El lema de Zorn

Mariano Suárez-Álvarez

28 de agosto, 2019

1 El lema de Zorn 1
2 Aplicación: existencia bases de espacios vectoriales 2
3 Aplicación: comparabilidad de cardinales 3
4 Aplicación: el axioma de elección 5
5 Aplicación: bosques generadores 6
6 Aplicación: extensiones lineales de relaciones de orden 8
7 Aplicación: el teorema de Hahn–Banach 12

1 El lema de Zorn

Sea $(\mathscr{X}, \preceq)$ un ***conjunto ordenado***, de manera que $\mathscr{X}$ es un conjunto y $\preceq$ es una relación de orden en $\mathscr{X}$. Necesitamos tres definiciones:

- Un subconjunto Y de $\mathscr{X}$ es una ***cadena*** si cada vez que x e y son dos elementos de Y se tiene que $x \preceq y$ o que $y \preceq x$, es decir, si todo par de elementos de Y es comparable. También decimos que Y es un subconjunto ***totalmente ordenado*** de $\mathscr{X}$.
- Por otro lado, un subconjunto Y de $\mathscr{X}$ es ***superiormente acotado*** si existe un elemento x en $\mathscr{X}$ tal que $y \leq x$ para todo $y \in Y$, y todo elemento x con esa propiedad es una ***cota superior*** para Y.
- Finalmente, un elemento x de $\mathscr{X}$ es ***maximal*** si para todo $y \in \mathscr{X}$ se tiene que
$$x \leq y \implies x = y.$$

Es importante observar la diferencia entre la noción de elemento maximal y elemento máximo: un elemento x de $\mathscr{X}$ es un máximo si para todo $y \in \mathscr{X}$ se tiene que $y \leq x$. Un conjunto ordenado puede tener a lo sumo un elemento máximo, mientras que puede tener muchos elementos maximales.

Usando estas nociones podemos enunciar el *Lema de Zorn*:

Lema de Zorn. *Sea $(\mathscr{X}, \preceq)$ un conjunto ordenado con $\mathscr{X} \neq \varnothing$. Si toda cadena Y de $\mathscr{X}$ está acotada superiormente, entonces $\mathscr{X}$ posee un elemento maximal.*

Es útil observar que en la situación del *Lema de Zorn* la condición de que toda cadena está acotada superiormente se cumple automáticamente para cadenas *finitas*. De hecho, vale lo siguiente:

Lema 1. *Sea $(\mathscr{X}, \preceq)$ un conjunto ordenado. Si Y es una cadena finita y no vacía de $\mathscr{X}$, entonces Y posee un elemento máximo.*

Demostración. Sea n el cardinal de Y y sea $y \in Y$. Si $n = 1$, entonces $Y = \{y\}$ y, por supuesto, y es un máximo de Y. Si en cambio $n > 1$, entonces el conjunto $Y' = Y \setminus \{y\}$ es una cadena de $\mathscr{X}$ finita de cardinal $n - 1$: la hipótesis inductiva nos dice que Y' tiene un elemento máximo y'. Ahora bien, como Y es una cadena, y, $y' \in Y$ e $y \neq y'$, tenemos que o bien $y < y'$ o bien $y' < y$: en el primer caso y' es un máximo de Y y en el segundo y es un máximo de Y. □

2 Aplicación: existencia bases de espacios vectoriales

Sea $\Bbbk$ un cuerpo.

Proposición 2. *Todo $\Bbbk$-espacio vectorial posee una base.*

Cuando el espacio vectorial es finitamente generado, esta afirmación es fácil de probar haciendo inducción con respecto al cardinal de un subconjunto generador finito. Ese argumento, sin embargo, no puede extenderse al caso de espacios vectoriales que no son finitamente generados. De hecho, es posible mostrar que la afirmación del enunciado es equivalente (en presencia de los demás axiomas usuales de la teoría de conjuntos) al *Axioma de Elección* y, por lo tanto, al *Lema de Zorn* — esto fue probado por Andreas Blass en [Bla84].

Demostración. Sea V un $\Bbbk$-espacio vectorial, sea $\mathscr{X}$ el conjunto de todos los subconjuntos de V que son linealmente independientes y sea $\preceq$ la relación de contención en $\mathscr{X}$, de manera que si A y B son elementos de $\mathscr{X}$ se tiene que

$$A \preceq B \iff A \subseteq B.$$

Es claro que el conjunto $\mathscr{X}$ no es vacío, ya que $\varnothing \in \mathscr{X}$ por razones triviales. Veamos que el conjunto ordenado $(\mathscr{X}, \preceq)$ satisface la condición del *Lema de Zorn*.

Sea Y un subconjunto totalmente ordenado de $\mathscr{X}$: tenemos que mostrar que Y está superiormente acotado. Sea

$$C \coloneqq \bigcup_{B \in Y} B,$$

la unión de todos los elementos de Y. Afirmamos que C es un subconjunto linealmente independiente de V.

Supongamos que, por el contrario, esto no es así, de manera que existen $n \in \mathbb{N}$, elementos $v_1, \ldots, v_n$ en C distintos dos a dos, y escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \Bbbk$, no todos nulos, tales que $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n = 0$. En vista de la definición de C, para cada $i \in [\![n]\!]$ existe $B_i \in Y$ tal que $v_i \in B_i$. El conjunto $\{B_i : i \in [\![n]\!]\}$ es finito y está contenido en Y, así que está totalmente ordenado por $\preceq$: de acuerdo al Lema 1, existe $j \in [\![n]\!]$ tal que $B_i \preceq B_j$ para todo $i \in [\![n]\!]$. En particular, tenemos que $v_1, \ldots, v_n \in B_j$: pero esto es absurdo, porque esos vectores son linealmente dependientes y B_j es un conjunto linealmente independiente.

