Cálculo Avanzado
Segundo Cuatrimestre — 2019
Práctica 1: Números reales

1. Para cada $x \in \mathbb{R}$ sea $A_x = \{m \in \mathbb{Z} : m \leq x\}$.

(a) Muestre que el conjunto A_x no es vacío y que está acotado superiormente. Concluya que existe el máximo de A_x: lo llamamos la *parte entera* de x y lo escribimos $\lfloor x \rfloor$.

(b) Pruebe las siguientes afirmaciones:

- Para todo $x \in \mathbb{R}$ es $0 \leq x - \lfloor x \rfloor < 1$.
- $\lfloor x \rfloor = x \iff x \in \mathbb{Z}$.
- $\lfloor x \rfloor = \min\{k \in \mathbb{Z} : x < k+1\}$.
- $\lfloor x + y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$.
- $x < y \implies \lfloor x \rfloor \leq \lfloor y \rfloor$.

2. (a) Si $x, y \in \mathbb{R}$ son tales que $y - x > 1$, entonces existe un entero k tal que $x < k < y$.

(b) Si $x, y \in \mathbb{R}$ son tales que $x < y$, entonces existe $r \in \mathbb{R}$ tal que $x < r < y$.

(c) Si $r, s \in \mathbb{Q}$ son tales que $r > s$, entonces existe un número irracional q tal que $r > q > s$.

(d) Si $x, y \in \mathbb{R}$ son tales que $x < y$, entonces existe un número irracional entre x e y.

3. Muestre que el conjunto $A = \left\{\frac{m}{2^n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\right\}$ es denso en $\mathbb{R}$. Si $b \in (1, +\infty)$, ¿qué puede decir del conjunto $B = \left\{\frac{m}{b^n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\right\}$?

4. (a) Si $x \in \mathbb{R}$, entonces existe una sucesión $(q_n)_{n\geq 1}$ en $\mathbb{Q}$ que es estrictamente creciente, tiene $q_n \geq x$ para todo $n \in \mathbb{N}$, converge y tiene $\lim_{n\to\infty} q_n = x$.

(b) Enuncie un enunciado similar en el que la sucesión $(q_n)_{n\geq 1}$ es estrictamente decreciente y pruébelo.

5. Si $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ y $\varepsilon > 0$, entonces existe $q = (q_1, \dots, q_m) \in \mathbb{Q}^m$ tal que

$$\|x - q\| := \left(\sum_{i=1}^{m} (x_i - q_i)^2\right)^{1/2} < \varepsilon.$$

6. Si $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$ y $(c_n)_{n\geq 1}$ son sucesiones de números reales tales que

- existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ es $a_n \leq b_n \leq c_n$, y
- las sucesiones $(a_n)_{n\geq 1}$ y $(c_n)_{n\geq 1}$ convergen y tienen el mismo límite L,

entonces la sucesión $(b_n)_{n\geq 1}$ también converge y, de hecho, converge a L.

7. (*a*) Si una sucesión monótona $(a_n)_{n\geq 1}$ de números reales posee una subsucesión $(a_{n_k})_{k\geq 1}$ que converge a un número real L, entonces la sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$ misma también converge a L. ¿Qué sucede si la subsucesión converge a ∞?

(*b*) Una sucesión monótona de números reales converge si y solamente si es acotada.

(*c*) Toda subsucesión de una sucesión convergente es ella misma convergente.

(*d*) Encuentre un ejemplo de una sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$ que *no* converja y que sea tal que $\lim_{n\to\infty} |a_n - a_{n+1}| = 0$.

(*e*) ¿Converge necesariamente una sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$ tal que para todo $p \in \mathbb{N}$ se tiene que $\lim_{n\to\infty} |a_n - a_{n+p}| = 0$?

8. Una sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$ es *de Cauchy* si para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - a_m| < \varepsilon$ siempre que n, $m \geq n_0$.

