es semicontinua inferiormente si y solamente si para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ el conjunto $f^{-1}((\alpha, +\infty))$ es abierto.

(c) Una función $f : X \to \mathbb{R}$ es semicontinua superiormente si y solamente si para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ el conjunto $f^{-1}((-\infty, \alpha))$ es abierto.

(d) Si A es un subconjunto de X, entonces la función característica $\chi_A : X \to \mathbb{R}$ de A es semicontinua inferiormente si y solamente si A es abierto, y es semicontinua superiormente si y solamente si A es cerrado.

Solución. (a) Sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función y sea $x_0 \in X$. Supongamos primero que f es continua en x_0 y sea $\varepsilon > 0$. La continuidad implica que existe $\delta > 0$ tal que cada vez que $x \in X$ y $d(x, x_0) < \delta$ es $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, es decir, es $f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$. Por supuesto, tenemos entonces que para cada $x \in X$ vale que $d(x, x_0) < \delta \implies f(x_0) - \varepsilon < f(x)$ y que $d(x, x_0) < \delta \implies f(x) < f(x_0) + \varepsilon$. Vemos así que f es semicontinua inferiormente y semicontinua superiormente en x_0.

Supongamos ahora que f es simultáneamente semicontinua inferiormente en x_0 y semicontinua superiormente en x_0, y sea $\varepsilon > 0$. La hipótesis implica que existen $\delta_1 > 0$ y $\delta_2 > 0$ tales que para cada $x \in X$ vale que $d(x, x_0) < \delta_1 \implies f(x_0) - \varepsilon < f(x)$

y que $d(x,x_0) < \delta_2 \implies f(x) < f(x_0)+\varepsilon$. En particular, si x es un punto de X tal que $d(x,x_0) < \min\{\delta_1,\delta_2\}$ se tiene simultáneamente que $f(x_0)-\varepsilon < f(x)$ y que $f(x) < f(x_0)+\varepsilon$, así que $|f(x)-f(x_0)| < \varepsilon$. Vemos así que f es continua en x_0.

(b) Sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función, supongamos que f es semicontinua inferiormente y sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Si $x \in f^{-1}((\alpha,+\infty))$, entonces por un lado $f(x) > \alpha$ y por otro, como $\varepsilon := f(x)-\alpha > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para cada punto $y \in X$ tal que $d(y,x) < \delta$ se tiene que $f(x)-\varepsilon < f(y)$. Se sigue de esto que si $y \in B_\delta(x)$ entonces $f(y) > f(x)-\varepsilon = \alpha$, de manera que $y \in f^{-1}((\alpha,+\infty))$. Vemos así que $B_\delta(x) \subseteq f^{-1}((\alpha,+\infty))$ y, en definitiva, que el conjunto $f^{-1}((\alpha,+\infty))$ es un abierto de X.

Supongamos ahora que $f : X \to \mathbb{R}$ es una función tal que para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ el conjunto $f^{-1}((\alpha,+\infty))$ es abierto y sean $x \in X$ y $\varepsilon > 0$. La hipótesis nos dice que el conjunto $f^{-1}((f(x)-\varepsilon,+\infty))$ es un abierto de X: como contiene evidentemente a x, esto nos dice que existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(x) \subseteq f^{-1}((f(x)-\varepsilon,+\infty))$ y esto, a su vez, significa que $f(y) > f(x)-\varepsilon$ para todo punto y de X tal que $d(x,y) < \delta$. En otras palabras, tenemos que f es semicontinua inferiormente en x.

(c) Esta afirmación puede probarse o bien de la misma manera que la afirmación (b) o bien observando que a función f es semicontinua superiormente si y solamente si $-f$ es semicontinua inferiormente, y que f satisface la condición de (c) si y solamente si $-f$ satisface la condición de (b).

(d) Sea A un subconjunto de X y escribamos $f = \chi_A$. Si $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces

$$f^{-1}((\alpha,+\infty)) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } \alpha < 0; \\ A & \text{si } 0 \le \alpha < 1; \\ \varnothing & \text{si } 1 \le \alpha. \end{cases} \quad 1$$

De acuerdo a la parte (b), f es semicontinua inferiormente si y solamente si los tres conjuntos $\mathbb{R}$, A y $\varnothing$ son abiertos y esto ocurre, por supuesto, si y solamente si A es abierto.

