Algunos ejemplos sobre espacios completos

Mariano Suárez-Álvarez

12 de septiembre 2019

1 El espacio $B(X)$ con la métrica uniforme

Lema 1. *Sea X un espacio métrico. Si $(x_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy en X e y un punto de X, entonces existe $r > 0$ tal que $x_n \in B_r(y)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Sea $(x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de Cauchy en X y sea $y \in X$. Como la sucesión es de Cauchy, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para cada n, $m \in \mathbb{N}$ es

$$n, m \geq N \implies d(x_n, x_m) < \frac{1}{2}. \tag{1}$$

Consideremos el número $r \coloneqq 1 + \max\{d(y, x_i) : i \in [\![N]\!]\}$ y mostremos que tiene la propiedad descripta en el lema.

Sea $n \in \mathbb{N}$. Si $n \leq N$, entonces

$$d(y, x_n) \leq \max\{d(y, x_i) : i \in [\![N]\!]\} < r.$$

Si, en cambio, es $n > N$, entonces de acuerdo a (1) tenemos que

$$d(y, x_n) \leq d(y, x_N) + d(x_N, x_n) \leq \max\{d(y, x_i) : i \in [\![N]\!]\} + \frac{1}{2} < r.$$

Así, en cualquier caso tenemos que $x_n \in B_r(y)$, y esto prueba el lema. □

Proposición 2. *Sea X conjunto, sea $B(X)$ el conjunto de todas las funciones $X \to \mathbb{R}$ que son acotadas, y sea d la métrica sobre $B(X)$ tal que*

$$d(f,g) = \sup_{x\in X}|f(x) - g(x)|$$

cada vez que f y g son elementos de $B(X)$. El espacio métrico $(B(X), d)$ es completo.

Demostración. Sea $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de Cauchy en $B(X)$. Mostremos primero que

para cada $x \in X$ la sucesión $(f_n(x))_{n\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$.

Sea $x \in X$ y sea $\varepsilon > 0$. Como la sucesión $(f_n)_{n\geq 1}$ es de Cauchy, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que cada vez que n, $m \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$n, m \geq N \implies d(f_n, f_m) < \varepsilon.$$

En particular, si n y m son elementos de $\mathbb{N}$ tales que $n \geq N$, entonces

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \sup_{x\in X}|f(x) - g(x)| < \varepsilon,$$

y esto muestra que la sucesión $(f_n(x))_{n\geq 1}$ es de Cauchy, como queríamos.

Como $\mathbb{R}$ es completo, esto implica que para todo $x \in X$ la sucesión $(f_n(x))_{n\geq 1}$ converge: escribamos $f(x)$ a su límite. Obtenemos de esta forma una función $f : X \to \mathbb{R}$. Queremos mostrar ahora que, primero, f es acotada, de manera que se trata de un elemento de $B(X)$ y, segundo, que f es el límite de la sucesión $(f_n)_{n\geq 1}$. Esto completará la prueba de la proposición.

Como la sucesión $(f_n)_{n\geq 1}$ es de Cauchy, el Lema 1 nos dice que existe $R > 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ es

$$\sup_{x\in X}|f_n(x)| = d(f_n, 0) < R.$$

En particular, si $x \in X$ entonces para todo $n \in \mathbb{N}$ tenemos que $|f_n(x)| < R$, así que

$$|f(x)| = \left|\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right| = \lim_{n\to\infty}|f_n(x)| \leq R,$$

porque la función $t \in \mathbb{R} \mapsto |t| \in \mathbb{R}$ es continua. Usando esto vemos que

$$\sup_{x\in X}|f(x)| \leq R$$

y, por lo tanto, que a función f es acotada, esto es, que $f \in B(X)$.

