El teorema de Arzelà–Ascoli

Mariano Suárez-Álvarez

23 de octubre 2019

1 Equicontinuidad

Fijemos dos espacios métricos X e Y, supongamos que Y es completo y escribamos $C(X,Y)$ el espacio métrico de todas las funciones $X \to Y$ que son continuas y acotadas dotado de la métrica de la convergencia uniforme. Como Y es completo, el espacio $C(X,Y)$ es completo.

Decimos que un subconjunto A de $C(X,Y)$ es ***equicontinuo en un punto*** x de X si para todo $\varepsilon > 0$ existe un número $\delta > 0$ tal que siempre que $f \in A$ e $y \in X$ son tales que $d(x,y) < \delta$ se tiene que $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Si el conjunto A es equicontinuo en cada punto de X, entonces decimos que es ***equicontinuo*** en X . Por ejemplo, si K es un número positivo y A es el conjunto de las funciones de $C(X,Y)$ que satisface la condición de Lipschitz con constante K, es fácil ver que A es equicontinuo en X.

Por otro lado, decimos que un subconjunto A de $C(X,Y)$ es ***uniformemente equicontinuo*** en X si para todo $\varepsilon > 0$ existe un número $\delta > 0$ tal que siempre que $f \in A$ y x, $y \in X$ son tales que $d(x,y) < \delta$ se tiene que $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Es fácil ver, por ejemplo, que todo subconjunto finito de $C(X,Y)$ es uniformemente equicontinuo.

De manera similar a la que una función continua sobre un compacto es uniformemente continua, una conjunto equicontinuo de funciones sobre un compacto es uniformemente equicontinuo:

Proposición 1. *Sea A un subconjunto equicontinuo de $C(X,Y)$. Si X es compacto, entonces A es uniformemente equicontinuo.*

Demostración. Supongamos que X es compacto y sea $\varepsilon > 0$. Como el conjunto A es equicontinuo, para cada $x \in X$ existe $\delta_x > 0$ tal que $d(f(x), f(y)) < \varepsilon/2$ siempre que $y \in B_{\delta_x}(x)$ y $f \in A$. El conjunto $\{B_{\delta_x}(x) : x \in X\}$ es un cubrimiento de X, que es compacto, así que posee un número de Lebesgue, esto es, existe $\delta > 0$ tal que para todo $y \in X$ existe $x \in X$ tal que $B_\delta(y) \subseteq B_{\delta_x}(x)$.

Sean y e z dos puntos de X tales que $d(y, z) < \delta$ y sea $f \in A$. Sabemos que existe $x \in X$ tal que $B_\delta(y) \subseteq B_{\delta_x}(x)$, y tenemos entonces que

$$d(f(y), f(z)) \leq d(f(y), f(x)) + d(f(x), f(z)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

ya que y, $z \in B_{\delta_x}(x)$. Esto muestra que A es un conjunto uniformemente equicontinuo, como queremos. □

Proposición 2. *Sea A un subconjunto equicontinuo de $C(X, Y)$ y sea $(f_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión con valores en A que converge puntualmente a una función $f : X \to Y$.*

(i) La función f es continua y el conjunto $A \cup \{f\}$ es equicontinuo.

(ii) Si X es compacto, entonces la sucesión converge uniformemente a f.

Demostración. (i) Sea $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión con valores en A que converge puntualmente a una función $f : X \to Y$. Sean $x \in X$ y $\varepsilon > 0$. Como A es equicontinuo en x, existe $\delta > 0$ tal que

$$f \in A,\ y \in X,\ d(x, y) < \delta \implies d(f(x), f(y)) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Si $y \in X$ es tal que $d(x, y) < \delta$, entonces como la métrica es continua tenemos que

$$d(f(x), f(y)) = \lim_{n\to\infty} d(f_n(x), f_n(y)) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Esto muestra que la función f es continua y, más aún, que el conjunto $A \cup \{f\}$ es equicontinuo.