De manera similar, para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ es

$$f^{-1}((-\infty,\alpha)) = \begin{cases} \varnothing & \text{si } \alpha \le 0; \\ \mathbb{R} \setminus A & \text{si } 0 < \alpha \le 1; \\ \mathbb{R} & \text{si } 1 < \alpha. \end{cases}$$

Usando ahora la parte (c) sabemos que f es semicontinua superiormente si y solamente si los tres conjuntos $\varnothing$, $\mathbb{R} \setminus A$ y $\mathbb{R}$ son abiertos, lo que ocurre exactamente cuando A es cerrado. □

Separabilidad

20. El espacio $\mathbb{R}^n$ con su métrica euclídea es separable.

Solución. Es fácil que

> *si X e Y son espacios métricos separables, entonces el producto cartesiano $X \times Y$ también es separable.*

Usando esto y una inducción evidente, el ejercicio se reduce a mostrar que $\mathbb{R}$ es separable: esto es inmediato, porque sabemos que $\mathbb{Q}$, que es numerable, es denso en $\mathbb{R}$. $\square$

21. sea $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ el conjunto de todas las sucesiones $(a_n)_{n\geq 1}$ de números reales para las que existe un entero $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n = 0$ para todo $n \geq n_0$. Si $a = (a_n)_{n\geq 1}$ y $b = (b_n)_{n\geq 1}$ son dos elementos de $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$, el conjunto $\{|a_n - b_n| : n \in \mathbb{N}\}$ es acotado: hay, por lo tanto, una función $d_\infty : \mathbb{R}^{(\mathbb{N})} \times \mathbb{R}^{(\mathbb{N})} \to \mathbb{R}$ tal que

$$d_\infty(a, b) = \sup_{n\geq 1} |a_n - b_n|$$

cada vez que $a = (a_n)_{n\geq 1}$ y $b = (b_n)_{n\geq 1}$ son dos elementos de $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$. Muestre que $(\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}, d_\infty)$ es un espacio métrico separable.

Solución. Sea D el subconjunto de $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ de los elementos de $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ que tienen todas sus componentes en $\mathbb{Q}$. Sabemos que D es numerable: mostremos que es denso en $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$.

Sea $x = (x_n)_{n\geq 1} \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ y sea $\varepsilon > 0$. Sea $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n = 0$ para cada $n \geq n_0$. Como $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$, para cada $i \in [\![n-1]\!]$ existe $a_i \in \mathbb{Q}$ tal que $|x_i - a_i| < \varepsilon$. Pongamos además $a_i = 0$ si $i \geq n_0$ y sea $a := (a_n)_{n\geq 1}$, que es claramente un elemento de D. Es

$$d_\infty(a, x) = \sup_{n\geq 1} |a_n - x_n| = \sup_{1\leq n<n_0} |a_n - x_n| < \varepsilon.$$

Esto implica que D es denso, como queremos. $\square$

22. Sea (X, d) un espacio métrico. Una familia $\mathscr{B}$ de abiertos de X es una *base* si todo abierto de X es unión de elementos de $\mathscr{B}$. Muestre que una familia $\mathscr{B}$ de abiertos de X es una base si y solamente si para todo abierto U de X y todo punto x de U existe $B \in \mathscr{B}$ tal que $x \in B \subseteq U$.

Solución. Sea $\mathscr{B}$ una familia de abiertos de X. Supongamos primero que $\mathscr{B}$ es una base y sean U un abierto de X y x un punto de U. Como $\mathscr{B}$ es una base, tenemos que

$$U = \bigcup_{\substack{B\in\mathscr{B} \\ B\subseteq U}} B$$

y, por lo tanto, existe $B \in \mathscr{B}$ tal que $x \in B \subseteq U$. Esto muestra que la condición del enunciado es necesaria para que $\mathscr{B}$ sea una base.

Para probar que también es suficiente, supongamos ahora que $\mathscr{B}$ la satisface y sea U un abierto de X. Si $x \in U$, entonces la hipótesis nos dice que existe $B_x \in \mathscr{B}$ tal que $x \in B_x \subseteq U$, y entonces tenemos que

$$U \subseteq \bigcup_{x\in U} B_x \subseteq U,$$

de manera que U es unión de elementos de $\mathscr{B}$. $\square$

23. Sea (X, d) un espacio métrico. Si todo cubrimiento abierto de X posee un subcubrimiento numerable, entonces X es separable.

