Algunos ejemplos de espacios separables

Mariano Suárez-Álvarez

12 de septiembre 2019

1 El espacio ℓ_p con $1 \leq p < \infty$

Sea $p \in [1, \infty)$. El conjunto ℓ_p es el de las sucesiones $(x_n)_{n\geq 1}$ de números reales tales que $\sum_{n\geq 1}|x_i|^p < \infty$ y es un espacio métrico con respecto a la métrica d_p tal que

$$d_p(x, y) = \left(\sum_{i\geq 1}|x_i - yi|^p\right)^{1/p}$$

cada vez que $x = (x_i)_{i\geq 1}$ e $y = (y_i)_{i\geq 1}$ son elementos de ℓ_p; en particular, la serie que define a esta distancia $d_p(x, y)$ converge.

Proposición 1. *El espacio métrico (ℓ_p, d_p) es separable.*

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea D_n el conjunto de las sucesiones $(x_i)_{i\geq 1}$ de números *racionales* tales que $x_i = 0$ siempre que $i > n$. La función

$$(x_i)_{i\geq 1} \in D_n \mapsto (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Q}^n$$

es una biyección, así que D_n es numerable. Se sigue de esto que el conjunto $D = \bigcup_{n\geq 1} D_n$ también es numerable. Mostremos que D es denso en ℓ_p.

Sea $x = (x_i)_{i\geq 1} \in \ell_p$ y sea $\epsilon > 0$. La función $t \in [0, \infty) \mapsto t^{1/p} \in \mathbb{R}$ es continua, no negativa y se anula en 0, así que existe $\eta > 0$ tal que $\eta^{1/p} < \epsilon$.

Como la serie $\sum_{i\geq 1}|x_i|^p$ converge, es $\lim_{n\to\infty}\sum_{i>n}|x_i|^p = 0$ y existe, por lo tanto, un entero $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{i>n}|x_i|^p < \eta/2.$$

Por otro lado, sabemos que $\mathbb{Q}^n$ es denso en $\mathbb{R}^n$, así que existe $(q_1, \ldots, q_n) \in \mathbb{Q}^n$ tal que

$$d_p\big((q_1, \ldots, q_n), (x_1, \ldots, x_n)\big) = \sum_{i=1}^{n}|x_i - q_i|^p < \eta/2.$$

Si ponemos $q = (q_1, \ldots, q_n, 0, \ldots)$, que es un elemento de D_n, tenemos entonces que

$$d_p(x, q)^p = \sum_{i\geq 1}|x_i - q_i|^p = \sum_{i=1}^{n}|x_i - q_i|^p + \sum_{i>n}|x_i|^p < \eta,$$

de manera que $d_p(x, q) < \eta^{1/p} < \epsilon$. □

2 El espacio ℓ_∞

El conjunto ℓ_∞ de las sucesiones $(x_i)_{i\geq 1}$ de números reales que son acotadas es un espacio métrico con respecto a la métrica d_∞ tal que

$$d_\infty(x, y) = \sup_{i\geq 1}|x_i - y_i|$$

cada vez que $x = (x_i)_{i\geq 1}$ e $y = (y_i)_{i\geq 1}$ son elementos de ℓ_∞.

Proposición 2. *El espacio ℓ_∞ no es separable.*

Demostración. Sea $K = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, el conjunto de las sucesiones de elementos de $\{0, 1\}$, que está contenido en ℓ_∞ y tiene el cardinal del continuo. Afirmamos que

> *si $a = (a_i)_{i\geq 1}$ y $b = (b_i)_{i\geq 1}$ son dos elementos distintos de K, entonces las bolas abiertas $B_{1/2}(a)$ y $B_{1/2}(b)$ son disjuntas.*

En efecto, supongamos que por el contrario hay un punto $x = (x_i)_{i\geq 1}$ en $B_{1/2}(a) \cap B_{1/2}(b)$. Como $a \neq b$, existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $a_j \neq b_j$ y, como tanto a_j como b_j son elementos de $\{0, 1\}$, tenemos que $|a_j - b_j| = 1$ y, por lo tanto, que

$$d_\infty(a, b) = \sup_{i\geq 1}|a_i - b_i| \geq 1.$$

Ahora bien, usando la desigualdad triangular vemos que

$$1 \leq d_\infty(a,b) \leq d_\infty(a,x) + d_\infty(x,b) < \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} = 1,$$

y esto es absurdo.

