Comentario

Recordemos que, sean X e Y conjuntos (Asumiendo el axioma de elección)

- $X \leq Y \Leftrightarrow \exists\, f: X \to Y \text{ inyectiva} \Leftrightarrow \exists\, g: Y \to X \text{ sobreyectiva}$

En clase probamos que, sea X un conjunto infinito y sea Y un conjunto numerable

- Si existe $f: X \to Y$ inyectiva, entonces X es numerable
- Si existe $f: Y \to X$ sobreyectiva, entonces X es numerable

Escrito de otra forma, estamos diciendo que

- $X \text{ es infinito y } \#X \leq \aleph_0 \Rightarrow \#X = \aleph_0$

Es decir, $\aleph_0$ es un cardinal infinito minimal (Repasar la definición de minimal) y de hecho, como probamos en clase que la "relación de orden" entre conjuntos $\leq$ es un orden total, $\aleph_0$ es el mínimo cardinal infinito.

Ejercicio

Probar que el conjunto de sucesiones en $\mathbb{N}$ periódicas es un conjunto numerable

Resolución 1

Recordemos que una sucesión es periódica si existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $s_{n+p} = s_n \ \ \forall\, n \in \mathbb{N}$. Llamemos $A(\mathbb{N})$ al conjunto de sucesiones en $\mathbb{N}$ periódicas, queremos hallar una función inyectiva de $A(\mathbb{N})$ en algún conjunto numerable (otro plan podría ser hallar una función sobreyectiva de un conjunto numerable en $A(\mathbb{N})$). Una buena forma de lograr esto es generar muchas funciones que me den información de mi sucesión, por ejemplo, podríamos considerar la función $f: A(\mathbb{N}) \to \mathbb{N}$ que por cada $s \in A(\mathbb{N})$ me devuelve el período de dicha sucesión. Para ello tendríamos que definir concretamente quien sería el período ya que por ejemplo las sucesiones de período 2 son también sucesiones de período 4 asique decir "período" sin dar una definición concreta deja mucha ambigüedad de que número me tiene que devolver f. Una buena forma de definir esto podría ser tomar el mínimo "período" de s, es decir

$$f(s) = \min\{p \in \mathbb{N} :\ s_{n+p} = s_n \ \ \forall\, n \in \mathbb{N}\}$$

Recordemos que todo subconjunto no vacío de $\mathbb{N}$ tiene mínimo y, como s es periódica, efectivamente estamos tomando el mínimo de un conjunto no vacío. Está claro que f no es inyectiva ya que podría haber muchas funciones de mismo período pero con distintos elementos. Necesitamos entonces dar más información de nuestra sucesión, el truco está en dar suficiente información de una sucesión a modo que, sabiendo dicha información, seamos capaces de reconstruir nuestra sucesión original. Teniendo esto en mente, si nosotros sabemos el período de una sucesión s, supongamos tiene período p, entonces basta con saber los primeros p elementos de nuestra sucesión para poder reconstruirla. Por ejemplo, si te digo que tengo una sucesión periódica s de período 3 cuyos primeros elementos son $s_1 = 1, s_2 = 9, s_3 = 2$, entonces vos ya podes saber que mi sucesión era

$$s_n = \begin{cases} 1 \text{ si } & n \equiv 1 \pmod 3 \\ 9 \text{ si } & n \equiv 2 \pmod 3 \\ 2 \text{ si } & n \equiv 0 \pmod 3 \end{cases}$$

La información que dimos fue suficiente para reconstruir nuestra sucesión original, esto me va a garantizar que voy a poder construirme una función inyectiva como mostraremos a continuación. Primero definamos bien quien es esta función g que me devuelve los primeros p términos de mi sucesión. Podríamos pensar que es una función $g: A(\mathbb{N}) \to \mathbb{N}^p$ dada por $g(s) = (s_1, s_2, \ldots, s_p)$ pero el problema de esto es que nuestro codominio depende del período p de nuestra sucesión s elegida y esto no puede suceder, está mal definido nuestro codominio. Una forma de arreglar este problema es extender el codominio de g a $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{N}^k$ (o también a $\mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}$) que es un conjunto numerable. Definimos entonces la función $g: A(\mathbb{N}) \to \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{N}^k$ de la siguiente manera