(ii) Supongamos ahora que X es compacto. Sea $\varepsilon > 0$. Como A es equicontinuo, la Proposición 1 nos dice que A es uniformemente equicontinuo, así que existe $\delta > 0$ tal que $d(f(x), f(y)) < \varepsilon/6$ siempre que $f \in A$ y x, $y \in X$ son tales que $d(x, y) < \delta$. Por otro lado, como el espacio X es compacto, es totalmente acotado y existen $m \in \mathbb{N}$ y $x_1, \ldots, x_m \in X$ tales que $X = \bigcup_{i=1}^m B_\delta(x_i)$. Finalmente, como las sucesiones $(f_n(x_1))_{n\geq 1}, \ldots, (f_n(x_m))_{n\geq 1}$ convergen a $f(x_1), \ldots, f(x_m)$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que siempre que n, $m \geq N$ es $d(f_n(x_i), f_m(x_i)) < \varepsilon/6$ para todo $i \in [\![m]\!]$.

Si $x \in X$, enonces existe $j \in [\![n]\!]$ tal que $x \in B_\delta(x_i)$ y, por lo tanto, siempre que n, $m \geq N$ tenemos que

$$\begin{aligned} &d(f_n(x), f_m(x)) \\ &\qquad \leq d(f_n(x), f_n(x_i)) + d(f_n(x_i), f_m(x_i)) + d(f_m(x_i), f_m(x)) \\ &\qquad \leq \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{6} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \end{aligned}$$

porque $d(x_i, x) < \delta$ y f_n, $f_m \in A$, por un lado, y por la elección de N. Esto muestra que $d(f_n, f_m) < \varepsilon$ siempre que n, $m \geq N$ y, por lo tanto, que la sucesión $(f_n)_{n\geq 1}$ es de Cauchy en $C(X, Y)$. Como este espacio es completo esa sucesión converge y como sabemos que f es su límit puntual, tenemos claramente que converge a f uniformemente. □

2 Condiciones de acotación

Un subconjunto A de $C(X, Y)$ es

- ***puntualmente acotado*** si para todo $x \in X$ el subconjunto $\{f(x) : f \in A\}$ de Y es acotado,
- ***puntualmente relativamente compacto*** si para todo $x \in X$ el subconjunto $\{f(x) : f \in A\}$ de Y es relativamente compacto, y
- ***uniformemente acotado*** si el subconjunto $\{f(x) : f \in A, x \in X\}$ de Y es acotado.

Observemos que si Y es un espacio en el que «vale el teorema de Heine–Borel», esto es, en el que un conjunto es compacto si y solamente si es cerrado y acotado, como $\mathbb{R}^n$, entonces las condiciones de acotación puntual y de relativa compacidad puntual son equivalentes.

Como ocurre frecuentemente, sobre un espacio compacto la versión local de una condición implica la versión global: la siguiente proposición nos dice esto para el caso de la acotacióni de conjutos equicontinuos.

Proposición 3. *Si X es compacto, entonces un conjunto puntualmente relativamente compacto y equicontinuo de $C(X, Y)$ es uniformemente acotado.*

Demostración. Supongamos que el espacio métrico X es compacto, sea A un subconjunto puntualmente relativamente compacto de $C(X, Y)$ y fijemos un punto $y \in Y$. Como A es equicontinuo, para cada $x \in X$ existe $\delta_x > 0$ tal que $d(f(x), f(z)) < 1$ siempre que $f \in A$ y $z \in B_{\delta_x}(x)$. El conjunto $\{B_{\delta_x}(x) : x \in X\}$ es un cubrimiento abierto de X, que es compacto, así que posee un subcubrimiento finito: existen $n \in \mathbb{N}$ y $x_1, \ldots, x_n \in X$ tales que $X = \bigcup_{i=1}^{n} B_{\delta_{x_i}}(x_i)$. Como A es puntualmente relativamente compacto y una unión finita de conjuntos relativamente compactos es relativamente compacta, el conjunto $D \coloneqq \{f(x_i) : f \in A, i \in [\![n]\!]\}$ es relativamente compacto. En particular, la función continua $x \in X \mapsto d(x, y) \in \mathbb{R}$ es acotada sobre D y podemos considerar el número $R \coloneqq \sup\{d(f(x_i), y) : f \in A, i \in [\![n]\!]\}$.