Queremos ahora mostrar que la sucesión $(f_n)_{n\geq 1}$ converge a f en $B(X)$. Sea $\varepsilon > 0$. Como $(f_n)_{n\geq 1}$ es de Cauchy, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo n, $m \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$n, m \geq N \implies d(f_n, f_m) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

En particular, si $x \in X$, entonces para todo $n \geq N$ es

$$|f_n(x) - f_N(x)| \leq d(f_n, f_N) < \frac{\varepsilon}{2},$$

así que

$$f_N(x) - \frac{\varepsilon}{2} < f_n(x) < f_N(x) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Como $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, esto implica que

$$f_N(x) - \frac{\varepsilon}{2} \leq f(x) \leq f_N(x) + \frac{\varepsilon}{2},$$

es decir, que

$$|f(x) - f_N(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Esto es así para todo $x \in X$, así que

$$d(f, f_N) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Si ahora $m \in \mathbb{N}$ es tal que $m \geq N$, tenemos que

$$d(f, f_n) = d(f, f_N) + d(f_N, f_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Vemos así que la sucesión $(f_n)_{n\geq 1}$ converge a f, como dijimos. $\square$

2 El espacio $C(X)$ con la métrica uniforme

Sea ahora X un espacio métrico y sea $C(X)$ el conjunto de todas las funciones continuas $X \to \mathbb{R}$ que son acotadas. Claramente $C(X) \subseteq B(X)$, así que podemos considerar a $C(X)$ como un espacio métrico restringiendo a él la métrica de $B(X)$. Queremos mostrar que $C(X)$ es un espacio métrico completo.

Lema 3. *Sea (X, d) un espacio métrico completo. Si Y es un subconjunto cerrado de X y d_Y es la métrica que se obtiene restringiendo la de X a Y, entonces (Y, d_Y) es un espacio métrico completo.*

Demostración. Sea $(y_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de Cauchy en el espacio Y. Claramente $(y_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy en X: como X es completo, $(y_n)_{n\geq 1}$ converge en X a un punto y. Como la sucesión toma valores en Y e Y es cerrado en X, sabemos que $y \in Y$. Para probar el lema es suficiente que mostremos ahora que la sucesión $(y_n)_{n\geq 1}$ converge en Y a y: esto es inmediato, ya que

$$\lim_{n\to\infty} d_Y(y, y_n) = \lim_{n\to\infty} d(y, y_n) = 0. \qquad \square$$

Proposición 4. *Sea X un espacio métrico. El espacio $C(X)$ de las funciones $X \to \mathbb{R}$ continuas y acotadas es completo con respecto a la métrica uniforme.*

Demostración. Como $C(X)$ es un subespacio métrico de $B(X)$, de acuerdo al Lema 3 es suficiente que probemos que $C(X)$ es un cerrado de $B(X)$. Sea $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en $C(X)$, sea $f \in B(X)$ y supongamos que $(f_n)_{n\geq 1}$ converge en $B(X)$ a f. Queremos mostrar que $f \in C(X)$ y, para ello, que f es una función continua.

Sea $x \in X$ y sea $\varepsilon > 0$. Como la sucesión $(f_n)_{n\geq 1}$ converge a f en $B(X)$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(f, f_n) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Por otro lado, la función f_n es continua en x, así que existe $\delta > 0$ tal que si $y \in X$ entonces vale que

$$y \in B_\delta(x) \implies |f_n(x) - f_n(y)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Si ahora y un punto de $B_\delta(x)$, entonces

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)| \\ &\leq d(f, f_n) + |f_n(x) + f_n(y)| + d(f_n, f) \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Esto muestra que la función f es continua en x y, en definitiva, que f es una función continua. La proposición queda así probada. $\square$

3 El espacio $C[0,1]$ con la métrica d_1

Consideremos ahora el espacio $C[0,1]$ de las funciones $[0,1] \to \mathbb{R}$ que son continuas y dotémoslo de la métrica d tal que

$$d_1(f, g) = \int_0^1 |f(t) - g(t)| \,\mathrm{d}t.$$

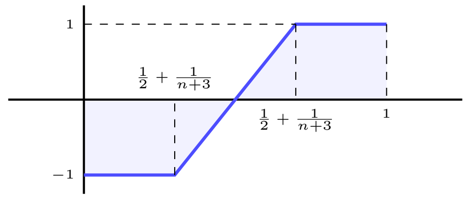

Figura 1. La función f_n de la prueba de la Proposición 5.