Esta contradicción muestra que C es linealmente independiente y, por lo tanto, que es un elemento de $\mathscr{X}$. Como claramente $B \preceq C$ para todo $B \in Y$, vemos que C es una cota superior para la cadena Y. Esto prueba, como queríamos, que el conjunto ordenado $(\mathscr{X}, \preceq)$ satisface la condición del *Lema de Zorn* y, como consecuencia de ello, ese lema nos permite concluir que existe un elemento G en $\mathscr{X}$ que es maximal.

Para terminar, bastará que mostremos que este conjunto G es una base del espacio vectorial V. Como es linealmente independiente, para ello solo nos queda probar que genera a V. Ahora bien, si no fuera ese el caso, existiría un vector $v \in V$ tal que v no pertenece al subespacio $\langle G \rangle$ de V generado por G y es fácil ver que entonces el conjunto $G' = G \cup \{v\}$ sería linealmente independiente: esto es absurdo, porque tendríamos que $G \prec G' \in \mathscr{X}$, contradiciendo el hecho de que G es un elemento maximal de $\mathscr{X}$.

□

3 Aplicación: comparabilidad de cardinales

Proposición 3. *Si A y B son dos conjuntos, entonces existe una función inyectiva $A \to B$ o una función inyectiva $B \to A$.*

Demostración. Sea $\mathscr{X}$ el conjunto de todos los pares (C, f) con C un subconjunto de A y $f : C \to B$ una función inyectiva. Este conjunto $\mathscr{X}$ no es vacío, ya que el par $(\varnothing, f)$, con $f : \varnothing \to B$ la función vacía, es un elemento de $\mathscr{X}$.

Definimos en $\mathscr{X}$ una relación $\preceq$ de la siguiente manera: si (C, f) y (D, g) son dos elementos de $\mathscr{X}$, entonces

$$(C, f) \preceq (D, g) \iff C \subseteq D \text{ y } g|_C = f.$$

Es fácil verificar que $\preceq$ es una relación de orden en $\mathscr{X}$. Mostremos que el conjunto ordenado $(\mathscr{X}, \preceq)$ satisface la condición del *Lema de Zorn.*

Sea Y un subcojunto totalmente ordenado de $\mathscr{X}$ y sea

$$T := \bigcup_{(C,f) \in Y} C \subseteq A.$$

Por otro lado, para cada $(C, f) \in Y$ la función f es un subconjunto de $C \times B$, que está por lo tanto contenido en $T \times B$, y podemos considerar la unión

$$g := \bigcup_{(C,f) \in Y} f \subseteq T \times B.$$

Mostremos que g es, de hecho, una función $T \to B$.

- Si $x \in T$, entonces existe $(C, f) \in Y$ tal que $x \in C$ y, por lo tanto, $(x, f(x)) \in f \subseteq g$.
- Por otro lado, supongamos que $x \in T$ y que b y b' son elementos de B tales que los pares (x, b) y (x, b') están en g. En vista de la definición de g, esto significa que existen (C, f) y (C', f') en Y tales que $(x, b) \in f$ y $(x, b') \in f'$, esto es, tales que $b = f(x)$ y $b' = f'(x)$. Ahora bien, como los pares (C, f) y (C', f') están en Y y este conjunto está totalmente ordenado con respecto a la relación $\preceq$, tenemos que $(C, f) \preceq (C', f')$ o $(C', f') \preceq (C, f)$. En el primer caso tenemos que $x \in C \subseteq C'$ y que $f'|_C = f$, de manera que $b = f(x) = f'(x) = b'$, y en el segundo caso llegamos de manera simétrica a la misma conclusión. Vemos así que en cualquier caso es $b = b'$.

Afirmamos que la función $g : T \to B$ es inyectiva:

- Supongamos que x e y son dos elementos de T tales que $g(x) = g(y)$. Como pertenecen a T, hay pares (C, f) y (C', f') en Y tales que $x \in C$ e $y \in C'$. Por otro lado, como Y está totalmente ordenado por $\preceq$, o bien $(C, f) \preceq (C', f')$ o $(C', f') \preceq (C, f)$. En el primer caso es $x \in C \subseteq C'$ y que $f'|_C = f$, de manera que $f'(y) = g(y) = g(x) = f(x) = f'(x)$ y, como f' es una función inyectiva, que $y = x$. En el segundo caso, tenemos que $y \in C' \subseteq C$ y que $f|_{C'} = f'$, así que $f(x) = g(x) = g(y) = f'(y) = f(y)$ y, como f' es una función inyectiva, que $x = y$.

Con todo esto concluimos que el par (T, g) es un elemento de $\mathscr{X}$. Se trata, de hecho, de una cota superior para Y en $\mathscr{X}$:

- Sea (C, f) un elemento de Y. Por la forma en que definimos a T y a g, es claro que $C \subseteq Y$ y que $f \subseteq g$, y esto último significa precisamente que $g|_C = f$. Vemos así que $(C, f) \preceq (T, g)$.