Sean ahora $x \in X$ y $f \in A$. Como $\{B_{\delta_{x_i}}(x_i) : i \in [\![n]\!]\}$ es un cubrimiento de X, existe $j \in [\![n]\!]$ tal que $x \in B_{\delta_{x_j}}(x_j)$. La elección del número δ_{x_j} y la definición de R implican inmediatamente que

$$d(f(x), y) \leq d(f(x), f(x_i)) + d(f(x_i), y) < 1 + R.$$

Vemos así que $\{f(x) : f \in A, x \in X\}$ está contenido en la bola $B_{R+1}(y)$ y, por lo tanto, que el conjunto A está uniformemente acotado. $\square$

La condición de local compacidad puntual nos va a ser útil en la próxima sección al probar el teorema de Arzelà–Ascoli vía el siguiente resultado:

Lema 4. *Sea Q un conjunto numerable. Toda sucesión puntualmente relativamente compacta de funciones $Q \to Y$ posee una subsucesión que converge puntualmente.*

Demostración. Empecemos mostrando que

> *si $(g_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión de funciones $Q \to Y$ que es puntualmente relativamente compacta y $q \in Q$, entonces hay una función $r : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ estrictamente creciente tal que la sucesión $(q_{r(n)})_{n\geq 1}$ converge en q.*

Observemos que la sucesión $(q_{r(n)})_{n\geq 1}$ es una subsucesión de $(g_n)_{n\geq 1}$ y que, en consecuencia, es puntualmente relativamente compacta. Para probar la observación basta observar que $(g_n)_{n\geq 1}$ y q son como allí, la sucesión $(g_n(q))_{n\geq 1}$ toma valores en el conjunto $\{g_n(q) : n \geq 1\}$, que es relativamente compacto, así que posee una subsucesión que converge en Y, esto es, existe una funciuón $r : \mathbb{R} \to \mathbb{N}$ estrictamente creciente tal que la sucesión $(g_{r(n)}(q))_{n\geq 1}$ converge.

Probemos ahora el lema. Sea $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de funciones $Q \to Y$ que es puntualmente relativamente compacta y fijemos una biyección $\phi : \mathbb{N} \to Q$; escribiremos q_n en lugar de $\phi(n)$. Vamos a construir para cada $m \in \mathbb{N}_0$ una subsucesión $(f_n^m)_{n\geq 1}$ de la sucesión $(f_n)_{n\geq 1}$ y una función estrictamente creciente $r_m : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ manera tal que

- $(f_n^0)_{n\geq 1} = (f_n)_{n\geq 1}$ y
- para todo $m \in \mathbb{N}$, la sucesión $(f_n^m)_{n\geq 1}$ es la subsucesión $(f_{r_{m-1}(n)}^{m-1})_{n\geq 1}$ de $(f_n^{m-1})_{n\geq 1}$ y converge en q_m.

Empezamos poniendo $f_n^0 = f_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, por supuesto, y procedemos inductivamente. Supongamos que $m \in \mathbb{N}_0$ y que ya construimos la subsucesión $(f_n^m)_{n\geq 1}$ de $(f_n)_{n\geq 1}$. De acuerdo a nuestra observación inicial, porque la sucesión $(f_n^m)_{n\geq 1}$ es puntualmente relativamente compacta ya que se trata de una subsucesión de $(f_n)_{n\geq 1}$, existe una función estrictamente creciente $r_m : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que la sucesión $(f_{r_m(n)}^m(q_{m+1}))_{n\geq 1}$ converge. Si ponemos $f_n^{m+1} = f_{r_m(n)}^m$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $(f_n^{m+1})_{n\geq 1}$ es una subsucesión de $(f_n^m)_{n\geq 1}$ que converge en q_{m+1}. Esto completa la construcción.

