# Cálculo avanzado

## Segundo Cuatrimestre — 2019

## Segundo Parcial

---

Apellido y nombre: ..........................................................

L.U.: ................................ Hojas: ................................

---

**1.** Muestre que una función lineal $T : V \to W$ entre espacios normados es continua si y solamente si cada vez que $(x_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión en $V$ que converge a 0 la sucesión $(T(x_n))_{n\geq 1}$ es acotada.

*Solución.* Si $T$ es continua, sabemos que cada vez que $(x_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión en $V$ que converge a 0 la sucesión $(T(x_n))_{n\geq 1}$ converge a 0 y, por lo tanto, es acotada: esto nos dice que la condición del enunciado es necesaria para la continuidad de $T$.

Vamos que es suficiente. Supongamos que $T$ no es continua, de manera que el conjunto $\{\|T(x)\| : x \in V, \|x\| \leq 1\}$ no es acotado. Esto implica que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $y_n \in V$ con $\|y_n\| \leq 1$ y $\|T(y_n)\| \geq n^2$. Pongamos $x_n = y_n/n$ para cada $n \in \mathbb{N}$: es $\|x_n\| \leq 1/n$ y $\|T(x_n)\| \geq n$, así que $(x_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión en $V$ que converge a 0 tal que la sucesión $(T(x_n))_{n\geq 1}$ no es acotada. La condición del enunciado, por lo tanto, no se cumple. □

**2.** Muestre que la serie de funciones $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{ne^{-nx}}{1+x^n}$ converge puntualmente en $(0, +\infty)$ y uniformente en cada intervalo de la forma $(r, +\infty)$ con $r > 0$. ¿En qué puntos es derivable la función suma? ¿Es esta acotada?

*Solución.* Sea $r > 0$. Si $x \geq r$, entonces para todo $n \in \mathbb{N}$ es $\dfrac{ne^{-nx}}{1+x^n} \leq ne^{-nr}$ y la serie numérica $\sum_{n\geq 1} ne^{-nr}$ converge: el cociente entre dos de sus términos sucesivos es $(n+1)e^{-(n+1)r}/ne^{-nr} = (n+1)/ne^r$, que cuando $n$ crece converge a $e^{-r}$ , que es menor que 1. El criterio de Weierstraß, entonces, nos permite concluir que la serie del enunciado converge uniformemente en $(r, +\infty)$. Como esto es así cualquiera sea $r > 0$, esto implica que la serie converge puntualmente en todo el intervalo $(0, +\infty)$.

Llamemos $f$ a la suma de la serie. Si $n \in \mathbb{N}$, la función $ne^{-nx}/(1+x^n)$ es continua en 0 y ahí vale $n$: existe entonces $\delta_n > 0$ tal que $ne^{-nx}/(1+x^n) \geq \frac{1}{2}$ siempre que $x \in [0, \delta_n]$. Para cada $N \in \mathbb{N}$ podemos poner $x_N = \min\{\delta_1, \dots, \delta_N\}$ y es

$$f(x_N) = \sum_{n\geq 1} \frac{ne^{-nx_N}}{1+x_N^n} \geq \sum_{n=1}^{N} \frac{ne^{-nx_N}}{1+x_N^n} \geq \frac{N}{2}.$$

Esto muestra que la función $f$ no es acotada en $(0, +\infty)$.

Mostremos ahora que la función $f$ es derivable en todo $(0, +\infty)$: para ello es suficiente que probemos que la serie que se obtiene derivando término a término la de partida,

$$\sum_{n\geq 1} -\frac{n^2(x^n + x^{n-1} + 1)e^{-nx}}{(1+x^n)^2}, \tag{1}$$

converge uniformemente en cada intervalo de la forma $(r, +\infty)$ con $r > 0$.

Sea entonces $r > 0$. Observemos que si $x \in [0,1]$ es

$$\frac{x^n + x^{n-1} + 1}{(1+x^n)^2} \leq \frac{1+1+1}{(1+x^n)^2} \leq 3,$$

mientras que si $x \in [1, +\infty)$ es

$$\frac{x^n + x^{n-1} + 1}{(1+x^n)^2} \leq \frac{x^n + x^n + x^n}{1+x^n} = 3\frac{x^n}{1+x^n} \leq 3.$$

Usando esto vemos que si $x \in [r, +\infty)$ entonces

$$n^2 \frac{x^n + x^{n-1} + 1}{(1+x^n)^2} e^{-nx} \leq 3n^2 e^{-nr}.$$

Para ver que la serie (1) converge uniformemente en $(r, +\infty)$ es suficiente, entonces, con mostrar que la serie $\sum_{n\geq 1} n^2 e^{-nr}$ converge, y esto es inmediato vía una aplicación del criterio del cociente. □

**3.** Un espacio normado $V$ es completo si y solo si el subconjunto $\{x \in V : \|x\| = 1\}$ es completo.

*Solución.* Escribamos $S$ al conjunto del enunciado. Si $V$ es completo, entonces $S$ es completo porque es cerrado en $V$. Supongamos, para probar la recíproca, que $S$ es completo y sea $(x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de Cauchy en $V$: queremos probar que posee un límite.

