Cálculo avanzado

Segundo Cuatrimestre — 2019

Primer Parcial

Apellido y nombre: ....

L.U.: .... Hojas: ....

---

1. Muestre que si X es un espacio conexo y no acotado, entonces para todo $x \in X$ y todo $r > 0$ la esfera $\{y \in X : d(x, y) = r\}$ no es vacía.

2. Determine los cardinales de los conjuntos $\mathscr{I}$ y $\mathscr{S}$ de todas las funciones $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que son inyectivas y sobreyectivas, respectivamente.

3. Sea $((X_n, d_n))_{n\geq 1}$ una sucesión de espacios métricos, sea $X = \prod_{n\geq 1} X_n$ y consideremos la métrica $d : X \times X \to \mathbb{R}$ tal que

$$d(x, y) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^n} \frac{d_n(x_n, y_n)}{1 + d_n(x_n, y_n)}$$

cada vez que $x = (x_n)_{n\geq 1}$ e $y = (y_n)_{n\geq 1}$ son elementos de X. Muestre que el espacio métrico (X, d) es separable si y solamente si para todo $n \in \mathbb{N}$ el espacio métrico (X_n, d_n) es separable.

4. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ una función uniformemente continua. Si A es un subconjunto acotado de $\mathbb{R}$, entonces $f(A)$ es un subconjunto acotado de $\mathbb{R}^m$.

5. Sea X un espacio métrico. Si toda función continua $X \to \mathbb{R}$ es uniformemente continua, entonces X es completo.

6. Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones continuas tales que $\lim_{|t|\to\infty}(f(t) - g(t)) = 0$. Si f es uniformemente continua, entonces g también lo es.