Hay exactamente una función $s : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que

$$s(0, n) = n, \qquad s(m+1, n) = s(m, r_m(n))$$

cualesquiera sean $n \in \mathbb{N}$ y $m \in \mathbb{N}_0$. Esta función tiene la propiedad de que

$$n < n' \implies s(m, n) < s(m, n'), \qquad f_n^m = f_{s(n,m)}$$

cualesquiera sean n, $n' \in \mathbb{N}$ y $m \in \mathbb{N}_0$: esto puede verificarse fácilmente haciendo inducción con respecto a m. Como consecuencia de esto, tenemos que para todo $n \in \mathbb{N}$ es

$$s(n+1, n+1) = s(n, r_n(n+1)) > s(n, n)$$

ya r_n es una función estrictamente creciente. Esto significa que la función $t : n \in \mathbb{N} \mapsto s(n, n) \in \mathbb{N}$ es estrictamente creciente y, por lo tanto, que podemos considerar la subsucesión $(f_{t(n)})_{n\geq 1}$ de $(f_n)_{n\geq 1}$. Queremos mostrar que esta subsucesión converge puntualmente en todo el conjunto Q. Esto probará el lema.

Sea $m \in \mathbb{N}$ y mostremos que nuestra subsucesión $(f_{t(n)})_{n\geq 1}$ converge en q_m: para ello es suficiente con probar que $(f_{t(n)})_{n\geq m}$ es una subsucesión de $(f_n^m)_{n\geq 1}$, ya que esta última converge en q_m. Observemos que si $n \geq m$ es

$$\begin{aligned} t(n) &= s(n, n) \\ &= s(n-1, r_{n-1}(n)) \\ &= s(n-2, (r_{n-2} \circ r_{n-1})(n)) \\ &= s(n-3, (r_{n-3} \circ r_{n-2} \circ r_{n-1})(n)) \\ &= \cdots \\ &= s(m, (r_m \circ \cdots \circ r_{n-1})(n)), \end{aligned}$$

así que

$$f_{t(n)} = f_{s(n,n)} = f_{s(m,(r_m \circ r_{m+1} \circ \cdots \circ r_{n-1})(n))} = f^m_{(r_m \circ r_{m+1} \circ \cdots \circ r_{n-1})(n)}.$$

Es suficiente entonces que mostremos que cada vez que $n \geq m$ se tiene que

$$(r_m \circ r_{m+1} \circ \cdots \circ r_{n-1})(n) < (r_m \circ r_{m+1} \circ \cdots \circ r_n)(n+1). \tag{1}$$

Ahora bien, si $n \geq m$, la función $r_m \circ r_{m+1} \circ \cdots \circ r_{n-1}$ es estrictamente creciente y $n \leq r_n(n) < r_n(n+1)$, así que la desigualdad (1) claramente vale. La prueba del lema queda así completa. $\square$

3 El teorema de Arzelà–Ascoli

Usando el Lema 4 de la sección anterior podemos probar el siguiente resultado, que está en la base de lo que será nuestro resultado principal.

Proposición 5. *Si X es compacto, entonces toda sucesión puntualmente relativamente compacta y equicontinua en $C(X,Y)$ posee una subsucesión uniformemente convergente.*

Demostración. Supongamos que el espacio X es compacto y sea $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión puntualmente relativamente compacto y equicontinua de $C(X,Y)$. Como X es compacto, es separable: sea Q un subconjunto denso y numerable de X. De acuerdo al Lema 4, hay una subsucesión $(f_{n_k})_{k\geq 1}$ de $(f_n)_{n\geq 1}$ que converge puntualmente sobre Q. Veamos que esa subsucesión converge, de hecho, uniformemente. Como $C(X,Y)$ es un espacio completo, es suficiente con mostrar que la subsucesión es de Cauchy.

Sea $\varepsilon > 0$. Como la sucesión $(f_{n_k})_{k\geq 1}$ es equicontinua y el espacio X es compacto, esa sucesión es uniformemente equicontinua y existe, por lo tanto, un número $\delta > 0$ tal que $d(f_{n_k}(x), f_{n_k}(y)) < \varepsilon/3$ siempre que $k \in \mathbb{N}$ y x e y son puntos de X tales que $d(x,y) < \delta$. Por otro lado, como X es compacto, es totalmente acotado, y eso y el hecho de que Q es denso en X implican que existen $r \in \mathbb{N}$ y $x_1, \ldots, x_r \in Q$ tales que $X = \bigcup_{i=1}^r B_\delta(x_i)$. Finalmente, como la sucesión $(f_{n_k})_{k\geq 1}$ converge puntualmente en Q, existe $K \in \mathbb{N}$ tal que $d(f_{n_k}(x_i), f_{n_l}(x_i)) < \varepsilon/3$ siempre que k, $l \geq K$ e $i \in [\![r]\!]$.