La sucesión $(\|x_n\|)_{n\geq 1}$ es de Cauchy en $\mathbb{R}$: en efecto, si $\epsilon > 0$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_n - x_m\| < \epsilon$ siempre que $n$, $m \geq N$, y entonces cuando $n$, $m \geq N$ tenemos que $|\|x_n\| - \|x_m\|| \leq \|x_n - x_m\| < \epsilon$. Como el espacio métrico $\mathbb{R}$ es completo, existe $a = \lim_{n\to\infty} \|x_n\|$ y es, claro, un número no negativo. Si $a = 0$, entonces la sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ converge a 0. Supongamos entonces que $a > 0$. En ese caso, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $a/2 \leq \|x_n\| \leq 2a$ siempre que $n \geq M$ y podemos poner, para cada $n \geq M$, $y_n := x_n/\|x_n\|$, porque el denomimandor no se anula. Afirmamos que la sucesión $(y_n)_{n\geq M}$ es de Cauchy. Sea, en efecto, $\epsilon > 0$ y sea $N \in \mathbb{N}$ tal que cuando $n$, $m \geq N$ es $\|x_n - x_m\| < \epsilon$ y $\big|\|x_n\| - \|x_m\|\big| < \epsilon$. Entonces si $n$, $m \geq \max\{N, M\}$ es

$$\begin{aligned}\|y_n - y_m\| &= \left\| \frac{x_n}{\|x_n\|} - \frac{x_m}{\|x_m\|} \right\| = \left\| \frac{x_n - x_m}{\|x_n\|} + \left( \frac{1}{\|x_n\|} - \frac{1}{\|x_m\|} \right) x_m \right\| \\ &\leq \frac{\|x_n - x_m\|}{\|x_n\|} + \frac{\big|\|x_n\| - \|x_m\|\big|}{\|x_n\|\|x_m\|}\|x_m\| \leq \frac{\epsilon}{a/2} + \frac{\epsilon}{a^2/4} 2a = \frac{10}{a}\epsilon\end{aligned}$$

Como la sucesión $(y_n)_{n\geq M}$ toma valores en $S$, que es completo por hipótesis, posee un límite ahí: escribámoslo $y$. Es claro ahora que la sucesión $(x_n)_{n\geq M}$, que coincide con $(\|x_n\| y_n)_{n\geq M}$, converge a $ay$. Vemos así que el espacio $V$ es completo, como queremos. □

**4.** $(a)$ Sea $F : V \to \mathbb{R}$ una función lineal y continua definida en un espacio normado $V$. Muestre que si $x_0$ es un vector de $V$ tal que $\|x_0\| = 1$ y $\|x_0 - y\| \geq 1$

para cada $y \in \ker F$, entonces $\|F\| = |F(x_0)|$.

($b$) Sea $T : C[0,1] \to \mathbb{R}$ tal que para cada $f \in C[0,1]$ es

$$T(f) = \int_0^{1/2} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_{1/2}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Muestre que $T$ es lineal y continua, y calcule su norma.

†($c$) Muestre que no existe $f \in C[0,1]$ tal que $\|f\| = 1$ y $|T(f)| = 1$.

*Solución.* ($a$) Sea $x_0$ como en el enunciado. Sabemos que $|F(x_0)| \leq \|F\|\|x_0\| = \|F\|$, ya que $\|x_0\| = 1$. Por otro lado, si $x \in X$, entonces existen $y \in \ker F$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ tales que $x = y + \lambda x_0$. Observemos que $|\lambda| \leq \|x\|$: esto es evidente si $\lambda = 0$, y si $\lambda \neq 0$, entonces $\|x\| = |\lambda| \cdot \|x_0 - (-y/\lambda)\| \geq |\lambda|$ por la forma en que elegimos a $x_0$. Esto implica que $|F(x)| = |\lambda||F(x_0)| \leq |F(x_0)| \cdot \|x\|$, de manera que $\|F\| \leq |F(x_0)|$.

