CÁLCULO AVANZADO

Segundo Cuatrimestre — 2019

Práctica 3: Espacios métricos

El espacio métrico $\mathbb{R}^n$

1. (a) Toda familia de abiertos disjuntos dos a dos de $\mathbb{R}^n$ es a lo sumo numerable.

(b) Muestre que la misma conclusión es falsa para familias de cerrados disjuntos dos a dos.

2. Sea $\mathscr{B}$ el conjunto de todas las bolas abiertas $B_r(x)$ de $\mathbb{R}^n$ con $x \in \mathbb{Q}^n$ y $r \in \mathbb{Q}$. Si U es un abierto de $\mathbb{R}^n$ y $x \in U$, entonces existe $B \in \mathscr{B}$ tal que $x \in B \subseteq U$.

3. *(Teorema de Lindelöf)* Todo cubrimiento abierto de $\mathbb{R}^n$ posee un subcubrimiento numerable.

4. Si $S \subseteq \mathbb{R}^n$ y $x \in S$, decimos que x es un punto de condensación de S si para todo $\varepsilon > 0$ la intersección $S \cap B_\varepsilon(x)$ es no numerable. Muestre que todo conjunto no numerable de $\mathbb{R}^n$ posee al menos un punto de condensación. ¿Puede ser que posea uno solo?

5. Todo subconjunto discreto de $\mathbb{R}^n$ tiene cardinal a lo sumo numerable.

6. ¿De las funciones $d_i : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ dadas por

$$d_1(x,y) = (x-y)^2, \qquad d_2(x,y) = \sqrt{|x-y|}, \qquad d_3(x,y) = |x^2 - y^2|,$$
$$d_4(x,y) = |x-2y|, \qquad d_5(x,y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|},$$

cuáles son métricas?

7. Muestre que son métricas sobre $\mathbb{R}^n$ las funciones $d_i : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dadas por

$$d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|,$$
$$d_2(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2},$$
$$d_\infty(x,y) = \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|.$$

En el caso particular en que $n = 1$, $n = 2$ o $n = 3$ dibuje las bolas correspondientes.

Espacios métricos

8. Sea p un número primo positivo y sea $d : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ la función tal que cada vez que x e y son elementos de $\mathbb{Z}$ es $d(x, y) = 2^{-a}$, con a el máximo entero tal que $p^a \mid x - y$, si $x \neq y$, y $d(x, y) = 0$ si $x = y$. Muestre que d es una métrica en $\mathbb{Z}$. La llamamos la *métrica p-ádica* de $\mathbb{Z}$.

9. Sea X un conjunto y sea $d : X \times X \to \mathbb{R}$ la función tal que si x e y son elementos de X se tiene que

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y; \\ 1 & \text{si } x \neq y. \end{cases}$$

Muestre que se trata de una métrica sobre X y determine sus conjuntos abiertos. Llamamos a δ la *métrica discreta* sobre X.

10. Sea ℓ^∞ el espacio vectorial real de todas las sucesiones $(a_n)_{n\geq 1}$ de números reales que son acotadas y sea $d : \ell^\infty \times \ell^\infty \to \mathbb{R}$ la función tal que

$$d((a_n)_{n\geq 1}, (b_n)_{n\geq 1}) = \sup_{n\geq 1} |a_i - b_i|$$

cada vez que $(a_n)_{n\geq 1}$ y $(b_n)_{n\geq 1}$ son elementos de ℓ^∞. Muestre que d es una métrica.

11. Sean a y b dos números reales tales que $a < b$ y sea $C[a, b]$ el espacio vectorial real de todas las funciones $[a, b] \to \mathbb{R}$ que son continuas. Muestre que son métricas sobre $C[a, b]$ las funciones $d_i : C[a, b] \times C[a, b] \to \mathbb{R}$ tales que

$$d_1(f, g) = \int_a^b |f(t) - g(t)| \, \mathrm{d}t, \qquad d_\infty(f, g) = \sup_{t\in[a,b]} |f(t) - g(t)|$$

cada vez que f y g son elementos de $C[a, b]$.

12. Sean (X_1, d_1) y (X_2, d_2) dos espacios métricos. Si $d : (X_1 \times X_2) \times (X_1 \times X_2) \to \mathbb{R}$ es la función tal que

$$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2)$$

cada vez que (x_1, x_2) e (y_1, y_2) son elementos de $X_1 \times X_2$, entonces $(X_1 \times X_2, d)$ es un espacio métrico. Construya otras métricas «naturales» sobre el conjunto $X_1 \times X_2$.