Proposición 5. *El espacio métrico* $(C[0,1], d_1)$ *no es completo.*

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{R}$ consideremos la función $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ tal que para cada $x \in [0,1]$ es

$$f_n(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2} - \frac{1}{n+3}]; \\ (n+3)(t - \frac{1}{2}) & \text{si } t \in [\frac{1}{2} - \frac{1}{n+3}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n+3}]; \\ 1 & \text{si } t \in [\frac{1}{2} + \frac{1}{n+3}, 1]. \end{cases}$$

Es inmediato verificar que se trata de una función continua y que $|f_n(t)| \leq 1$ para todo $t \in [0,1]$.

Mostremos en primer lugar que $(f_n)_{n \geq 1}$ es una sucesión de Cauchy en $C[0,1]$ con respecto a la métrica d_1. Sea $\varepsilon > 0$, sea $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{4}{N+3} < \varepsilon,$$

y sean n, $m \in \mathbb{N}$ tales que $N \leq n \leq m$. Como

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{n+3} < \frac{1}{2} - \frac{1}{m+3}, \qquad \frac{1}{2} + \frac{1}{n+3} < \frac{1}{2} + \frac{1}{m+3},$$

tenemos que

$$t \in \left[0, \frac{1}{2} - \frac{1}{n+3}\right] \cup \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{m+3}, 1\right] \implies f_n(t) = f_m(t)$$

y entonces

$$\begin{aligned} d_1(f_n, f_m) &= \int_0^1 |f_n(t) - f_m(t)| \, \mathrm{d}t = \int_{\frac{1}{2} - \frac{1}{n+3}}^{\frac{1}{2} + \frac{1}{n+3}} |f_n(t) - f_m(t)| \, \mathrm{d}t \\ &\leq \frac{4}{n+3} < \varepsilon \end{aligned}$$

Esto prueba que la sucesión $(f_n)_{n \geq 1}$ es de Cauchy con respecto a la métrica d_1.

Supongamos ahora, para llegar a un absurdo, que converge a una función $g \in C[0,1]$. Sea $N \in \mathbb{N}$. Si $n \in \mathbb{N}$ es tal que $n \geq N$, entonces

$$t \in \left[0, \frac{1}{2} - \frac{1}{N+3}\right] \implies f(t) = -1$$

y

$$t \in \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{N+3}, 1\right] \implies f(t) = 1,$$

así que

$$\begin{aligned} d_1(f_n, g) &= \int_0^1 |f(t) - g(t)| \,\mathrm{d}t \\ &\geq \int_0^{\frac{1}{2}-\frac{1}{N+3}} |-1 - g(t)| \,\mathrm{d}t + \int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{N+3}}^1 |1 - g(t)| \,\mathrm{d}t \geq 0. \end{aligned}$$

Como $\lim\limits_{n\to\infty} d_1(f_n, g) = 0$, esta desigualdad implica que, de hecho,

$$\int_0^{\frac{1}{2}-\frac{1}{N+3}} |-1 - g(t)| \,\mathrm{d}t + \int_{\frac{1}{2}+\frac{1}{N+3}}^1 |1 - g(t)| \,\mathrm{d}t = 0.$$

Como los integrandos de estas dos integrales son continuos y no negativos, esto implica que esos integrandos son idénticamente nulos en los intervalos de integración, esto es, que

$$t \in \left[0, \frac{1}{2} - \frac{1}{N+3}\right] \implies g(t) = -1$$

y

$$t \in \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{N+3}, 1\right] \implies g(t) = 1,$$

Esto ocurre para todo $N \in \mathbb{N}$, así que podemos concluir que

$$t \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \implies g(t) = -1$$

y

$$t \in \left(\frac{1}{2}, 1\right] \implies g(t) = 1.$$

En particular, tenemos que

$$\lim_{t\nearrow 1/2} g(t) = -1 \neq 1 = \lim_{t\searrow 1/2} g(t)$$

y esto es absurdo, ya que g es continua en $1/2$. $\square$

4 El espacio ℓ_∞

Proposición 6. *El espacio ℓ_∞ es completo.*

Demostración. Sea $(x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de Cauchy en ℓ_∞ y para cada $n \in \mathbb{N}$ escribamos $x_n = (x_{n,k})_{k\geq 1}$.