Solución. Supongamos que todo cubrimiento abierto de X posee un subcubrimiento numerable. Para cada $n \in \mathbb{N}$, el conjunto $\mathscr{U}_n = \{B_{1/n}(x) : x \in X\}$ es un cubrimiento abierto de X, así que existe un subconjunto numerable X_n de X tal que $\mathscr{U}'_n = \{B_{1/n}(x) : x \in X_n\}$ también es un cubrimiento de X. Pongamos ahora $D = \bigcup_{n\geq 1} D_n$, que es un subconjunto numerable de X. Queremos mostrar que D es denso en X.

Sea $y \in X$. Si $n \in \mathbb{N}$, entonces como $\mathscr{U}'_n$ es un cubrimiento de X sabemos que existe $x_n \in X_n \subseteq D$ tal que $y \in B_{1/n}(x_n)$. La sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ es entonces una sucesión en D y tiene $d(y, x_n) < 1/n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, así que converge a y. Esto muestra que D es denso, como queríamos. □

24. Todo subespacio de un espacio métrico separable es él mismo separable.

Solución. Sea X un espacio métrico separable, sea D un subconjunto denso y numerable de X, y sea Y un subconjunto de X. Consideremos el conjunto

$$\mathscr{B} = \{B_{1/n}(x) : n \in \mathbb{N}, x \in D\}$$

y mostremos que se trata de una base de X. Claramente sus elementos son abiertos. Sea, por otro lado, U un abierto de X y sea x un punto de U. Como U es abierto, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $B_{1/m}(x) \subseteq U$. Como D es denso, existe $y \in D$ tal que $d(x, y) < 1/2m$. Si $z \in B_{1/2m}(y)$, entonces

$$d(x,z) \leq d(x, y) + d(y,z) < 1/2m + 1/2m = 1/m$$

y, por lo tanto, $z \in B_{1/m}(x)$, de manera que $B_{1/2m}(y) \subseteq B_{1/m} \subseteq U$. Como $B_{1/2m}(y) \in \mathscr{B}$ y que $x \in B_{1/2m}(y) \subseteq\subseteq U$, esto muestra que $\mathscr{B}$ es una base.

Sea ahora $\mathscr{B}' = \{B \cap Y : B \in \mathscr{B}, B \cap Y \neq \varnothing\}$, sea $c : \mathscr{B}' \to Y$ una función tal que $c(B) \in B$ para todo $B \in \mathscr{B}'$ y sea $E = c(\mathscr{B}')$ su imagen. Es claro que E es un subconjunto numerable de Y. Veamos que es además denso. Sea U un abierto no vacío de Y. Existe entonces un abierto V de X tal que $U = V \cap Y$. Como $\mathscr{B}$ es una base de X, tenemos que

$$V = \bigcup_{\substack{B\in\mathscr{B}\\ B\subseteq V}} B,$$

así que

$$U = Y \cap V = Y \cap \bigcup_{\substack{B\in\mathscr{B}\\ B\subseteq V}} B, = \bigcup_{\substack{B\in\mathscr{B}\\ B\subseteq V}} (Y \cap B).$$

En particular, como U no es vacío, existe $B \in \mathscr{B}$ tal que $Y \cap B \neq \varnothing$, de manera que $Y \cap B \in \mathscr{B}'$, y, por lo tanto, es $E \ni c(Y \cap B) \in Y \cap B \subseteq U$: vemos así que $E \cap U \neq \varnothing$. □

25. Sea (X, d) un espacio métrico separable.

(a) Toda familia de abiertos de X dos a dos disjuntos es a lo sumo numerable.

(b) El conjunto de puntos aislados de X es a lo sumo numerable.

Solución. (a) Sea D un subconjunto denso y numerable de X y sea $\mathscr{U}$ una familia de abiertos de X disjuntos dos a dos; podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\varnothing \notin \mathscr{U}$.

Si $U \in \mathscr{U}$, entonces el conjunto $U \cap D \neq \varnothing$: existe entonces una función $\phi : \mathscr{U} \to D$ tal que $\phi(U) \in U$ para todo $U \in \mathscr{U}$. Esta función es inyectiva: si U y V son elementos de $\mathscr{U}$ tales que $\phi(U) = \phi(V)$, entonces $\phi(U) \in U \cap V$ y, como los elementos de $\mathscr{U}$ son disjuntos dos a dos, debe ser $U = V$. Como la función ϕ es inyectiva y D numerable, es claro que $\mathscr{U}$ es a lo sumo numerable.

