Cálculo avanzado
Segundo Cuatrimestre — 2019

Segundo Parcial

Apellido y nombre: ....

L.U.: .... Hojas: ....

---

1. Muestre que una función lineal $T : V \to W$ entre espacios normados es continua si y solamente si cada vez que $(x_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión en V que converge a 0 la sucesión $(T(x_n))_{n\geq 1}$ es acotada.

2. Muestre que la serie de funciones $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{ne^{-nx}}{1+x^n}$ converge puntualmente en $(0,+\infty)$ y uniformemente en cada intervalo de la forma $(r,+\infty)$ con $r > 0$. ¿En qué puntos es derivable la función suma? ¿Es esta acotada?

3. Un espacio normado V es completo si y solo si el subconjunto $\{x \in V : \|x\| = 1\}$ es completo.

4. (a) Sea $F : V \to \mathbb{R}$ una función lineal y continua definida en un espacio normado V. Muestre que si x_0 es un vector de V tal que $\|x_0\| = 1$ y $\|x_0 - y\| \geq 1$ para cada $y \in \ker F$, entonces $\|F\| = |F(x_0)|$.

(b) Sea $T : C[0,1] \to \mathbb{R}$ tal que para cada $f \in C[0,1]$ es

$$T(f) = \int_0^{1/2} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_{1/2}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Muestre que T es lineal y continua, y calcule su norma.

†(c) Muestre que no existe $f \in C[0,1]$ tal que $\|f\| = 1$ y $|T(f)| = 1$.

5. Muestre que la función $F : f \in C[0,1] \mapsto \int_0^1 f(t)^2\,\mathrm{d}t \in \mathbb{R}$ es diferenciable y encuentre su diferencial.

6. Sea V un espacio normado y sean A y B dos subconjuntos de V. Si A es cerrado y B compacto, entonces el conjunto $C := \{a + b : a \in A, b \in B\}$ es un cerrado de V.