Sea $k \in \mathbb{N}$ y sea $\varepsilon > 0$. Como la sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ es de Cauchy, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n, m \geq N \implies d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

En particular, si n, $m \geq N$, tenemos que

$$|x_{n,k} - x_{m,k}| \leq \sup_{l\geq 1} |x_{n,l} - x_{m,l}| = d_\infty(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Esto muestra que la sucesión de números reales $(x_{n,k})_{n\geq 1}$ es de Cauchy en $\mathbb{R}$ y, por lo tanto, que posee un límite $y_k \in \mathbb{R}$. Podemos entonces considerar la sucesión $y = (y_k)_{k\geq 1}$. Vamos a mostrar que $y \in \ell_\infty$ y que la sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ converge a y en ℓ_∞: esto probará la proposición.

Como la sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ es de Cauchy, el Lema 1 nos dice que existe $R > 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ es $x_n \in B_R(0)$, es decir,

$$\sup_{k\geq 1} |x_{n,k}| = d(0, x_n) < R,$$

Esto nos dice, de hecho, que

$$|x_{n,k}| < R \text{ cualesquiera sean } n \text{ y } k \text{ en } \mathbb{N}.$$

En particular, para todo $k \in \mathbb{N}$ tenemos que

$$|y_k| = \left|\lim_{n\to\infty} x_{n,k}\right| = \lim_{n\to\infty} |x_{n,k}| \leq R$$

y esto a su vez nos dice que $\sup_{k\geq 1} |y_k| \leq R$. Vemos de esta forma que $y \in \ell_\infty$.

Para terminar, mostremos que la sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ converge a y. Sea $\varepsilon > 0$. Como la sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ es de Cauchy, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n, m \geq N \implies d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

En particular, si $n \geq N$ tenemos que

$$|x_{n,k} - x_{m,k}| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ para todo } m \geq N$$

y, como $\lim_{m\to\infty} x_{m,k} = y_k$, esto implica que

$$|x_{n,k} - y_k| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Vemos así que siempre que $n \geq N$ es

$$d(x_n, y) = \sup_{k \geq 1} |x_{n,k} - y_k| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

y esto nos dice, como queríamos, que la sucesión $(x_n)_{n \geq 1}$ converge a y. □

Una consecuencia de la prueba que acabamos de hacer es que si $(x_n)_{n \geq 1}$ es una sucesión de puntos de ℓ_∞ que converge a $y = (y_k)_{k \geq 1} \in \ell_\infty$, y es $x_n = (x_{n,k})_{k \geq 1}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$y_k = \lim_{n \to \infty} x_{n,k}$$

para cada $k \in \mathbb{N}$. Decimos que los límites en ℓ_∞ se calculan «coordenada a coordenada».

5 Los espacios c y c_0

Sea c el conjunto de todas las sucesiones $(x_n)_{n \geq 1}$ de números reales que convergen. Como una sucesión convergente es acotada, es $c \subseteq \ell_\infty$. Podemos ver entonces a c con la métrica inducida por la de ℓ_∞.

Proposición 7. *El espacio c es completo.*

Demostración. Como c es un subespacio de ℓ_∞, para ver que es concreto es suficiente que mostremos que se trata de un cerrado de ℓ_∞. Sea $(x_n)_{n \geq 1}$ una sucesión de puntos de c que converge en ℓ_∞ a un punto y: tenemos que mostrar que y es una sucesión convergente, de manera que $y \in c$.

