Cálculo Avanzado

Segundo Cuatrimestre — 2019

Práctica 2: Cardinalidad

Conjuntos

1. Si B es un conjunto y $(A_i)_{i\in I}$ una familia de conjuntos con $I \neq \varnothing$, entonces

$$B \setminus \bigcup_{i\in I} A_i = \bigcap_{i\in I}(B \setminus A_i), \quad B \setminus \bigcap_{i\in I} A_i = \bigcup_{i\in I}(B \setminus A_i), \quad \bigcup_{i\in I}(B \cap A_i) = B \cap \bigcup_{i\in I} A_i.$$

2. Sea $(A_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de conjuntos y sea $A = \bigcup_{n\geq 1} A_n$. Encuentre una sucesión de conjuntos $(B_n)_{n\geq 1}$ que satisfaga las siguientes tres condiciones:

- $B_n \subseteq A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$;
- $B_n \cap B_m = \varnothing$ siempre que $n, m \in \mathbb{N}$ y $n \neq m$;
- $A = \bigcup_{n\geq 1} B_n$.

3. Sea $f : X \to Y$ una función.

(a) Si A y B son subconjuntos de X, entonces

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B), \qquad f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B).$$

¿Vale siempre la igualdad en la segunda de estas inclusiones?

(b) Generalice la parte anterior al caso de uniones e intersecciones arbitrarias.

4. Sea $f : X \to Y$ una función.

(a) Para todo subconjunto A de X se tiene que $A \subseteq f^{-1}(f(A))$.

(b) Si B es un subconjunto de Y, entonces

$$f(f^{-1}(B)) \subseteq B, \qquad f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B).$$

(c) Si B_1 y B_2 son subconjuntos de Y, entonces

$$f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2), \qquad f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2).$$

(d) ¿De qué manera se generaliza el resultado de la parte anterior al caso de uniones e intersecciones arbitrarias?

5. Una función $f : X \to Y$ es sobreyectiva si y solamente si para todo subconjunto B de Y se tiene que $f(f^{-1}(B)) = B$.

6. Sea $f : X \to Y$ una función. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) La función f es inyectiva.

(ii) Cada vez que A, $B \subseteq X$ se tiene que $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

(iii) Para todo $A \subseteq X$ se tiene que $f^{-1}(f(A)) = A$.

(iv) Cada ver que A, $B \subseteq X$ y $A \cap B = \emptyset$ se tiene que $f(A) \cap f(B) = \emptyset$.

(v) Si A y B son subconjuntos de X tales que $A \supseteq B$, entonces $f(A \backslash B) = f(A) \backslash f(B)$.

7. Sea A un conjunto. Si S es un subconjunto de A, entonces la *función característica* de S en A es la función $\chi_S : A \to \{0,1\}$ que sobre cada $a \in A$ toma el valor

$$\chi_S(a) = \begin{cases} 1 & \text{si } a \in S; \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

Muestre que si S y T son dos subconjuntos de A, entonces

$$\chi_{S\cap T} = \chi_S \cdot \chi_T, \qquad \chi_{A\backslash S} = \chi_A - \chi_S, \qquad \chi_S + \chi_T = \chi_{S\cup T} + \chi_{S\cap T}.$$

8. Sea A un conjunto, sea $\sim$ una relación de equivalencia en A y para cada $a \in A$ escribamos S_a a la clase de equivalencia de a en A, esto es, al conjunto $\{b \in A : a \sim b\}$.

(a) Si a y b son elementos de A, entonces o bien $S_a = S_b$ o bien $S_a \cap S_b = \emptyset$.

(b) $A = \bigcup_{a\in A} S_a$.

†(c) Sea $\bar{A} = \{S_a : a \in A\}$ el conjunto de las clases de equivalencia. Si $f : A \to X$ es una función tal que cada vez que a y b son elementos de A se tiene que

$$a \sim b \implies f(a) = f(b),$$

entonces existe una y una única función $\bar{f} : \bar{A} \to X$ tal que

$$\bar{f}(S_a) = f(a)$$

para todo $a \in A$.

Cardinalidad

9. Si A es un conjunto finito con n elementos, entonces el conjunto de partes $\mathscr{P}(A)$ tiene 2^n elementos.

10. Sea A un conjunto. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) A es infinito, esto es, posee un subconjunto equipotente con $\mathbb{N}$.

(ii) Para todo $x \in A$ existe una función biyectiva $f : A \to A \setminus \{x\}$.

(iii) Si $n \in \mathbb{N}$ y $x_1, \ldots, x_n$ son n elementos distintos dos a dos de A, entonces hay una función biyectiva $f : A \to A \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}$.

11. Sean A y B dos conjuntos. Si A es numerable y existe una función sobreyectiva $A \to B$, entonces B es o finito o numerable.

12. Muestre que los siguientes conjuntos son numerables:

$$\mathbb{Z}_{\leq -1}, \qquad \mathbb{Z}_{\geq -3}, \qquad 2\mathbb{N}, \qquad \mathbb{N}^2, \qquad \mathbb{Z}\times\mathbb{N}, \qquad \mathbb{Q}, \qquad \mathbb{N}^m,$$

con $m \in \mathbb{N}$.

