Ejercicios surtidos

1. Sea X compacto y $f : X \to X$ continua. Probar:

   (a) Si $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ para todo $x \neq y$ entonces f tiene un único punto fijo.

   (b) Si $d(f(x), f(y)) \geq d(x, y)$ para todo $x, y \in X$ entonces f es un homeomorfismo. *Sugerencia*: dado $x \in X$ y escribiendo $f^n := f \circ \ldots \circ f$ (n veces), probar que la sucesión $\{f^n(x)\}$ tiene alguna subsucesión que converge a x. Deducir que f es una isometría.

2. Sea $\{f_n\} \subset C([0, 1])$ una sucesión acotada y definimos para cada n la función $g_n(t) = \int_0^1 G(t, s) f_n(s)\, ds$, donde $G : [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{R}$ una función continua. Probar que la sucesión $\{g_n\}$ tiene una subsucesión que converge en $C([0, 1])$.

3. E, F normados, $A \subset E$ abierto y $f : A \to F$ diferenciable en x_0. Entonces
$$\limsup_{x \to x_0} \frac{\|f(x) - f(x_0)\|}{\|x - x_0\|} = \|Df(x_0)\|.$$

4. Dados E, F normados, $A \subset E$ abierto y $f : A \to F$ de clase C^1, $x \in A$ se dice *punto regular* de f si $Df(x)$ es suryectiva y *punto crítico* en caso contrario. De la misma forma, $y \in F$ se dice *valor regular* si todas sus preimágenes son puntos regulares y *valor crítico* en caso contrario. Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado y $f : \overline{U} \to \mathbb{R}^n$ de clase C^1 (es decir, f es la restricción de una función de clase C^1 definida en un entorno de $\overline{U}$). Probar que si y es un valor regular de f entonces $f^{-1}(y)$ es finito.

5. Sean X un espacio métrico completo y A un subconjunto de $C(X, \mathbb{R})$. Supongamos que para todo $x \in X$ existe $R_x \in \mathbb{R}$ tal que $|f(x)| \leq R_x$ para toda $f \in A$. Entonces existe un abierto no vacío $U \subset X$ y una constante R tal que $|f(x)| \leq R$ para todo $x \in U$ y toda $f \in A$.

6. Una función $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ se dice *casi-periódica* sii para toda sucesión de números $T_n \in \mathbb{R}$ la sucesión de funciones $f_n(t) := f(t + T_n)$ tiene

una subsucesión que converge uniformemente en $\mathbb{R}$. Probar que toda función periódica es casi-periódica.

Para interesados en el tema, algunos ejercicios más:

(a) Toda función casi-periódica es acotada.

(b) Si f es casi-periódica y $f(t) \to 0$ para $t \to +\infty$ entonces $f \equiv 0$.

(c) Si f_n es casi-periódica para todo n y $\{f_n\}$ converge uniformemente a cierta f, entonces f es casi-periódica. *Sugerencia*: usar un argumento diagonal.

(d) Si f es casi-periódica entonces existe L tal que f alcanza máximos y mínimos locales (no estrictos) en cualquier intervalo de longitud L. *Sugerencia*: probar primero que existe L tal que f alcanza algún extremo en todo intervalo de longitud L.

7. Sea E normado. Si $C \subset E$ es cerrado y $K \subset E$ es compacto, entonces $C + K := \{c + k : c \in C, k \in K\}$ es cerrado. ¿Vale el resultado si K es solamente cerrado?

8. Probar que el cubo de Hilbert

$$\mathcal{C} := \{y \in l^2 : 0 \leq y_n \leq 1/n \quad \text{para todo } n\}$$

es compacto.

9. Sea X un espacio métrico. Probar que son equivalentes:

(a) Para todo par F_1, F_2 de cerrados disjuntos vale $d(F_1, F_2) > 0$.

(b) Toda función continua que sale de X es uniformemente continua.

(c) Todo cubrimiento por abiertos admite un número de Lebesgue.

Si además X tiene una cantidad a lo sumo finita de puntos aislados, entonces cualquiera de los enunciados anteriores equivale a decir que X es compacto.

10. Sea $f : \mathbb{R}^n \to E$ continua, donde E es un espacio de Banach de dimensión infinita. Probar que f no es suryectiva. *Observación*: se puede probar, en cambio, que existen funciones continuas suryectivas ('curvas de Peano') por ejemplo de $\mathbb{R}$ en el cubo de Hilbert.

11. Sea $I : C[0,1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$I(u) = \int_0^1 f(t, u(t))\, dt$$

donde $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es de clase C^1. Probar:

   (a) I es de clase C^1.

   (b) u es punto crítico de I si y solo si $\frac{\partial f}{\partial u}(t, u(t)) = 0$ para todo t.

12. Sean $A \subset \mathbb{R}^{n\times n}$ el conjunto de matrices inversibles y $f : A \to \mathbb{R}^{n\times n}$ dada por $f(M) = M^{-1}$. Probar que f es diferenciable y calcular $Df(M)$. Generalizar para un espacio de Banach cualquiera.

