Cálculo avanzado

Segundo Cuatrimestre — 2019

Primer Parcial

Apellido y nombre: ....

L.U.: .... Hojas: ....

---

1. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función y sea S el conjunto de los puntos $x \in \mathbb{R}$ tales que $\lim_{y \to x} f(y) = +\infty$. Muestre que S es un subconjunto G_δ de $\mathbb{R}$ y que si es denso en $\mathbb{R}$, entonces no es numerable.

2. Muestre que un subconjunto de un espacio métrico es la frontera de un abierto si y solamente si es cerrado y tiene interior vacío.

3. Determine el cardinal del conjunto de todas sucesiones $(a_n)_{n\geq 1}$ de elementos de $\mathbb{N}$ tales que $a_n \mid a_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} < \infty$.

4. Todo abierto de $\mathbb{R}$ es la unión de una familia a lo sumo numerable de intervalos abiertos disjuntos dos a dos.

5. Un espacio métrico es conexo si y solamente si todos sus subconjuntos propios y no vacíos tienen frontera no vacía.

6. Sea K el conjunto de todas las sucesiones de elementos de $\{0, 1\}$. Si $x = (x_n)_{n\geq 1}$ e $y = (y_n)_{n\geq 1}$ son elementos distintos de K, podemos poner

$$\nu(x, y) := \min\{i \in \mathbb{N} : x_i \neq y_i\},$$

ya que el conjunto cuyo mínimo estamos tomando no es vacío.

Muestre que hay una métrica $d : K \times K \to \mathbb{R}$ tal que $d(x, y) = 2^{-\nu(x,y)}$ siempre que x e y son elementos distintos de K, y que el espacio métrico (K, d) es separable, completo, totalmente desconexo y que no tiene puntos aislados.