(*a*) Si una subsucesión de una sucesión de Cauchy converge, entonces la sucesión completa converge.

(*b*) Toda sucesión de Cauchy es acotada.

9. Encuentre los límites superior e inferior de las siguientes sucesiones:

(*a*) $1, 3, -1, 1, 3, -1, 1, 3, -1, 1, 3, \ldots;$

(*b*) $a_n = (-1)^n \left(2 + \frac{3}{n}\right);$

(*c*) $a_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right);$

(*d*) la sucesión $(s_n)_{n\geq 1}$ tal que $s_1 = 0$ y para todo $n \in \mathbb{N}$ tiene

$$s_{2n} = \frac{s_{2n-1}}{2}, \qquad s_{2n+1} = \frac{1}{2} + s_{2n}.$$

(*e*) $a_n = \frac{n}{3} - \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor.$

10. (*a*) Encuentre una sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ de números reales tal que $\liminf_{n\to\infty} x_n = -1$, $\limsup_{n\to\infty} x_n = 5$ y el conjunto $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ es infinito.

(*b*) ¿Cuáles de las siguientes dos afirmaciones valen?

- Si $\limsup_{n\to\infty} x_n = 2$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n > 1{,}99$ para todo $n \geq n_0$.
- Si $\limsup_{n\to\infty} x_n = b$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \leq b$ para todo $n \geq n_0$.

11. Sea $(a_n)_{n\geq 1}$ una sucesión acortada de números reales.

(*a*) Es $\alpha = \limsup_{n\to\infty} a_n$ si y solamente si para todo $\varepsilon > 0$ se tiene que

- existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ es $a_n < \alpha + \varepsilon$, y
- para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $m \geq n$ y $a_m > \alpha - \varepsilon$.

(*b*) Es $\alpha = \limsup_{n\to\infty} a_n$ si y solamente si

- existe una subsucesión de $(a_n)_{n\geq 1}$ que converge a α, y
- toda subsucesión de $(a_n)_{n\geq 1}$ que converge tiene límite menor o igual a α.

12. Una sucesión de números reales $(a_n)_{n\geq 1}$ converge a un límite L si y solamente si

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n = L.$$

13. Si $(a_n)_{n\geq 1}$ y $(b_n)_{n\geq 1}$ son sucesiones acotadas de números reales, entonces valen las siguientes afirmaciones:

(a) $\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) \leq \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n$.

(b) Si $a_n \geq 0$ y $b_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n b_n) \leq \limsup_{n\to\infty} a_n \cdot \limsup_{n\to\infty} b_n.$$

(c) Si $c > 0$, entonces $\limsup_{n\to\infty} c a_n = c \limsup_{n\to\infty} a_n$.

Enuncie y pruebe resultados similares para $\liminf$.

14. Sea $(a_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de números reales positivos.

(a) $\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

(b) Si existe el límite $A = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, entonces $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = A$.

(c) Calcule $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.

15. Sean x, $y \in [0, 1)$, sean

$$x = 0.x_1x_2x_3\ldots, \qquad y = 0.y_1y_2y_3\ldots$$

los desarrollos de x e y en base $b > 1$, y supongamos que el de y es infinito, esto es, que el conjunto $\{i \in \mathbb{N} : y_i > 0\}$ es infinito.

(a) Si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x_i = y_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$ tal que $i < n$ y $x_n < y_n$, entonces $x < y$.

(b) El orden entre x e y es el mismo que el de los primeros dígitos b-arios en que difieren sus desarrollos.

(c) Supongamos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x_i = y_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$ tal que $i < n$ y $x_n < y_n$. Si $z \in [x, y]$, entonces el desarrollo $z = 0.z_1z_2z_3\ldots$ en base b de z tiene $z_i = x_i = y_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$ con $i < n$.

16. Encuentre los desarrollos en base 2, 3 y 16 de los números

$$2,25 \qquad 10.7 \qquad 27 \qquad 255.$$