13. Probar que no existe una función continua $f : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$ tal que $f(z)^2 = z$ para todo z. *Sugerencia*: probar que f tendría que verificar $f(zw) = f(z)f(w)$ para todo z, w o $f(zw) = -f(z)f(w)$ para todo z, w.

14. Sea X un espacio métrico y $A \subset X$. Un elemento $a \in X$ se llama *punto de condensación* de A si para todo entorno U de x se cumple que $U \cap A$ es no numerable. Probar que si X es separable, entonces todo subconjunto no numerable tiene un punto de condensación.

15. Sea E un espacio normado y $A \subset E$ abierto denso. Dado $x \in E$, probar que existen $u, v \in A$ tales que $x = u - v$.

16. Sea $f : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ dada por $f(M) = M^k$. Probar que f es diferenciable. Si $MN = NM$, probar que $Df(M)N = nM^{n-1}N$.

17. Dada $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$, definimos $e^M := \sum_{n\geq 0} \frac{M^n}{n!}$.

   (a) Probar que la función $M \mapsto e^M$ está bien definida y es diferenciable. Calcular la derivada en la dirección N para N que conmuta con M.

   (b) Sea $X_0 \in \mathbb{R}^n$ y $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ la curva definida por $X(t) = e^{tM} X_0$. Probar que $X'(t) = MX(t)$ y $X(0) = X_0$.

18. Generalizar los ejercicios anteriores para $M \in L(E, E)$, donde E es un espacio de Banach.

19. Sea E un $\mathbb{R}$-e.v. y sea $C \subset E$ un cono, es decir, C es convexo y verifica:

$$C + C \subset C, \qquad C \cap -C = \{0\}.$$

Probar que la relación definida por $x \leq y$ sii $y - x \in C$ es un orden compatible con las operaciones de E. Recíprocamente, dado un orden compatible $\leq$, el conjunto de elementos no negativos $\{x \in E : x \geq 0\}$ es un cono. Dada una norma en E, probar que el orden inducido por un cono C es compatible con la topología si y solo si C es cerrado.

20. Sea E un espacio normado y $f : E \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \|x\|^r$ con $r > 0$. Probar que f es diferenciable en 0 si y solo si $r > 1$.

21. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ abierto. Una función $f : A \to \mathbb{R}^m$ se dice diferenciable en el sentido de Carathéodory en $a \in A$ sii existe $\phi : A \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ continua en a tal que

$$f(x) - f(a) = \phi(x)(x - a).$$

   (a) Probar que f es diferenciable en a en el sentido de Carathéodory si y solo si es diferenciable en a.

   (b) Usar el punto anterior para probar la regla de la cadena.

22. Sean E un espacio normado y $H \subset E$ un hiperplano cerrado. Entonces $E \backslash H$ tiene dos componentes conexas. En cambio, si H no es cerrado entonces $E \backslash H$ es conexo. *Sugerencia*: considerar $\varphi : E \to \mathbb{R}$ lineal tal que $\ker(\varphi) = H$ y $H^+ = \{\varphi > 0\}$, $H^- = \{\varphi < 0\}$. Si H no es cerrado, entonces H^+ y H^- son densos.

23. Sean E, F normados, $A \subset E$ abierto y $f : A \to F$ diferenciable. Supongamos que $[x, y] \subset A$ y $\|Df(z)\| \leq M$ para todo $z \in [x, y]$. Entonces

$$\|f(x) - f(y)\| \leq M\|x - y\|.$$

Sugerencia: fijar $\eta > 0$ y considerar la función $\varphi : [0, 1] \to A$ dada por $\varphi(t) := \|f(y + t(x - y)) - f(y)\| - t(M + \eta)\|x - y\|$. Probar que el conjunto de valores de t tales que $\varphi \leq 0$ en $[0, t]$ es cerrado y abierto.

Observación. Una demostración mucho más directa surge del 'comentario' que hicimos en clase: para todo $z \in F \backslash \{0\}$ existe $T \in L(F, \mathbb{R})$ de norma 1 tal que $Tz = \|z\|$. En efecto, alcanza con tomar $z = f(x) - f(y)$ y aplicar el teorema de valor medio a la función $T \circ f$. Comparar con el ejercicio 5-iii) de la práctica de diferenciación. El mismo 'comentario' (que en realidad es el teorema de Hahn-Banach) sirve para probar de manera más sencilla que si f es dos veces diferenciable en cierto $a \in A$ entonces $D^2 f(a)$ es simétrica, es decir:

$$D^2 f(a)(v)(w) = D^2 f(a)(w)(v).$$

Para esto, es suficiente con estudiar la restricción de f al subespacio generado por v y w; en otras palabras, se puede suponer $E = \mathbb{R}^2$. Por otra parte, usando el 'comentario' y el hecho de que $D^2(T \circ f) = T \circ D^2 f$, se puede suponer que $F = \mathbb{R}$. Entonces la demostración sale considerando $\phi(x, y) := [f(x, y) - f(x, y_0)] - [f(x_0, y) - f(x_0, y_0)]$, donde $a = (x_0, y_0)$. Hay que acotar con cuidado; la cuenta se hace mucho más sencilla suponiendo (como se hace en Análisis I) que f es de clase C^2 en un entorno de a, aunque en realidad esta hipótesis no hace falta.