Como consecuencia de lo que acabamos de probar, vemos inmediatamente que el conjunto

$$\mathscr{B} = \{B_{1/2}(c) : c \in K\}$$

es una familia no numerable de abiertos disjuntos dos a dos de ℓ_∞ y, por lo tanto, que el espacio métrico ℓ_∞ no es separable. □

3 El espacio C[0,1] con la métrica uniforme d_∞

Decimos que una función $g : [1,0] \to \mathbb{R}$ es ***poligonal*** si existen $n \in \mathbb{N}$ y escalares t_0, t_1, …, t_n y a_0, …, a_n en $\mathbb{R}$ tales que

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$$

y para todo $i \in [\![n]\!]$ y todo $t \in [t_{i-1}, t_i]$ se tiene que

$$g(t) = \frac{a_i - a_{i-1}}{t_i - t_{i-1}}(t - t_{i-1}) + a_{i-1}.$$

En ese caso decimos que g ***corresponde*** al parámetro $(t_0, \dots, t_n; a_0, \dots, a_n)$.

Proposición 3. *Si $f \in C[0,1]$ y $\epsilon > 0$, entonces existe un función poligonal $g \in C[0,1]$ que corresponde a un parámetro $(t_0, \dots, t_n; a_0, \dots, a_n)$ con componentes racionales y tal que $d_\infty(f,g) < \epsilon$.*

Demostración. Sea $f \in C[0,1]$ y sea $\epsilon > 0$. Como f es uniformemente continua, existe $\delta > 0$ tal que para cada x, $y \in [0,1]$ se tiene que

$$|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon/5.$$

Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $1/n < \delta$ y pongamos $t_i \coloneqq i/n$ para cada $i \in [\![0,n]\!]$. Claramente es $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$. Por otro lado, como $\mathbb{Q}^{n+1}$ es denso en $\mathbb{R}^{n+1}$, si ponemos $x = (f(t_0), \dots, f(t_n))$, sabemos que existe $q = (q_0, \dots, q_n) \in \mathbb{Q}^{n+1}$ tal que

$$d_\infty(x,q) = \sup_{0 \leq i \leq n} |f(t_i) - q_i| < \epsilon/5.$$

Escribamos $g \in C[0,1]$ a la función poligonal que corresponde al parámetro $(t_0, \dots, t_n; q_0, \dots, q_n)$. Queremos estimar la distancia de f a g.

Sean $i \in [\![n]\!]$. Si $t \in [t_{i-1}, t_i]$, entonces

$$\begin{aligned}
|f(t) - g(t)| &= \left| f(t) - \frac{q_i - q_{i-1}}{t_i - t_{i-1}}(t - t_{i-1}) - q_{i-1} \right| \\
&\leq |f(t) - a_{i-1}| + |a_{i-1} - q_{i-1}| + |a_i - a_{i-1}| \frac{|t - t_{i-1}|}{|t_i - t_{i-1}|} \\
&\quad + |q_i - a_i| \frac{|t - t_{i-1}|}{|t_i - t_{i-1}|} + |q_{i-1} - a_{i-1}| \frac{|t - t_{i-1}|}{|t_i - t_{i-1}|} \\
&< \epsilon
\end{aligned}$$

ya que $|f(t) - a_{i-1}| < \epsilon$ y $|a_i - a_{i-1}| < \epsilon$ porque $|t - t_{i-1}| < \delta$ y $|t_i - t_{i-1}| < \delta$, por un lado, y $|a_{i-1} - q_{i-1}| < \epsilon$ y $|q_i - a_i| < \epsilon$ por la forma en que elegimos a q_i y a q_{i-1}. Esto implica que

$$d_\infty(f, g) = \sup_{t \in [0,1]} |f(t) - g(t)| = \max_{1 \leq i \leq n} \sup_{t \in [t_{i-1}, t_i]} |f(t) - g(t)| < \epsilon$$

y prueba la proposición. □

Corolario 4. *Conjunto $C[0,1]$ dotado de la métrica uniforme d_∞ es separable.*

Demostración. Para cada n sea D_n el conjunto de todas las funciones poligonales con parámetro $(t_0, \ldots, t_n; a_0, \ldots, a_n)$ de longitud $2(n+1)$ y componentes racionales. Como el cardinal del conjunto de parámetros de las funciones de D_n es claramente numerable, el conjunto $D = \bigcup_{n \geq 1} D_n$ es numerable y la proposición anterior nos dice que D es denso en $C[0,1]$ con respecto a la métrica d_∞. Vemos así que $(C[0,1], d_\infty)$ es un espacio métrico separable. □

4 El espacio C[0,1] con la métrica uniforme d_∞, *bis*

Si $n \in \mathbb{N}$ e $i \in [\![0, n]\!]$ consideramos el polinomio

$$\beta_{n,i}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} \in \mathbb{Q}[t],$$

al que llamamos un ***polinomio de Bernstein básico***, por Sergei Bernstein. Por otro lado, si $f \in C[0,1]$, el n-ésimo ***polinomio de Bernstein*** de f es

$$\beta_n[f](t) = \sum_{i=0}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) \beta_{n,i}(t).$$