La conclusión de todo esto es que el conjunto ordenado $(\mathscr{X}, \preceq)$ satisface la condición del *Lema de Zorn* y, por lo tanto, que existe un elemento (D, h) en $\mathscr{X}$ que es maximal. Tenemos así una función inyectiva $h : D \to B$ definida en un subconjunto D de A, y estamos en alguno de los siguientes dos casos:

- Puede ser que D coincida con A, y entonces h es una función inyectiva $A \to B$.
- Puede ser que en cambio tengamos que $D \subsetneq A$, de manera que hay un elemento $a \in A \setminus D$. Supongamos por un momento que la función h no es sobreyectiva, de manera que también existe un elemento $b \in B \setminus h(D)$. En ese caso podemos considerar el conjunto $D' = D \cup \{a\}$ y la función $h' : D' \to B$ tal que para cada $d \in D$ tiene

  $$h'(d) = \begin{cases} h(d) & \text{si } d \in D; \\ b & \text{si } d = a. \end{cases}$$

  Está función es inyectiva, así que el par (D', h') es un elemento de $\mathscr{X}$, y es claro que $(D, h) \prec (D', h')$: esto es absurdo, porque el par (D, h) es maximal en $\mathscr{X}$.

Concluimos de esta forma que si $D \subsetneq A$, entonces la función $h : D \to B$ es una biyección. Podemos, por lo tanto, considerar su función inversa $h^{-1} : B \to D$ y la composición de esta con la función inclusión $\iota : D \hookrightarrow A$: claramente la función $\iota \circ h^{-1} : B \to A$ es inyectiva.

En definitiva, o hay una función inyectiva $A \to B$ o hay una función inyectiva $B \to A$, como afirma la proposición. □

En el transcurso de la prueba que acabamos de hacer construimos una función: el siguiente lema abstrae la construcción, que usaremos varias veces.

Lema 4. *Sean A y B dos conjuntos, sea Y un conjunto de pares (C, f) con $C \subseteq A$ y $f : C \to B$ una función, y consideremos el conjunto*

$$T \coloneqq \bigcup_{(C,f) \in Y} C.$$

Si cada vez que (C, f) y (D, g) son elementos de Y se tiene que o bien $C \subseteq C'$ y $f'|_C = f$ o bien $C' \subseteq C$ y $f|_{C'} = f'$, entonces existe una función $g : T \to B$ tal que para cada $(C, f) \in Y$ es $g|_C = f$. □

4 Aplicación: el axioma de elección

Si P es un conjunto de subconjuntos no vacíos de un conjunto A, una ***función de elección*** sobre P es una función $c : P \to A$ tal que $c(T) \in T$ para todo $T \in P$.

Proposición 5. *Sea A un conjunto. Si P es un conjunto de subconjuntos no vacíos de A, entonces existe una función de elección $c : P \to A$ sobre P.*

Notemos que esta afirmación es precisamente el *Axioma de Elección*. Lo que estamos afirmando es que el *Lema de Zorn* implica —en presencia de los restantes axiomas usuales de la teoría de conjuntos— al *Axioma de Elección*. La implicación recíproca también es cierta, pero require más trabajo.

Demostración. Sea A un conjunto y sea P un conjunto de subconjuntos no vacíos de A. Consideremos el conjunto $\mathscr{X}$ de todos los pares ordenados (Q, d) con $Q \subseteq P$ y $d : Q \to A$ una función de elección sobre Q, y la relación $\preceq$ sobre $\mathscr{X}$ tal que si (Q, d) y (Q', d') son elementos de $\mathscr{X}$ se tiene que

$$(Q, d) \preceq (Q', d') \iff Q \subseteq Q' \text{ y } d'|_Q = d.$$

Es fácil verificar que $\preceq$ es una relación de orden sobre $\mathscr{X}$ y es claro que $\mathscr{X} \neq \varnothing$, ya que el par $(\varnothing, d)$, con $d : \varnothing \to A$ la función vacía, es un elemento de $\mathscr{X}$. Veamos que el conjunto ordenado $(\mathscr{X}, \preceq)$ satisface la condición del *Lema de Zorn*.

Sea Y un subconjunto totalmente ordenado de $\mathscr{X}$. En vista del Lema 4, si ponemos

$$R \coloneqq \bigcup_{(Q,d)\in Y} Q \subseteq P,$$

entonces existe una función $h : R \to A$ tal que para todo $(Q, d) \in Y$ se tiene que $h|_Q = d$. En particular, se sigue de esto que la función h es una función de elección sobre R: en efecto, si $T \in R$, entonces existe $(Q, d) \in Y$ tal que $T \in Q$ y entonces $h(T) = d(T) \in T$, porque d es una función de elección sobre Q. Vemos así que (R, h) es un elemento de $\mathscr{X}$ y es claro que (R, h) es una cota superior para la cadena Y.

Concluimos de esta forma que el conjunto ordenado $(\mathscr{X}, \preceq)$ satisface la condición del *Lema de Zorn* y, por lo tanto, que existe un par (S, k) en $\mathscr{X}$ que es maximal. El conjunto S está contenido en P. Supongamos por un momento que se trata de un subconjunto propio, de manera que existe $Z \in P \setminus S$. Como Z no es vacío, podemos elegir un elemento $z \in Z$ y considerar la función $l : S \cup \{Z\} \to A$ tal que para cada $T \in S \cup \{Z\}$ es

$$l(T) = \begin{cases} k(T) & \text{si } T \in S; \\ z & \text{si } T = Z. \end{cases}$$

Es inmediato ver que l es una función de elección sobre $S \cup \{Z\}$, de manera que $(S \cup \{Z\}, l)$ es un elemento de $\mathscr{X}$, y que $(S, k) \prec (S \cup \{Z\}, l)$: esto es absurdo, porque (S, k) es un elemento maximal de $\mathscr{X}$.