(b) Sea A el conjunto de puntos aislados de X. Si $x \in A$, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(x) = \{x\}$: esto nos dice que $\mathscr{U} = \{\{x\} : x \in A\}$ es una familia de abiertos de X. Como evidentemente los elementos de $\mathscr{U}$ son disjuntos dos a dos, la primera parte del ejercicio nos dice que $\mathscr{U}$, y por lo tanto también A, es a lo sumo numerable. □

26. Sean (X,d) e (Y,d') dos espacios métricos. El espacio métrico $(X \times Y, d_\infty)$ es separable si y solamente si tanto el espacio (X,d) como (Y,d') es separables.

Solución. Supongamos primero que (X,d) e (Y,d') son separables y sean D y E subconjuntos densos y numerables de X y de Y. Pongamos $F := D \times F$ y mostremos que F, que es claramente numerable, es denso en $(X \times Y, d_\infty)$. Sea (x,y) un punto de $X \times Y$ y sea $\varepsilon > 0$. Como D es denso en X, existe $a \in D$ tal que $d(x,a) < \varepsilon$, y como E es denso en Y, existe $b \in E$ tal que $d'(y,b) < \varepsilon$, y entonces tenemos que

$$d_\infty((x,y),(a,b)) = \max\{d(x,a), d'(y,b)\} < \varepsilon.$$

Esto muestra que $D \times E$ es denso en $X \times Y$, como queríamos.

Supongamos ahora que el espacio métrico $(X \times Y, d_\infty)$ es separable. Las proyecciones $\pi_1 : X \times Y \to X$ y $\pi_2 : X \times Y \to Y$ son continuas, así que el Ejercicio **28**(a) nos dice que X e Y son separables. □

27. ¿Es separable el espacio métrico (ℓ_∞, d_∞)?

Solución. Mostremos primero que

si X es un espacio métrico separable y Q es un subconjunto de X tal que

$$r,s \in Q \implies d(r,s) \in \{0,1\},$$

entonces Q es a lo sumo numerable.

Sea X un espacio métrico separable y sea Q un subconjunto de X que satisface esa condición. Sea D un subconjunto denso y numerable de X. Si $q \in Q$, entonces $B_{1/2}(q)$ es una abierto no vacío de X, así que $D \cap B_{1/2}(q) \neq \varnothing$. Esto implica que existe una función $\phi : Q \to D$ tal que $\phi(q) \in B_{1/2}(q)$ para todo $q \in Q$. Esta función es inyectiva: en efecto, si q y r son dos elementos de Q tale que $\phi(q) = \phi(r)$, entonces

$$d(q,r) \le d(q,\phi(q)) + d(\phi(q),r) < 1,$$

así que debe ser $d(q,r) = 0$, esto es, debe ser $q = r$. Ahora bien, como la función ϕ es inyectiva y D es numerable, es claro que Q es numerable.

Volvamos ahora al ejercicio. Sea Q el conjunto de todas las sucesiones de elementos de $\{0,1\}$. Claramente Q es un subconjunto de ℓ_∞ y dos puntos distintos de Q están a distancia 1. La afirmación que probamos al empezar nos dice que si ℓ_∞ fuera separable Q debería ser numerable. Como Q no es numerable, ℓ_∞ no es separable. □

28. Sean (X,d) e (Y,d') dos espacios métricos y sea $f : X \to Y$ una función continua y sobreyectiva.

(a) Si X es separable, entonces Y es separable.

(b) ¿Es cierto que si X es completo entonces Y es completo?

Solución. (a) Supongamos que X es separable y sea D un subconjunto denso y numerable de X. Claramente $f(D)$ es un subconjunto numerable de Y: veamos que es denso. Sea $y \in Y$. Como la función f es sobreyectiva, existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$. Por otro lado, como D es denso en X existe una sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ en D que converge a x. Ahora bien, como la función f es continua, tenemos que la sucesión $(f(x_n))_{n\geq 1}$ converge a $f(x) = y$: como se trata de una sucesión en $f(D)$, vemos que $f(D)$ es denso en Y, como queríamos.

(b) La función $t \in \mathbb{R} \mapsto e^t \in (0,+\infty)$ es continua y sobreyectiva, su dominio es completo y su codominio no: esto muestra que la afirmación del enunciado no es cierta.