13. (a) La unión de dos conjuntos contables es contable.

(b) Si $(A_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión de conjuntos contables, entonces $\bigcup_{n\geq 1} A_n$ también es contable.

(c) Si A es un conjunto finito no vacío, entonces el cardinal de $\bigcup_{n\geq 1} A^n$ es $\aleph_0$.

(d) Deduzca de la parte anterior que cualquiera sea el alfabeto utilizado, hay más números reales que palabras para nombrarlos. ¿Cuántos subconjuntos de $\mathbb{N}$ pueden ser definidos en un lenguaje fijo? ¿Cuántos hay en total?

14. Sean A y B dos conjuntos disjuntos tales que A es infinito y B numerable.

(a) Hay una biyección entre A y $A \cup B$.

(b) Si A no es numerable y $B \subseteq A$, entonces hay una biyección entre A y $A \setminus B$.

(c) ¿Es numerable el conjunto $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$?

15. El conjunto $\mathbb{Q}[X]$ de los polinomios con coeficientes racionales es numerable.

16. Un número complejo $z \in \mathbb{C}$ es *algebraico* si existen enteros $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$, no todos nulos, tales que

$$a_0 + a_1 z + \cdots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n = 0.$$

(a) El conjunto de los números algebraicos es numerable.

(b) Existen números reales que no son algebraicos.

Llamamos a estos últimos números *números trascendentes*.

17. Determine el cardinal de los siguientes conjuntos:

(a) $X_1 = \{[a,b] : a, b \in \mathbb{Q}, a \leq b\}$;

(b) $X_2 = \{[a,b] : a, b \in \mathbb{R}, a \leq b\}$;

(c) $X_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + 2y \geq 7\}$;

(d) $X_4 = \mathbb{R}_{>0}$.

18. ¿Qué cardinal puede tener un conjunto de intervalos abiertos de $\mathbb{R}$ que son disjuntos dos a dos?

19. Si a, b y c son cardinales, entonces

(a) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$;

(b) $a^{b+c} = a^b \cdot a^c$;

(c) $(a^b)^c = a^{b\cdot c}$;

Si además $b \leq c$, entonces

(d) $a^b \leq a^c$ si $a \neq 0$;

(e) $b^a \leq c^a$.

20. Sea X un conjunto de números reales positivos. Si existe $C \in \mathbb{R}$ tal que cada vez que $n \in \mathbb{N}$ y $x_1, \ldots, x_n$ son elementos distintos dos a dos de X se tiene que $x_1 + \cdots + x_n \leq C$, entonces X es numerable.

21. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función monótona, entonces

$$\#\{x \in \mathbb{R} : f \text{ no es continua en } x\} \leq \aleph_0.$$

22. Si A es un conjunto numerable, entonces el conjunto de las partes finitas de A, esto es, el conjunto de los subconjuntos finitos de A, es él también numerable.

23. Determine el cardinal de cada uno de los siguientes conjuntos de sucesiones:

(a) $X_1 = \{(a_n) : a_n \in \mathbb{N} \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\}$;

(b) $X_2 = \{(a_n) : a_n \in \mathbb{N} \text{ y } a_n \leq a_{n+1} \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\}$;

(c) $X_3 = \{(a_n) : a_n \in \mathbb{N} \text{ y } a_n \geq a_{n+1} \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\}$;

(d) $X_4 = \{(a_n) : a_n \in \mathbb{Q} \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \text{ y } \lim_{n\to\infty} a_n = 0\}$;

(e) $X_5 = \{(a_n) : a_n \in \mathbb{Q} \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \text{ y } (a_n) \text{ es periódica}\}$;

(f) $X_6(m) = \{(a_n) : a_n \in \mathbb{N} \text{ y } 1 \leq a_n \leq m \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\}$, con $m \in \mathbb{N}$.

24. Muestre que para todo $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ es $n^{\aleph_0} = \aleph_0^{\aleph_0} = c^{\aleph_0} = c$.

25. Una unión numerable de conjuntos de cardinal $\mathfrak{c}$ tiene ella misma cardinal $\mathfrak{c}$.

26. Consideremos los siguientes conjuntos de funciones

$$F(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}, \qquad F(\mathbb{Q}) = \{f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}\},$$
$$C(\mathbb{R}) = \{f \in F(\mathbb{R}) : f \text{ es continua}\}, \qquad C(\mathbb{Q}) = \{f \in F(\mathbb{Q}) : f \text{ es continua}\}.$$

(a) Muestre que $\#(F(\mathbb{R})) > \mathfrak{c}$ y determine los cardinales de $F(\mathbb{Q})$ y de $C(\mathbb{Q})$.

(b) Pruebe que la función $\phi : f \in C(\mathbb{R}) \mapsto f|_{\mathbb{Q}} \in C(\mathbb{Q})$ es inyectiva. ¿Qué significa esto?

(c) Determine el cardinal de $C(\mathbb{R})$.

27. El conjunto de las partes numerables de $\mathbb{R}$ tiene cardinal $\mathfrak{c}$.