Esta contradicción provino de suponer que S es un subconjunto propio de P: debe ser entonces $S = P$ y, por lo tanto, la función $k : S = P \to A$ es una función de elección sobre P. Esto prueba la proposición. $\square$

5 Aplicación: bosques generadores

Sea V un conjunto, cuyos elementos llamaremos ***vértices***. Un ***grafo*** sobre V es un conjunto de subconjuntos de V de cardinal exactamente 2. Si a y b son dos elementos de V y $\{a, b\} \in G$, decimos que $\{a, b\}$ es un ***arco*** del grafo G.

Un ***subgrafo*** de un grafo G sobre V es simplemente un subconjunto H de G. Por otro lado, si G es un grafo, un ***ciclo simple*** en G es una secuencia finita $v_1, \ldots, v_n$ de tres o más vértices vértices de V que son distintos dos a dos y para los que se tiene que $\{v_i, v_{i+1}\} \in G$ para cada $i \in [\![n-1]\!]$ y $\{v_n, v_1\} \in G$.

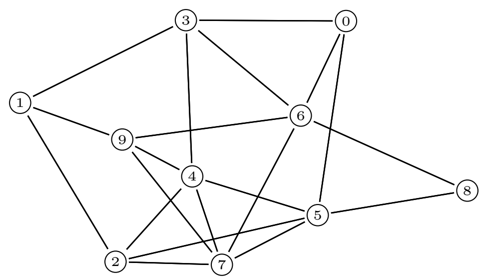
Un grafo es un ***bosque*** si no posee ningún ciclo. Si G es un grafo, un subgrafo $T \subseteq G$ es un ***bosque generador*** de G si es un bosque y para todo $v \in V$ tal que existe $w \in V$ $\{v, w\} \in G$ existe también $w' \in V$ tal que $\{v, w'\} \in T$.

Cuando el conjunto V de vértices es finito —y a veces también cuándo es infinito— podemos representar gráficamente un grafo G sobre V dibujando un punto por cada elemente de V y conectando con una línea cada par de vértices a

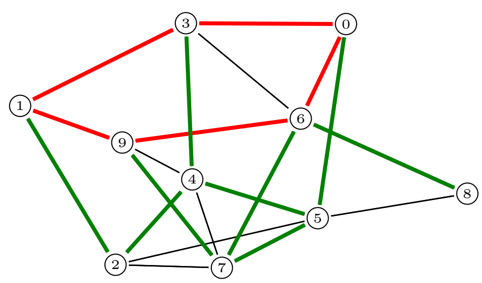
y b tales que $\{a, b\} \in G$. Por ejemplo, si $V = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ y

$$\begin{aligned} G = \{&\{1,2\},\{1,3\},\{1,9\},\{1,2\},\{2,4\},\{2,5\},\{2,7\},\{1,3\},\{3,4\},\{3,6\},\\ &\{3,0\},\{2,4\},\{3,4\},\{4,5\},\{4,7\},\{4,9\},\{2,5\},\{4,5\},\{5,7\},\{5,8\},\\ &\{5,0\},\{3,6\},\{6,7\},\{6,8\},\{6,9\},\{6,0\},\{2,7\},\{4,7\},\{5,7\},\{6,7\},\\ &\{7,9\},\{5,8\},\{6,8\},\{1,9\},\{4,9\},\{6,9\},\{7,9\},\{3,0\},\{5,0\},\{6,0\}\} \end{aligned}$$

podemos representar gráficamente a G de la siguiente manera:



El conjunto de arcos pintados en rojo en el siguiente dibujo es un ciclo de G y el de los arcos pintados en verde es un bosque generador.



Proposición 6. *Todo grafo posee un bosque generador.*

Demostración. Sea V un conjunto de vértices, sea G un grafo sobre V, sea $\mathscr{X}$ el conjunto de todos los subgrafos de G que son árboles y consideremos en $\mathscr{X}$ la relación de orden $\preceq$ tal que si S y T son elementos de $\mathscr{X}$ entonces

$$S \preceq T \iff S \subseteq T.$$

Es $\varnothing \in \mathscr{X}$, así que $\mathscr{X} \neq \varnothing$. Sea, por otro lado, Y un subconjunto totalmente ordenado de $\mathscr{X}$ y consideremos su unión

$$T \coloneqq \bigcup_{S \in Y} S.$$

Este conjunto es un grafo sobre V y, más aún, T es un bosque. Supongamos, para verlo, que no: existe entonces un ciclo, esto es, un entero $n \geq 3$ y una secuencia de vértices $v_1, \ldots, v_n \in V$ distintos dos a dos y tales que $\{v_i, v_{i+1}\} \in T$ para cada $i \in [\![n-1]\!]$ y $\{v_n, v_1\} \in T$. En vista de la definición de T, esto significa que existen $S_1, \ldots, S_n \in Y$ tales que $\{v_i, v_{i+1}\} \in S_i$ para cada $i \in [\![n-1]\!]$ y $\{v_n, v_1\} \in S_n$. Como $\{S_1, \ldots, S_n\}$ es una cadena finita en $\mathscr{X}$, existe $j \in [\![n]\!]$ tal que $S_i \subseteq S_j$ para todo $i \in [\![n]\!]$ y, por lo tanto, tenemos que $\{v_i, v_{i+1}\} \in S_j$ para cada $i \in [\![n-1]\!]$ y $\{v_n, v_1\} \in S_j$: esto nos dice que $v_1, \ldots, v_n$ es un ciclo en S_j, y esto es absurdo, ya que S_j es un bosque.

Concluimos de esta manera que $T \in \mathscr{X}$ y, en definitiva, que T es una cota superior para Y en $\mathscr{X}$. Así, el conjunto ordenado $(\mathscr{X}, \preceq)$ satisface la condición del *Lema de Zorn* y, por lo tanto, hay un elemento maximal Q en $\mathscr{X}$.