13. Si (X, d) es un espacio métrico y $d' : X \times X \to \mathbb{R}$ es la función tal que

$$d'(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

cada vez que x e y son elementos de X, entonces (X, d') es un espacio métrico y d y d' son métricas topológicamente equivalentes. Observemos que $0 \leq d'(x, y) < 1$ para todo $(x, y) \in X \times X$.

14. Sea $((X_n, d_n))_{n\geq 1}$ una sucesión de espacios métricos tales que para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo $(x, y) \in X_n \times X_n$ se tiene que $d_n(x, y) \leq 1$. Sea $X = \prod_{n\geq 1} X_n$ y sea $d : X \times X \to \mathbb{R}$ la función tal que

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n(x_n, y_n)}{2^n}$$

cada vez que $x = (x_n)_{n\geq 1}$ e $y = (y_n)_{n\geq 1}$ son elementos de X. Muestre que (X, d) es un espacio métrico.

15. Muestre que las métricas d_1, d_2 y d_∞ del ejercicio **7** son equivalentes sobre $\mathbb{R}^n$.

Propiedades topológicas

16. Sea (X, d) un espacio métrico.

(a) Si $A \subseteq X$, entonces se tiene que $A^\circ = \bigcup_{\substack{U\subseteq A \\ U \text{ abierto}}} U$.

(b) Es $\varnothing^\circ = \varnothing$, $X^\circ = X$ y cada vez que A y B son dos subconjuntos de X se tiene que

$$A \subseteq B \implies A^\circ \subseteq B^\circ, \qquad (A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ, \qquad (A \cup B)^\circ \supseteq A^\circ \cup B^\circ.$$

¿Puede extenderse la segunda de estas afirmaciones al caso de intersecciones infinitas? ¿Vale siempre la igualdad en la tercera?

17. Sea (X, d) un espacio métrico.

(a) Si $A \subseteq X$, entonces se tiene que $\overline{A} = \bigcap_{\substack{F\supseteq A \\ F \text{ cerrado}}} F$.

(b) Es $\overline{\varnothing} = \varnothing$, $\overline{X} = X$ y cada vez que A y B son dos subconjuntos de X se tiene que

$$A \subseteq B \implies \overline{A} \subseteq \overline{B}, \qquad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}, \qquad \overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}.$$

¿Puede extenderse la segunda de estas afirmaciones al caso de uniones infinitas? ¿Vale siempre la igualdad en la tercera?

(c) Si $A \subseteq X$ y $x \in X$, entonces $x \in \overline{A}$ si y solamente si existe una sucesión convergente $(x_n)_{n\geq 1}$ tal que $x_n \in A$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\lim_{n\to\infty} x_n \in A$.

18. Sea (X, d) un espacio métrico. Si $A \subseteq X$, entonces

$$(X \setminus A)^\circ = X \setminus \overline{A}, \qquad \overline{X \setminus A} = X \setminus A^\circ.$$

¿Es cierto que $A = \overline{A^\circ}$ o que $A^\circ = (\overline{A})^\circ$?

19. Sea (X, d) un espacio métrico. Si $A \subseteq X$, entonces la frontera ∂A es un cerrado de X y se tiene que $\partial A = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$ y $\partial A = \partial(X \setminus A)$.

20. Sea (X, d) un espacio métrico. Si U y F son un abierto y un cerrado de X, entonces $F \setminus U$ y $U \setminus F$ son un cerrado y un abierto de X.

21. Sea (X,d) un espacio métrico. Si $x \in X$ y $r > 0$, llamamos *bola cerrada centrada en x de radio r* al conjunto

$$\overline{B}(x,r) = \{y \in X : d(x,y) \leq r\}.$$

(a) Para cada $x \in X$ y cada $r > 0$ el conjunto $\overline{B}(x,r)$ es cerrado y $\overline{B(x,r)} \subseteq \overline{B}(x,r)$.

(b) Muestre que en general no vale la igualdad en la afirmación anterior.

22. Sean (X,d_1) e (Y,d_2) espacios métricos y sea $(X \times Y, d)$ el espacio métrico con la métrica tal que

$$d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = d_1(x_1,x_2) + d_2(y_1,y_2)$$

cada vez que (x_1,y_1) y (x_2,y_2) son elementos de $X \times Y$. Si $A \subseteq X$ y $B \subseteq Y$, entonces $(A \times B)^\circ = A^\circ \times B^\circ$ y $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$.