$$g(s) = (s_1, s_2, \ldots, s_{f(s)})$$

Recordemos que $f(s)$ es el período de s. Hace un rato nos convencimos que sabiendo en valor de $f(s)$ y el de $g(s)$ somos capaces de reconstruir la sucesión s. Podemos entonces definir la sucesión $h : A(\mathbb{N}) \to \mathbb{N} \times \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{N}^k$ dada por $h(s) = (f(s), g(s))$ y afirmo que es una función inyectiva. La razón por la que puedo convencerme de esto antes de probarlo es que, como mencionamos, sabiendo $f(s)$ y $g(s)$ puedo reconstruir s, es decir, sabiendo $h(s)$ puedo saber cuánto vale s. Esto es precisamente (y de manera informal) decir que h tiene inversa a izquierda, es decir, que existe $r: \mathbb{N} \times \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{N}^k \to A(\mathbb{N})$ tal que $r \circ h = \mathrm{Id}_{A(\mathbb{N})}$ (Piensen por qué es lo mismo) y, como vieron en Algebra 1, esto es equivalente a que h sea inyectiva. Una vez que nos convencimos que h es inyectiva solo queda probarlo que se puede hacer o bien probando la implicación $h(x) = h(y) \Rightarrow x = y$ o bien hayando la función r que mencionamos antes y probando que $r \circ h = \mathrm{Id}_{A(\mathbb{N})}$, en todo caso, queda de Ejercicio probarlo. Observemos que $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{N}^k$ es numerable por ser unión numerable de conjuntos numerables y por lo tanto $\mathbb{N} \times \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{N}^k$ es numerable por ser producto finito de conjuntos numerables. Luego, queda demostrado que $A(\mathbb{N})$ es un conjunto numerable (es claro que es infinito). Una observación que alguno podrá haber hecho es que sabiendo $g(s)$ uno puede calcular el período de s y por lo tanto g en sí misma ya debería ser inyectiva (y lo es). Para calcular el período, tomando el ejemplo anterior, si $g(s) = (1; 9; 2)$ entonces ya sabemos que s es de período 3 pues $g(s) \in \mathbb{N}^3$. Sin embargo dar información de más no es malo y, en todo caso, facilita las cuentas de probar la inyectividad.

Otra forma similar de resolver el problema es definir $A_p(\mathbb{N})$ como las sucesiones en $\mathbb{N}$ de período p (con $p \in \mathbb{N}$) y observar que $A(\mathbb{N}) = \bigcup_{p\in\mathbb{N}} A_p(\mathbb{N})$. Si vemos que para cada $p \in \mathbb{N}$ el conjunto $A_p(\mathbb{N})$ es numerable entonces ya ganamos ya que $A(\mathbb{N})$ será numerable por ser unión numerable de conjuntos numerables. Para ver que $A_p(\mathbb{N})$ es numerable, ahora sí podemos definir la función $g: A_p(\mathbb{N}) \to \mathbb{N}^p$ dada por $g(s) = (s_1, \ldots, s_p)$ y nuestro codominio está bien definido ya que no depende de la sucesión elegida (ya que estamos tomando todas sucesiones de período p). Es fácil convencerse (y probar) que g es inyectiva (Ejercicio) y por lo tanto $A_p(\mathbb{N})$ es numerable para cada $p \in \mathbb{N}$.

Notemos como la función g que me devuelve los primeros p términos de mi sucesión fue la que nos causó problemas ya que estaba mal definida. Esto lo arreglamos agrandando el codominio (en la primera forma) o achicando el dominio (en la segunda forma). Existen más formas en las que uno puede arreglar un problema de “mala definición” y depende de cada caso el cómo se arregla.

Resolución 2

Pensar en sucesiones periódicas de números naturales podría llevarnos a pensar en la expresión decimal (o en base b) de un número racional dado por el resultado

- Sea $x \in [0;1)$ escrito en base b como $x = 0, x_1x_2x_3 \ldots$, entonces $x \in \mathbb{Q}$ si y solo si la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es eventualmente periódica.