Mostremos, para terminar la prueba de la proposición, que Q es un bosque generador de G. Es un bosque, ya que es un elemento de $\mathscr{X}$. Supongamos entonces que no es generador: esto significa que existe $v \in V$ tal que

hay un vértice $w \in V$ con $\{v, w\} \in G$ y no existe ningún vértice $w' \in V$ tal que $\{v, w'\} \in Q$. (1)

Sea $R = Q \cup \{\{v, w\}\}$. Como R contiene propiamente a Q y es un subgrafo de G, para llegar a un absurdo bastará que mostremos que es un bosque, ya que en ese caso tendremos que $R \in \mathscr{X}$ y $Q \prec R$, contradiciendo el hecho de que R es un elemento maximal de $\mathscr{X}$.

Supongamos entonces que hay un ciclo en R, esto es, una secuencia $v_1, \ldots, v_n$ de elementos de V distintos dos a dos con $n \geq 3$ y tales que $\{v_i, v_{i+1}\} \in R$ para cada $i \in [\![n-1]\!]$ y $\{v_n, v_1\} \in R$. Si $v_i \neq v$ para todo $i \in [\![n]\!]$, entonces tenemos de hecho que $\{v_i, v_{i+1}\} \in Q$ para cada $i \in [\![n-1]\!]$ y $\{v_n, v_1\} \in Q$, es decir, que el ciclo es un ciclo en Q, y esto es imposible porque Q es un bosque. Concluimos así que existe $j \in [\![n]\!]$ tal que $v_j = v$.

Si $1 < j < n$, entonces $\{v_{j-1}, v\}$ y $\{v, v_{j+1}\}$ son dos elementos de R; si $j = 1$, entonces $\{v_n, v\}$ y $\{v, v_2\}$ son dos elementos de R; finalmente, si $j = n$, entonces $\{v_{n-1}, v\}$ y $\{v, v_1\}$ son dos elementos de R. Vemos así que en cualquier caso hay dos elementos *distintos* s y t de V tales que $\{v, s\}$ y $\{v, t\}$ están en R. Ahora bien, sabemos que $\{v, w\} \in R$ y a lo sumo uno de s o t puede ser igual a w: vemos de esta forma que existe $w' \in V$ tal que $w' \neq w$ y $\{v, w'\} \in R$. En vista de la definición de R, tiene que ser entonces $\{v, w'\} \in Q$, pero esto contradice (1). Esta contradicción provino de haber supuesto que el subgrafo Q de G, que es un bosque, no es generador. La proposición queda así probada. □

6 Aplicación: extensiones lineales de relaciones de orden

Si V es un conjunto y $R \subseteq V \times V$ es una relación de orden en V, decimos que una relación $L \subseteq V \times V$ es una ***extensión lineal*** de R si L es una relación de orden total y $R \subseteq L$. Queremos mostrar que toda relación de orden posee una extensión lineal. Antes necesitamos hacer una observación.

Sea R una relación en un conjunto V. Una secuencia ordenada $(v_1, \ldots, v_n)$ de elementos de V con $n \geq 2$ es un ***ciclo*** de longitud n de R si sus elementos no son todos iguales entre sí, $v_1 = v_n$ y para cada $i \in [\![n-1]\!]$ es $(v_i, v_{i+1}) \in R$.

Una consecuencia sencilla de la antisimetría de las relaciones de orden es que no admiten ciclos:

Lema 7. *Sea V un conjunto. Si $R \subseteq V \times V$ es una relación de orden en V, entonces R no admite ciclos.*

Demostración. Sea R una relación de orden en V y supongamos que, por el contrario, hay un ciclo $c = (v_1, \ldots, v_n)$ en R. Más aún, supongamos que c es un ciclo para el que n es mínimo. No todos los elementos del ciclo son iguales entre sí y $v_1 = v_n$, así que existe un entero j con $1 < j < n$ y $v_1 \neq v_j$. Si $j > 2$, entonces como $(v_1, v_2) \in R$ y $(v_2, v_3) \in R$, tenemos que $(v_1, v_r) \in R$: como no todos los elementos de la secuencia $(v_1, v_3, \ldots, v_n)$ son iguales entre sí, esta secuencia es un ciclo. Como su longitud es menor que n, la forma en que elegimos a n implica que esto es imposible: vemos así que debe ser $j = 2$. De manera similar podemos llegar a una contradicción si suponemos que $j < n - 2$, así que tiene que ser $j = n - 1$. En definitiva, el ciclo c con el que empezamos es de la forma (v_1, v_2, v_1) y tenemos que los pares (v_1, v_2) y (v_2, v_1) están en R. Como R es una relación antisimétrica, esto implica que, de hecho, $v_1 = v_2 = v_3$ y esto es absurdo. Esta contradicción provino de suponer que la relación R admite ciclos. $\square$

Una relación que no admite ciclos no es necesariamente una relación de orden, pero puede «completarse» a una relación de orden de al menos una forma:

Lema 8. *Sea V un conjunto. Si $R \subseteq V \times V$ es una relación en V que no admite ningún ciclo, entonces existe una relación de orden $S \subseteq V \times V$ en V tal que $R \subseteq S$.*

Demostración. Sea R una relación en V que no admite ningún ciclo y sea S la relación en V tal que si x e y son elementos de V se tiene que $(x, y) \in S$ si y solamente si existen $n \in \mathbb{N}$ y $v_1, \ldots, v_n \in V$ tales que $x = v_1$, $(v_i, v_{i+1}) \in R$ para cada $i \in [\![n-1]\!]$, e $y = v_n$: decimos en esa situación que la secuencia $(v_1, \ldots, v_n)$ es un ***camino*** de x a y en R de longitud n.