Sean k y l elementos de $\mathbb{N}$ tales que k, $l \geq K$. Si $x \in X$, existe $j \in [\![r]\!]$ tal que $d(x, x_j) < \delta$ y la elección de δ nos dice que $d(f_{n_k}(x), f_{n_k}(y)) < \varepsilon/3$ y que $d(f_{n_k}(x), f_{n_k}(y)) < \varepsilon/3$, y usando esto vemos que

$$\begin{aligned} & d(f_{n_k}(x), f_{n_l}(x)) \\ & \qquad \leq d(f_{n_k}(x), f_{n_k}(x_j)) + d(f_{n_k}(x_j), f_{n_l}(x_j)) + d(f_{n_l}(x_j), f_{n_l}(x)) \\ & \qquad < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Esto vale cualquiera sea $x \in X$, así que podemos concluir que $d(f_{n_k}, f_{n_l}) < \varepsilon$ y, en definitiva, que la sucesión $(f_{n_k})_{k\geq 1}$ es uniformemente de Cauchy, como queríamos. $\square$

Estamos por fin en condiciones de probar el resultado principal de estas notas, el teorema de Arzelà–Ascoli, por *Cesare Arzelà* y *Giulio Ascoli* que introdujeron la noción de equicontinuidad y probaron hacia 1885 una versión debil del teorema. La forma que damos del resultado es debida a *Maurice Féchet*, que lo formuló en 1906 en términos de espacios métricos, como nosotros— de hecho, Fréchet fue el creador del concepto de espacio métrico.

Teorema 6. *Si X es compacto, entonces un subconjunto de $C(X,Y)$ es relativamente compacto si y solamente si es puntualmente relativamente compacto y equicontinuo.*

Demostración. Supongamos que el espacio X es compacto. Si A es un subconjunto puntualmente relativamente compacto de $C(X,Y)$, la Proposición 5 nos dice que toda sucesión en A posee una subsucesión que converge a un punto de $C(X,Y)$ y, por lo tanto, que A es un subconjunto relativamente compacto de $C(X,Y)$. Vemos así que la condición del teorema es suficiente.

Veamos ahora que es necesaria: sea A un subconjunto relativamente compacto de $C(X,Y)$ y mostremos que es puntualmente relativamente compacto y equicontinuo.

- Sea $x \in A$. La función $e : f \in C(X,Y) \mapsto f(x) \in Y$ es continua, así que $e(\overline{A})$ es compacto porque $\overline{A}$ lo es: como $\{f(x) : f \in A\} = e(A) \subseteq e(\overline{A})$, es claro que $\{f(x) : f \in A\}$ es un subconjunto relativamente compacto de Y. Tenemos de esta forma que A es puntualmente relativamente compacto.
- Fijemos otra vez un punto $x \in A$ y sea ahora $\varepsilon > 0$. Como A es relativamente compacto, su clausura es totalmente acotada: como además A es denso en su clausura, esto implica que existen $n \in \mathbb{N}$ y $f_1, \ldots, f_n \in A$ tales que $\overline{A} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B_\varepsilon(f_i)$. Como las n funciones $f_1, \ldots, f_n$ son continuas en x, existe $\delta > 0$ tal que $d(f_i(x), f_i(y)) < \varepsilon$ siempre que $i \in [\![n]\!]$ e $y \in X$ es tal que $d(x,y) < \delta$.

  Sea ahora $f \in A$ y sea $y \in X$ tal que $d(x,y) < \delta$. Existe $j \in [\![n]\!]$ tal que $f \in B_\varepsilon(f_j)$, y entonces, en vista de la forma en que elegimos δ y de que $d(f, f_j) < \varepsilon/3$, tenemos que

  $$\begin{aligned} d(f(x), f(y)) &\leq d(f(x), f_j(x)) + d(f_j(x), f_j(y)) + d(f_j(y), f(y)) \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

  Vemos así que el conjunto A es equicontinuo.

Esto prueba el teorema. $\square$