23. Sea (X,d) un espacio métrico.

(a) Si $A \subseteq X$, entonces el conjunto derivado A' es un cerrado de X.

(b) Si A y B son subconjuntos de X, entonces

$$A \subseteq B \implies A' \subseteq B', \qquad (A \cup B)' = A' \cup B', \qquad \overline{A} = A \cup A', \qquad (\overline{A})' = A'.$$

(c) Si $A \subseteq X$ y $x \in X$, entonces $x \in A'$ si y solamente si existe una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de puntos de A que converge a x y que no es casi constante.

24. Para cada uno de los siguientes conjuntos determine el interior, la clausura, la frontera y el conjunto derivado, y si se trata de abiertos o cerrados:

$$[0,1], \qquad (0,1), \qquad \mathbb{Q}, \qquad \mathbb{Q} \cap [0,1], \qquad \mathbb{Z}, \qquad [0,1) \cup \{2\}.$$

25. Describa los conjuntos abiertos y cerrados de $\mathbb{Z}$ visto como subespacio de $\mathbb{R}$. Generalice esto a una descripción de los abiertos y cerrados de un subconjunto discreto de un espacio métrico arbitrario.

26. Si S es un subconjunto no numerable de $\mathbb{R}$, entonces el conjunto P de los puntos de condensación de S es *perfecto* (es decir, es cerrado y $P = P'$) y la diferencia $S \setminus P$ es a lo sumo numerable.

27. Sea (X,d) un espacio métrico y sean $x = (x_n)_{n \geq 1}$ e $y = (y_n)_{n \geq 1}$ dos sucesiones en X.

(a) Si x converge a x_0 e y a y_0, entonces $\lim_{n \to \infty} d(x_n, y_n) = d(x_0, y_0)$.

(b) Si x e y son sucesiones de Cauchy, entonces la sucesión de números reales $(d(x_n,y_n))_{n \geq 1}$ es convergente.

28. Sea (X,d) un espacio métrico. Decimos que un subconjunto A de X es un G_δ si es intersección de una familia numerable de abiertos, y que es un F_σ si es unión de una familia numerable de cerrados.

(a) El complemento de un conjunto G_δ es un conjunto F_σ, y el complemento de un conjunto F_σ es un conjunto G_δ.

(b) Todo abierto es un conjunto F_σ y todo cerrado es un conjunto G_σ.

(c) Exhiba familias numerables de abiertos de $\mathbb{R}$ cuya intersección sean los conjuntos $[0,1]$ y $[0,1)$, y una familia numerable de cerrados cuya unión sea $[0,1)$. ¿Qué conclusión puede obtenerse de estos ejemplos?

Distancias a conjuntos

29. Sea (X,d) un espacio métrico y sea A un subconjunto no vacío de X. Si $x \in X$, la *distancia de x a A* es el número

$$d(x,A) = \inf\{d(x,a) : a \in A\}.$$

Observemos que el ínfimo tiene sentido: es el ínfimo de un conjunto no vacío y acotado inferiormente.

(a) Si x e y son puntos de X, entonces $|d(x,A) - d(y,A)| \leq d(x,y)$.

(b) Si $x \in A$, entonces $d(x,A) = 0$.

(c) Si $x \in X$, entonces $d(x,A) = 0 \iff x \in \overline{A}$.

(d) Para todo $r > 0$ el conjunto $B_r(A) = \{x \in X : d(x,A) < r\}$ es abierto y el conjunto $\overline{B}_r(A) = \{x \in X : d(x,A) \leq r\}$ es cerrado.

30. Sea (X,d) un espacio métrico. Si A y B son dos conjuntos no vacíos de X, la *distancia de A a B* es el número

$$d(A,B) = \inf\{d(a,b) : a \in A, b \in B\}.$$

Observemos que el ínfimo tiene sentido: es el ínfimo de un conjunto no vacío y acotado inferiormente.

Sean A, B y C tres subconjuntos no vacíos de X. Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

(a) $d(A,B) = d(B,A)$.

(b) $d(A,B) = 0 \iff A \cap B = \varnothing$.

(c) $d(A,B) = 0 \iff \overline{A} \cap \overline{B} = \varnothing$.

(d) $d(A,C) \leq d(A,B) + d(B,C)$.