Si $x, y \in V$ son tales que $(x, y) \in R$, entonces la secuencia (v_1, v_2) con $v_1 = x$ y $v_2 = y$ es un camino de x a y en R de longitud 2: esto muestra que $R \subseteq S$. Para probar la proposición, entonces, va a ser suficiente con que mostremos que S es una relación de orden.

- Si $x \in V$, entonces $(x, x) \in R \subseteq S$, así que S es una relación reflexiva.
- Supongamos que x, y, $z \in V$ son tales que los pares (x, y) e (y, z) están en S, de manera que hay enteros n, $m \in \mathbb{N}$ y caminos $(v_1, \ldots, v_n)$ y $(w_1, \ldots, w_m)$ en R de x a y y de y a z de longitud n y m, respectivamente. Es inmediato verificar que $(v_1, \ldots, v_n, w_1, \ldots, w_n)$ es un camino en R de x a z de longitud $n + m$ y, por lo tanto, que $(x, z) \in S$. Vemos así que la relación S es transitiva.

- Finalmente, supongamos que x e y son dos elementos distintos de V tales que los pares (x, y) e (y, x) están ambos en S. Existen entonces enteros $n, m \in \mathbb{N}$ y caminos $(v_1, \dots, v_n)$ y $(w_1, \dots, w_m)$ en R de x a y y de y a z de longitud n y m, respectivamente. La secuencia $(v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_n)$ es un ciclo de R: esto es absurdo, porque nuestra hipótesis es que R no admite ninguno. Esta contradicción muestra que la relación S es antisimétrica.

La proposición queda con esto probada. □

Podemos ahora, usando este lema, probar la existencia de extensiones lineales.

Proposición 9. *Toda relación de orden tiene una extensión lineal.*

Demostración. Sea V un conjunto, sea $R \subseteq V \times V$ una relación de orden en V y sea $\mathscr{X}$ el conjunto de todas las relaciones de orden $S \subseteq V \times V$ en V tales que $S \supseteq R$. Consideramos sobre $\mathscr{X}$ la relación $\preceq$ tal que si S y T son elementos de $\mathscr{X}$ se tiene que

$$S \preceq T \iff S \subseteq T.$$

Como $R \in \mathscr{X}$, es $\mathscr{X} \neq \varnothing$. Veamos que el conjunto ordenado $(\mathscr{X}, \preceq)$ satisface la condición del *Lema de Zorn*. Sea Y un subconjunto no vacío y totalmente ordenado de $\mathscr{X}$ y sea

$$C := \bigcup_{S \in Y} S.$$

Como $C \supseteq S$ para todo $S \in Y$, para ver que Y es acotado superiormente bastará que mostremos que C es una relación de orden en V.

- Sea $v \in V$. Como la cadena Y no es vacía, existe $S \in Y$ y, como S es una relación de orden en V, tenemos que $(v, v) \in S \subseteq C$. La relación C es por lo tanto reflexiva.
- Supongamos que v y w son elementos de V tales que $(v, w) \in C$ y $(w, v) \in C$. Existen entonces S_1 y S_2 en Y tales que $(v, w) \in S_1$ y $(w, v) \in S_2$. Más aún, como Y es una cadena, o bien $S_1 \subseteq S_2$ o bien $S_2 \subseteq S_1$ y, de hecho, a menos de intercambiar los roles de v y w, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $S_1 \subseteq S_2$. En ese caso tenemos que los pares (v, w) y (w, v) están ambos en S_2 y, como S_2 es una relación de orden, tenemos que $v = w$. Vemos así que C es una relación antisimétrica.
- Supongamos finalmente que u, v y w son elementos de V tales que los pares (u, v) y (v, w) están en C. Existen entonces S_1 y S_2 en Y tales que $(u, v) \in S_1$ y $(v, w) \in S_2$ y, exactamente como en el punto anterior, tenemos que o $S_1 \subseteq S_2$ o $S_2 \subseteq S_1$. En el primer caso tenemos que (u, v) y (v, w) están en S_2 y, como S_2 es una relación transitiva, que $(u, w) \in S_2 \subseteq C$; en el segundo, que esos dos pares están en S_1 y, como S_1 es una relación transitiva, que $(u, w) \in S_1 \subseteq C$. En cualquier caso, vemos que la relación C es transitiva.

El *Lema de Zorn* nos dice, en vista de todo esto, que hay un elemento L en $\mathscr{X}$ que es maximal. Se trata de una relación de orden en V y $L \supseteq R$, así que lo único que nos falta para probar la proposición es mostrar que L es un orden total.

Supongamos que no lo es: existen entonces dos elementos x y y en V tales que ni el par (x, y) ni el par (y, x) está en L. Pongamos $L' = L \cup \{(x, y)\}$. Mostraremos que la relación L' no admite ciclos. De acuerdo al Lema 8, existe entonces una relación de orden $L'' \subseteq V \times V$ tal que $L'' \supseteq L'$. Pero entonces tenemos que $L \prec L'' \in \mathscr{X}$ y esto es imposible, ya que L es un elemento maximal del conjunto ordenado $(\mathscr{X}, \preceq)$.