Es claro que $\beta_n[f]$ depende linealmente de f y es inmediato que

$$\beta_{n,i}(t) \geq 0, \qquad \forall n \in \mathbb{N}_0, \forall i \in [\![0, n]\!], \forall t \in [0, 1].$$

No es difícil calcular el polinomio de Bernstein $\beta_n[f]$ cuando f es un polinomio:

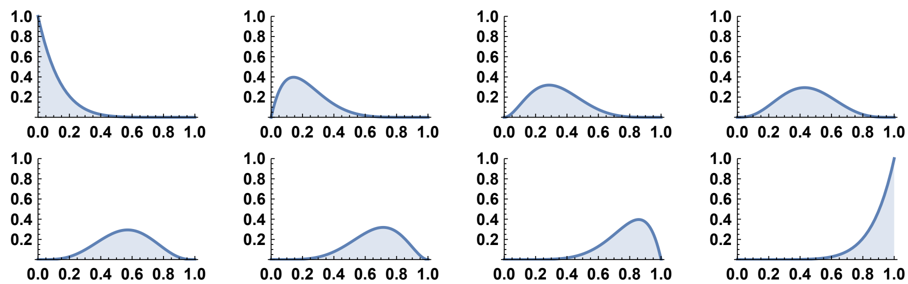

Figura 1. Los polinomios de Bernstein básicos $\beta_{8,0}$, $\beta_{8,1}$, …, $\beta_{8,8}$.

Lema 5. *Para todo $n \in \mathbb{N}$ tenemos que*

$$\beta_n[1] = 1, \qquad \beta_n[t] = t, \qquad \beta_n[t^2] = \frac{n-1}{n}t^2 + \frac{1}{n}t.$$

Demostración. Si x e y son dos números reales, tenemos que

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i}. \tag{1}$$

Si reemplazamos x por t e y por $1-t$, esta igualdad nos dice que

$$1 = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} = \beta_n[1].$$

Derivando a cada lado de la igualdad (1) con respecto a x y multiplicando luego por x vemos que

$$nx(x+y)^{n-1} = \sum_{i=0}^{n} i\binom{n}{i} x^i y^{n-i}. \tag{2}$$

Reemplazando ahora x por t, y por $1-t$, y dividiendo todo por n, esto queda en la forma

$$t = \sum_{i=0}^{n} \frac{i}{n}\binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} = \beta_n[t].$$

Si ahora en (2) derivamos a cada lado y multiplicamos por x, vemos que

$$nx(x+y)^{n-1} + n(n-1)x^2(x+y)^{n-2} = \sum_{i=0}^{n} i^2\binom{n}{i} x^i y^{n-i}.$$

Reemplazando x por t, y por $1-t$ y dividiendo por n^2 esto queda en la forma

$$\frac{1}{n}t + \frac{n-1}{n}t^2 = \sum_{i=0}^{n} \frac{i^2}{n^2}\binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} = \beta_n[t^2]. \qquad \square$$

Una consecuencia muy especial del lema y que usaremos abajo es:

Corolario 6. *Si* $n \in \mathbb{N}$ *entonces*

$$\sum_{i=0}^{n} \left(t - \frac{i}{n}\right)^2 \beta_{n,i}(t) = \frac{t(1-t)}{n}.$$

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$. Es

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n} \left(t - \frac{i}{n}\right)^2 \beta_{n,i}(t) &= \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{i^2}{n^2} - \frac{2it}{n} + t^2\right) \beta_{n,i}(t) \\
&= \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^2 \beta_{n,i}(t) - 2t \sum_{i=0}^{n} \frac{i}{n} \beta_{n,i}(t) + t^2 \sum_{i=0}^{n} \beta_{n,i}(t) \\
&= \beta_n[t^2](t) - 2t\beta_n[t](t) + t^2 \beta_n[1]
\end{aligned}$$

y, de acuerdo al lema, esto es

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{n-1}{n} t^2 + \frac{1}{n} t\right) - 2t^2 + t^2 \\
&= \frac{t(1-t)}{n}.
\end{aligned}$$

□

La razón por la que nos interesan los polinomios de Bernstein es que tienen la siguiente propiedad fundamental:

Proposición 7. *Si* $f \in C[0,1]$*, entonces la sucesión* $(\beta_n(f))_{n \geq 1}$ *converge a* f *uniformemente sobre* $[0,1]$.