($b$) Es claro que si $f \in C[0,1]$, entonces

$$|T(f)| = \left| \int_0^{1/2} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_{1/2}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t \right| \leq \int_0^{1/2} |f(t)|\,\mathrm{d}t + \int_{1/2}^{1} |f(t)|\,\mathrm{d}t \leq \|f\|,$$

así que la función $T$ es continua y tiene $\|T\| \leq 1$.

Sera ahora $\epsilon \in (0, \frac{1}{2})$ y y consideremos la función $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} - \epsilon; \\ \frac{1}{\epsilon}(\frac{1}{2} - t) & \text{si } \frac{1}{2} - \epsilon \leq t \leq \frac{1}{2} + \epsilon; \\ -1 & \text{si } \frac{1}{2} + \epsilon \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Está función pertence a $C[0,1]$, tiene $\|f\| = 1$ y es

$$T(f) = \int_0^{1/2} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_{1/2}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t = 1 - \epsilon.$$

Es claro, entonces, que $\|T\| \geq 1 - \epsilon$ para todo $\epsilon \in (0, \frac{1}{2})$ y, por lo tanto, que $\|T\| \geq 1$.

Supongamos, para probar la última afirmación por el absurdo, que $f \in C[0,1]$ es tal que $\|f\| = 1$ y $|T(f)| = 1$. A menos de cambiar $f$ por $-f$ podemos suponer sin pérdida de generalidad que, de hecho, es $T(f) = 1$. Tenemos que

$$\frac{1}{2} = \int_0^{1/2} (f + (1 - f)) = \int_0^{1/2} f + \int_0^{1/2} (1 - f).$$

y que

$$\frac{1}{2} = \int_{1/2}^{1} (-f + (1 + f)) = -\int_0^{1/2} f + \int_{1/2}^{1} (1 + f),$$

y sumando miembro a miembro estas dos igualdades y usando que $T(f) = 1$ vemos que

$$0 = \int_0^{1/2} (1 - f) + \int_{1/2}^{1} (1 + f).$$

Como $\|f\| = 1$, es $-1 \leq f \leq 1$ y, por lo tanto, $1 - f \geq 0$ y $f + 1 \geq 0$: esto nos dice que los integrandos de estas dos últimas integrales son no negativos. Como son continuos, vemos que tiene que ser $1 - f = 0$ en $[0, 1/2]$ y $1 + f = 0$ en $[1/2, 1]$, lo que es absurdo. $\square$

**5.** Muestre que la función $F : f \in C[0,1] \mapsto \int_0^1 f(t)^2 \, \mathrm{d}t \in \mathbb{R}$ es diferenciable y encuentre su diferencial.

*Solución.* Sea $f \in C[0,1]$ y $G : h \in C[0,1] \mapsto \int_0^1 2f(t)h(t) \, \mathrm{d}t \in \mathbb{R}$, que es claramente una función lineal y continua, con $\|G\| \leq 2\|f\|$. Si $h \in C[0,1]$, es

$$F(f+h) - F(f) - G(h) = \int_0^1 \big((f(t)+h(t))^2 - f(t) - 2f(t)h(t)\big) \, \mathrm{d}t = \int_0^1 h(t)^2 \, \mathrm{d}t$$

y

$$\left| \int_0^1 h(t)^2 \, \mathrm{d}t \right| \leq \|h\|^2,$$

así que

$$\lim_{h \to 0} \frac{\int_0^1 h(t)^2 \, \mathrm{d}t}{\|h\|} = 0.$$

Esto muestra que $F$ es diferenciable en $f$ y que $G$ es allí su diferencial. $\square$

**6.** Sea $V$ un espacio normado y sean $A$ y $B$ dos subconjuntos de $V$. Si $A$ es cerrado y $B$ compacto, entonces el conjunto $C := \{a + b : a \in A, b \in B\}$ es un cerrado de $V$.

*Solución.* Supongamos que $A$ es cerrado y $B$ compacto, y sea $(c_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en $C$ que converge a un punto $c$ de $V$: queremos mostrar que $c \in C$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ hay $a_n \in A$ y $b_n \in B$ tales que $c_n = a_c + b_n$ y, como $B$ es compacto, hay una sucesión estrictamente creciente $(n_k)_{k\geq 1}$ en $\mathbb{N}$ tal que la subsucesión $(b_{n_k})_{k\geq 1}$ de $(b_n)_{n\geq 1}$ converge a un punto $b \in B$. Es claro que la sucesión $(a_{n_k})_{k\geq 1}$, que coicide con $(c_{n_k} - b_{n_k})_{k\geq 1}$, converge a $c - b$: como $A$ es cerrado, tenemos que $c - b \in A$ y, por lo tanto, que $c = (c-b) + b \in A + B$. $\square$