Para terminar, entonces, mostremos que no hay ciclos en L'. Supongamos que, por el contrario y para llegar a un absurdo, hay un ciclo $c = (v_1, \dots, v_n)$ en L' y elijámoslo de manera que n sea mínimo. Si $(v_i, v_{i+1}) \in L$ para todo $i \in [\![n-1]\!]$, entonces c es, de hecho, un ciclo en L, y esto es imposible porque L es una relación de orden —esto es lo que nos dice el Lema 7. Vemos así que existe $j \in [\![n-1]\!]$ tal que $(v_j, v_{j+1}) = (x, y)$, y podemos elegir j como el menor elemento de $[\![n-1]\!]$ con esa propiedad. De hecho, ese índice j es el único elemento de $[\![n-1]\!]$ con esa propiedad: si $k \in [\![n-1]\!]$ es otro tal que $(v_k, v_{k+1}) = (x, y)$, entonces $j + 1 < k < n$ y la secuencia $(v_j, \dots, v_k)$ es un ciclo de longitud $k - j + 1$, que es estrictamente menor que n, contradiciendo la minimalidad con la que elegimos al ciclo c.

Es inmediato verificar ahora que la secuencia $(v_{j+1}j, \dots, v_{n-1}, v_1, \dots, v_j)$ es un camino en L y, por lo tanto, que $(y, x) = (v_{j+1}, v_j) \in L$: esto contradice ahora la forma en que elegimos a x y a y. □

Observemos que el último paso de la prueba de la proposición prueba más generalmente el siguiente resultado:

Lema 10. *Si R es una relación de orden en un conjunto V y x e y son dos elementos de V tales que $(x, y) \notin R$ e $(y, x) \notin R$, entonces existe una relación de orden S en V al que $R \subseteq S$ y $(x, y) \in S$.*

Demostración. La relación $R' = R \cup \{(x, y)\}$ en V no admite ciclos: la prueba de esto es la que hicimos hacia el final de la demostración de la Proposición 9. De acuerdo al Lema 8, entonces, existe una relación de orden S en V tal que $R' \subseteq S$ y es claro que S tienen las propiedades que queremos. □

Usando este lema, a su vez, podemos probar el siguiente resultado que es frecuentemente útil:

Proposición 11. *Sea R una relación de orden en un conjunto V. Si $\mathscr{L}$ es el conjunto de todas las extensiones lineales de R, entonces*

$$R = \bigcap_{L \in \mathscr{L}} L.$$

Observemos que que el conjunto $\mathscr{L}$ no es vacío es precisamente lo que afirma la Proposición 9.

Demostración. Llamemos S a la intersección que aparece en el enunciado. Como toda extensión lineal de R contiene a R, es claro que $R \subseteq S$. Supongamos que no vale la igualdad, de manera que existen x e y en V tales que $(x, y) \in S \setminus R$; en particular, como R es reflexiva, tiene que ser $x \neq y$. Como $R \subseteq S$ y la relación S es antisimétrica, también tenemos que $(y, x) \notin R$, y estamos en la situación del Lema 10: existe entonces una relación de orden T en V tal que $R \subseteq T$ y $(y, x) \in T$. De acuerdo a la Proposición 9, existe además una extensión lineal L de T. Tenemos que $L \in \mathscr{L}$, que $(x, y) \in S \subseteq L$ y que $(y, x) \in L$: esto es absurdo, ya que L es una relación antisimétrica y $x \neq y$. Esta contradicción prueba que debe ser $R = S$, como queremos. □

7 Aplicación: el teorema de Hahn–Banach

Proposición 12. *Sea V un espacio vectorial real y sea $\|\cdot\|$ una norma sobre V. Si W es un subespacio de V y $f : W \to \mathbb{R}$ es una función lineal tal que existe un escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ para el que se tiene que*

$$|f(v)| \leq \lambda \|v\| \textit{ para todo } v \in W,$$

entonces existe una función lineal $F : V \to \mathbb{R}$ tal que $F|_V = f$ y

$$|F(v)| \leq \lambda \|v\| \textit{ para todo } v \in V.$$

Demostración. Sean W un subespacio de V, $\lambda \in \mathbb{R}$ y $f : W \to \mathbb{R}$ una función lineal y supongamos que $|f(v)| \leq \lambda \|v\|$ para todo $v \in W$. Sea $\mathscr{X}$ el conjunto de todos los pares (T, g) en los que T es un subespacio de V tal que $R \supseteq W$ y $g : T \to \mathbb{R}$ es una función lineal tal que $g|_W = f$ y $|g(v)| \leq \lambda \|v\|$ para todo $v \in T$. El conjunto $\mathscr{X}$ no es vacío, ya que, por supuesto, $(W, f) \in \mathscr{X}$. Consideremos además sobre $\mathscr{X}$ la relación $\preceq$ tal que si (T, g) y (T', g') son elementos de $\mathscr{X}$ se tiene que

$$(T, g) \preceq (T', g') \iff T \subseteq T' \text{ y } g'|_T = g.$$

Es inmediato verificar que se trata de una relación de orden en $\mathscr{X}$. Mostremos que el conjunto ordenado $(\mathscr{X}, \preceq)$ satisface la condición del *Lema de Zorn*.

Sea Y un subconjunto no vacío y todalmente ordenado de $\mathscr{X}$. De acuerdo al Lema 4, si ponemos

$$M := \bigcup_{(T,g) \in Y} T$$

entonces existe una función $h : M \to \mathbb{R}$ tal que para todo $(T, g) \in Y$ se tiene que $h|_T = g$. Mostremos que (M, h) es un elemento de $\mathscr{X}$:

- Sean x e y dos elementos de M y α y β dos de $\mathbb{R}$. Existen (T, g) y (T', g') en Y tales que $x \in T$ e $y \in T'$ y como Y es una cadena en $\mathscr{X}$, o bien $(T, g) \preceq (T', g')$ o bien $(T', g') \preceq (T, g)$. Consideremos, por ejemplo, que estamos en el primer caso —el segundo caso es completamente similar. Tenemos entonces que $x \in T \subseteq T'$, así que $\alpha x + \beta y$ es un elemento de T' y, por lo tanto, de M: vemos así que M es un subespacio de V.