24. Obtener la expresión del polinomio de Taylor de orden k centrado en x_0 y fórmula del resto para una función $f : A \to \mathbb{R}$ de clase C^{k+1} donde A es un abierto de un espacio normado. *Sugerencia*: considerar el desarrollo de Taylor de $f \circ \varphi$, donde $\varphi(t) := x_0 + t(x - x_0)$.

25. Demostrar (usando el resultado sobre contracciones uniformes) el teorema de la función inversa y obtener el teorema de la función implícita como corolario. *Sugerencia*: dada $f : A \subset E \times F \to G$ de clase C^n, considerar $F : A \to E \times G$ definida por $F(x, y) := (x, f(x, y))$.

26. Sean E un espacio de Banach, $A \subset E$ abierto y $F : A \to \mathbb{R}$ de clase C^1. Sea $x_0 \in S := \{x \in A : F(x) = 0\}$ tal que $DF(x_0)$ es suryectiva. Un elemento $v \in E$ se dice tangente a S en x_0 sii existe una curva suave $c : (-\delta, \delta) \to S$ tal que $c(0) = x_0$ y $c'(0) = v$. El 'espacio tangente' $T_{x_0}S$ se define como el conjunto de todos los vectores tangentes a S en x_0. Probar que $T_{x_0}S = \ker(DF(x_0))$.

    Sugerencia: tomando $z \in E$ tal que $DF(x_0)z = 1$, se puede identificar $E = \ker(DF(x_0)) \oplus \langle z \rangle$ con $\ker(DF(x_0)) \times \mathbb{R}$. Escribir $x_0 = w_0 + s_0 z$ y aplicar el teorema de la función implícita para expresar los puntos de S cercanos a x_0 en la forma $w + s(w)z$, donde s es una función de clase C^1 definida en un entorno de w_0 tal que $s(w_0) = s_0$. Verificar que la curva $c(t) := w_0 + tv + s(w_0 + tv)z$ cumple lo pedido. ¿Cuál es la idea geométrica en esta construcción?

    Observación: en particular, si 0 es un valor regular de F se dice que S es una (hiper)superficie regular. Por ejemplo, la esfera $S_1 := \{x \in l^2 : \|x\| = 1\}$ es una hipersuperficie regular, ya que la función $F(x) = \|x\|^2 - 1$ es diferenciable. ¿Cuál es el espacio tangente a S_1 en x? Más en general, si E es un espacio de Banach y $T : E \times E \to \mathbb{R}$ es bilineal, continua, simétrica y definida positiva y $F(x) := T(x,x)$ es la forma cuadrática asociada, probar que $F^{-1}(1)$ es una hipersuperficie regular y calcular su espacio tangente en cualquier punto.

27. Sean $f, g : A \to \mathbb{R}$ de clase C^1 y x_0 un extremo de f ligado a la condición $g = 0$. Si $Dg(x_0)$ es suryectiva, entonces existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $Df(x_0) = \lambda Dg(x_0)$.

    Sugerencia: dado $v \in \ker(Dg(x_0))$, tomar una curva c como en el ejercicio anterior y deducir que $Df(x_0)v = 0$.

28. 'Equivalencia' entre el teorema de la función implícita y el teorema de existencia y unicidad de ecuaciones diferenciales:

    (a) Sean $A \subset \mathbb{R}^2$ abierto, $f : A \to \mathbb{R}$ de clase C^2 y $(x_0, y_0) \in A$ tal que $f(x_0, y_0) = 0$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$. Deducir la existencia de una función implícita $y(x)$ del hecho de que el problema

    $$y'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, y(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x))}, \qquad y(x_0) = y_0$$

    tiene solución única definida en un intervalo abierto que contiene a x_0.

    (b) Sean $A \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ abierto, $f : A \to \mathbb{R}^n$ de clase C^1. Para cada $(t_0, x_0) \in A$ existe y de clase C^1 definida en un entorno de t_0 tal que $x'(t) = f(t, x(t))$ y $x(t_0) = x_0$. Por simplicidad, se puede suponer $A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ y $t_0 = 0$. Definiendo $y(t) := x(\lambda t)$, el problema se transforma en $y'(t) = \lambda f(\lambda t, y(t))$, $y(0) = x_0$. Considerar la función $F : C([-1,1], \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R} \to C([-1,1], \mathbb{R}^n)$ dada por $F(y, \lambda) = y - T(y, \lambda)$, donde

    $$T(y, \lambda)(t) := x_0 + \lambda \int_0^t f(\lambda s, y(s))\, ds.$$

    Entonces $F(x_0, 0) = 0$ y $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, 0) = I$. Esto dice que hay una curva y definida cerca de $\lambda = 0$ tal que $F(\lambda, y(\lambda)) = 0$.