Recordemos que una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es eventualmente periódica si existen $p, n_0 \in \mathbb{N}$ tales que $s_n = s_{n+p}\ \ \forall\, n \geq n_0$. Si denotamos $A(\mathbb{N})$ el conjunto de sucesiones en $\mathbb{N}$ periódicas, podríamos pensar en la función $f: A(\mathbb{N}) \to \mathbb{Q}$ dada por $f(s) = 0, s_1s_2s_3 \ldots$ pero, ¿en qué base?. Deberíamos escribirlo en una base b tal que $s_n \in \{0;1;\ldots;b-1\}\ \forall\, n \in \mathbb{N}$ para que quede bien definida la expresión en base b pero no queda en claro que dicho b exista y, en todo caso, la base b dependería de la sucesión s elegida lo cual es un problema. Primero que nada, observemos que las sucesiones en $A(\mathbb{N})$ son acotadas pues son periódicas (Probarlo) asique efectivamente existe un $b \in \mathbb{N}$ tal que $s_n \in \{0;1;\ldots;b-1\}\ \forall\, n \in \mathbb{N}$, el problema está ahora en que el b elegido no me dependa de la sucesión elegida (estamos pensando en usar el teorema de escritura única en base b que nos va a garantizar la inyectividad de la f que nos queremos construir, si vamos cambiando la base, el teorema no nos dice nada respecto a la unicidad). Una buena forma de solucionar este problema es definir $A(\mathbb{N})_b = \{s \in A(\mathbb{N}) : s_n < b\ \ \forall\, n \in \mathbb{N}\}$ y observar que $A(\mathbb{N}) = \bigcup_{b\in\mathbb{N}} A(\mathbb{N})_b$ ya que, como mencionamos, toda sucesión en $A(\mathbb{N})$ es acotada. Basta entonces con probar que $A(\mathbb{N})_b$ es numerable para todo $b \in \mathbb{N}$ pues, en dicho caso, $A(\mathbb{N})$ es unión numerable de conjuntos numerables y por lo tanto es numerable. Consideremos entonces la función $f: A(\mathbb{N})_b \to \mathbb{Q}$ dada por

$$f(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{s_k}{(b+1)^k} = [0, s_1s_2s_3 \ldots]_{b+1}$$

Observemos que efectivamente $s_n \in \{0;1;\ldots;b\}\ \forall\, n \in \mathbb{N}$ asique dicho número está “bien escrito”. Se estarán preguntando por qué lo escribí en base $b+1$ y no en base b, la razón de esto fue para evitar dos casos patológicos. El primero caso molesto es cuando $b = 1$ ya que no puedo escribir números en base 1, al escribirlos en base $b+1$ me ahorro este problema (de todas formas, $A(\mathbb{N})_1$ tiene un único elemento asique podría haber aislado ese caso y estudiado el caso $b > 1$ por separado). El segundo caso molesto, es que para probar que f es inyectiva quiero usar el teorema que me dice que la escritura es única en base b…siempre y cuando mi sucesión no sea eventualmente $b-1$. Al escribirlo en base $b+1$ me ahorro este problema ya que mi sucesión nunca será eventualmente b pues, por definición, $s_n < b \ \forall\, n \in \mathbb{N}$ siempre que $s \in A(\mathbb{N})_b$. De todas formas, existe una única sucesión en $A(\mathbb{N})_b$ que es eventualmente $b-1$ (Pensar por qué) asique podría simplemente haber excluido dicha sucesión s^0 de mi dominio y probar que $A(\mathbb{N})_b - \{s^0\}$ es numerable. En fin, la función $f: A(\mathbb{N})_b \to \mathbb{Q}$ que definimos arriba está bien definida y es inyectiva por lo que mencionamos anteriormente (Escribir bien el por qué para asegurarse de haber entendido) y, como $\mathbb{Q}$ es numerable, entonces $A(\mathbb{N})_b$ es numerable para todo $b \in \mathbb{N}$ asique $A(\mathbb{N}) = \bigcup_{b\in\mathbb{N}} A(\mathbb{N})_b$ es numerable.

Ejercicios para pensar

- Probar que el conjunto de sucesiones en $\mathbb{Q}$ periódicas es un conjunto numerable, ¿Se puede generalizar este resultado?
- Probar que el conjunto de sucesiones en $\mathbb{N}$ eventualmente periódicas es un conjunto numerable. Recordemos que una sucesión s es eventualmente periódica si existen $p, n_0 \in \mathbb{N}$ tales que $s_n = s_{n+p} \ \forall\, n \geq n_0$ (es decir, si a partir de n_0 es una sucesión periódica de período p)