Más aún, es $h(x) = g'(x)$, $h(y) = g'(y)$ y $h(\alpha x + \beta y) = g'(\alpha x + \beta y)$, ya que los vectores x, y y $\alpha x + \beta y$ son elementos de T', y, por lo tanto,

$$\alpha h(x) + \beta h(y) = \alpha g'(x) + \beta g'(y) = g'(\alpha x + \beta y) = h(\alpha x + \beta y).$$

Esto nos dice que $h : M \to \mathbb{R}$ es una función lineal.

- Como $W \subseteq T$ y $g|_W = f$ para todo $(T, g) \in Y$, es claro que $W \subseteq M$ y que $h|_W = f$.
- Finalmente, si $v \in M$, entonces existe $(T, g) \in Y$ tal que $v \in T$ y $h(v) = g(v)$ y, por lo tanto,

$$|h(v)| = |g(v)| \leq \lambda \|v\|$$

porque $(T, g) \in \mathscr{X}$.

Esto prueba que, como afirmamos, (M, h) es un elemento de $\mathscr{X}$. Como es claro que $(T, g) \preceq (M, h)$ para todo $(T, g) \in Y$, vemos así que (M, h) es una cota superior para Y en $\mathscr{X}$.

Es consecuencia de esto y del *Lema de Zorn* que existe en $\mathscr{X}$ un elemento (Q, F) que es maximal. Para probar la proposición bastará que mostremos que $Q = V$, porque en ese caso la función lineal $F : V = Q \to \mathbb{R}$ tiene todas las propiedades que queremos.

Supongamos, para llegar a una contradicción, que $Q \subsetneq V$, de manera que existe un vector $v_0 \in V \setminus Q$. Si v_1, $v_2 \in Q$, entonces

$$\begin{aligned} F(v_1) - F(v_2) = F(v_1 - v_2) &\leq \lambda \|v_1 - v_2\| \leq \lambda \|(v_1 + v_0) - (v_2 + v_0)\| \\ &\leq \lambda \|v_1 + v_0\| + \lambda \|v_2 + v_0\|, \end{aligned}$$

de manera que

$$-\lambda \|v_2 + v_0\| - F(v_2) \leq \lambda \|v_1 + v_0\| - F(v_1).$$

Esto implica que podemos considerar los números

$$a = \sup_{v \in Q} \bigl(-\lambda \|v + v_0\| - F(v)\bigr), \qquad b = \inf_{v \in Q} \bigl(\lambda \|v + v_0\| - F(v)\bigr),$$

ya que los conjuntos sobre los que estamos tomando ínfimo y supremo son acotados superior- e inferiormente, respectivamente, y que, más aún, es $a \leq b$. Notemos que para todo $v \in Q$ tenemos que

$$-\lambda \|v + v_0\| \leq F(v) + a \leq \lambda \|v + v_0\|. \tag{2}$$

Consideremos ahora el subespacio $Q' = Q + \mathbb{R}v_0$ de V. Como v_0 no pertenece a Q, es inmediato verificar que, de hecho, la suma que define a Q' es directa, esto es, que $Q' = Q \oplus \mathbb{R}v_0$, y que la suma sea directa implica que hay una función lineal $F' : Q' \to \mathbb{R}$ tal que para cada $v \in Q'$ y cada $\alpha \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$F'(v + \alpha v_0) = F(v) + \alpha a.$$

Es claro que $W \subseteq Q'$ y que $F'|_W = f$. Por otro lado, sean $v \in Q'$ y $\alpha \in \mathbb{R}$: queremos mostrar que

$$|F'(v + \alpha v_0)| \leq \lambda \|v + \alpha v_0\|.$$

Si $\alpha = 0$, esto es inmediato de que el par (Q, F) pertenece a $\mathscr{X}$, así que es suficiente que consideremos el caso en que $\alpha \neq 0$.

Supongamos primero que $\alpha > 0$. Como F' es una función lineal, tenemos que

$$F'(v + \alpha v_0) = \alpha(F(\tfrac{1}{\alpha} v) + a), \tag{3}$$

así que de acuerdo a (2) y usando la positividad de α tenemos que

$$-\alpha\lambda \|\tfrac{1}{\alpha} v + v_0\| \leq F'(v + \alpha v_0) \leq \alpha\lambda \|\tfrac{1}{\alpha} v + v_0\|, \tag{4}$$

de manera que

$$|F'(v + \alpha v_0)| \leq \lambda \|v + \alpha v_0\|.$$

Por otro lado, si $\alpha < 0$, de (3) y (2) también podemos llegar a (4), así que la conclusión es la misma. En definitiva, vemos que (Q', F') es un elemento de $\mathscr{X}$.

Como $(Q, F) \prec (Q', F')$, esto contradice la maximalidad de (Q, F) en $\mathscr{X}$ y esta contradicción provino de haber supuesto que Q es un subespacio propio de V. Se tiene, por lo tanto, que $Q = V$ y, como dijimos arriba, esto muestra que la proposición es cierta. $\square$

Referencias

[Bla84] Andreas Blass, *Existence of bases implies the axiom of choice*, Axiomatic set theory (Boulder, Colo., 1983), Contemp. Math., vol. 31, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1984, pp. 31–33, DOI 10.1090/conm/031/763890. MR763890