Demostración. Sea $\epsilon > 0$. Como f es continua, existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in [0,1]$ y existe $\delta > 0$ tal que si x e y están en $[0,1]$ entonces

$$|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Por otro lado, ciertamente existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{4N\delta^2} < \frac{\epsilon}{2}.$$

Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N$ y sea $x \in [0,1]$. Es

$$f(x) - \beta_n[f](x) = f(x)\beta_n[1](x) - \beta_n[f](x) = \sum_{i=0}^{n} \left(f(x) - f\left(\frac{i}{n}\right)\right) \beta_{n,i}(x),$$

así que — recordando que los polinomios $\beta_{n,i}$ toman valores no negativos en el intervalo $[0,1]$ — tenemos que

$$|f(x) - \beta_n[f](x)| \leq \sum_{i=0}^{n} \left| f(x) - f\left(\frac{i}{n}\right) \right| \beta_{n,i}(x).$$

Consideremos los conjuntos

$$A = \{i \in [\![0, n]\!] : |x - i/n| < \delta\}, \qquad B = \{i \in [\![0, n]\!] : |x - i/n| \geq \delta\}.$$

Claramente $A \cap B = \varnothing$ y $A \cup B = [\![0, n]\!]$, así que

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n} \left| f(x) - f\left(\frac{i}{n}\right) \right| \beta_{n,i}(x) \\ = \sum_{i \in A} \left| f(x) - f\left(\frac{i}{n}\right) \right| \beta_{n,i}(x) + \sum_{i \in B} \left| f(x) - f\left(\frac{i}{n}\right) \right| \beta_{n,i}(x).\end{aligned}$$

Ahora bien, si $i \in A$, entonces $|x - i/n| < \delta$ y, dada la forma en que elegimos el número δ, tenemos que $|f(x) - f(i/n)| < \epsilon/2$ y, por lo tanto, que

$$\sum_{i \in A} \left| f(x) - f\left(\frac{i}{n}\right) \right| \beta_{n,i}(x) \leq \frac{\epsilon}{2} \sum_{i \in A} \beta_{n,i}(x) \leq \frac{\epsilon}{2} \sum_{i=0}^{n} \beta_{n,i}(x) = \frac{\epsilon}{2}.$$

Por otro lado, si $i \in B$, entonces $|x - i/n| \geq \delta$, así que $(x - i/n)^2 \geq \delta^2$ y

$$\sum_{i \in B} \beta_{n,i}(x) \leq \frac{1}{\delta^2} \sum_{i \in B} \left(x - \frac{i}{n} \right)^2 \beta_{n,i}(x) \leq \frac{1}{\delta^2} \sum_{i=0}^{n} \left(x - \frac{i}{n} \right)^2 \beta_{n,i}(x),$$

que, de acuerdo al Corolario 6, es

$$\leq \frac{x(1-x)}{n\delta^2} \leq \frac{1}{4n\delta^2} \leq \frac{1}{4N\delta^2} < \frac{\epsilon}{2},$$

ya que $0 \leq x(1-x) \leq \frac{1}{4}$.

Juntando todo, vemos que si $n \geq N$, para cada $x \in [0, 1]$ se tiene que

$$|f(x) - \beta_n[f](x)| < \epsilon,$$

de manera que $\|f - \beta_n[f]\|_\infty < \epsilon$. Así, la sucesión $(\beta_n[f])_{n \geq 1}$ converge a f en $C[0, 1]$. $\square$

Proposición 8. *El subconjunto $\mathbb{Q}[x]$ de $C[0, 1]$ de las funciones polinomiales con coeficientes racionales es denso y numerable.*

Demostración. Ya sabemos que $\mathbb{Q}[x]$ es numerable, así que tenemos que probar solamente que es denso en $C[0, 1]$. Sea $f \in C[0, 1]$ y sea $\epsilon > 0$. De acuerdo a la Proposición 7, existe un polinomio $g \in \mathbb{R}[x]$ tal que $\|f - g\|_\infty < \epsilon/2$. Existen entonces $n \in \mathbb{N}$ y $a = (a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tales que $g(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$. Por otro lado, el conjunto $\mathbb{Q}^{n+1}$ es denso en $\mathbb{R}^{n+1}$, así que existe $b = (b_0, \ldots, b_n) \in \mathbb{Q}^{n+1}$

tal que $\|a-b\|_\infty < \epsilon/2$. Sea $h = \sum_{i=0}^n b_i x^i$, que es un elemento de $\mathbb{Q}[x]$. Si $y \in [0,1]$ tenemos que

$$|g(y) - h(y)| = \left|\sum i = 0^n a_i y^i - \sum i = 0^n b_i y^i\right| \leq \sum_{i=0}^n |a_i - b_i| y^i \leq \epsilon/2,$$

ya que $|a_i - b_i| \leq \|a-b\|_\infty < \epsilon$ y $y^i \leq 1$ para todo $i \in [\![0,n]\!]$. Esto implica, ya que la función $g-h$ es continua, que

$$\|g-h\|_\infty = \sup_{y\in[0,1]} |g(y)-h(y)| < \epsilon/2.$$

Podemos concluir entonces que

$$\|f-h\|_\infty \leq \|f-g\|_\infty + \|g-h\|_\infty < \epsilon$$

y, en definitiva, que $\mathbb{Q}[x]$ es denso en $C[0,1]$, como queremos. □