Sea $\varepsilon > 0$. Como la sucesión $(x_n)_{n \geq 1}$ converge a y, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq N \implies d(x_n, y) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Por otro lado, como x_N es un elemento de c, se trata de una sucesión convergente y, por lo tanto, de una sucesión de Cauchy. Si escribimos $x_N = (x_{N,m})_{m \geq 1}$, entonces existe $M \in \mathbb{N}$ tal que

$$k, l \geq M \implies |x_{N,k} - x_{N,l}| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Si ahora k, $l \geq \max\{N, M\}$, entonces

$$\begin{aligned} |y_k - y_l| &\leq |y_k - x_{N,k}| + |x_{N,k} - x_{N,l}| + |x_{N,l} - y_l| \\ &\leq d(y, x_n) + |x_{N,k} - x_{N,l}| + d(x_m, y) \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Esto muestra que la sucesión $y = (y_k)_{k\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy y, como el espacio métrico $\mathbb{R}$ es completo, convergente. En otras palabras, tenemos que y pertenece a c, como queríamos. $\square$

Sea ahora c_0 el subconjunto de las sucesiones de c que convergen a 0, y veámoslo como un espacio métrico con la métrica inducida por la de c.

Proposición 8. *El espacio métrico c_0 es completo.*

Demostración. De acuerdo al Lema 3, basta que mostremos que c_0 es un cerrado de c. Ahora bien, si $x = (x_n)_{n\geq 1}$ es un elemento de c, entonces existe $L(x) \coloneqq \lim_{n\to\infty} x_n$, y de esta manera obtenemos una función $L : c \to \mathbb{R}$. Como $c_0 = L^{-1}(0)$, para ver que c_0 es un cerrado de c es suficiente que mostremos que la función L es continua. De hecho, lo que haremos es mostrar que es uniformemente continua.

Sea $\varepsilon > 0$ y sean x e y dos elementos de c tales que $d(x, y) < \varepsilon$. Para todo $k \in \mathbb{N}$ tenemos que

$$|x_k - y_k| \leq \sup_{l\geq 1} |x_l - y_k| = d(x, y) < \varepsilon$$

y entonces

$$\begin{aligned} |L(x) - L(y)| &= \left|\lim_{k\to\infty} x_k - \lim_{k\to\infty} y_k\right| = \left|\lim_{k\to\infty} (x_k - y_k)\right| \\ &= \lim_{k\to\infty} |x_k - y_k| < \varepsilon. \end{aligned}$$

$\square$

6 La distancia p-ádica en $\mathbb{Z}$

Sea p un número primo. Para cada $n \in \mathbb{Z}$ ponemos

$$\nu_p(n) = \begin{cases} \max\{m \in \mathbb{N}_0 : p^m \mid n\} & \text{si } n \neq 0; \\ +\infty & \text{si } n = 0. \end{cases}$$

Esto define una función $\nu_p : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}_0 \cup \{+\infty\}$. Si m, $m \in \mathbb{Z}$ entonces

$$\nu_p(n) = 0 \iff n = 0, \qquad \nu_p(n) = \nu_p(-n)$$

y

$$\nu_p(n + m) \leq \min\{\nu_p(n), \nu_p(m)\}, \tag{2}$$

y usando esto es fácil ver que la función

$$d_p : (n, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mapsto e^{-\nu_p(n-m)} \in \mathbb{R}$$

es una métrica. De hecho, la desigualdad (2) implica que satisface una desigualdad más fuerte que la desigualdad triangular, la llamada *desigualdad ultramétrica*: si x, y, $z \in \mathbb{Z}$, entonces

$$d_p(x, z) \leq \max\{d_p(x, y), d_p(x, z)\}.$$

En general, decimos que un espacio métrico (X, d) es ***ultramétrico*** si su métrica satisface la desigualdad ultramétrica.

Una consecuencia importante de esta desigualdad es que es más fácil que lo normal verificar que una sucesión es de Cauchy:

Lema 9. *Sea (X, d) un espacio ultramétrico. Una sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ en X es de Cauchy si y solamente si $\lim_{n\to\infty} d(x_{n+1}, x_n) = 0$.*

Demostración. La necesidad de la condición es evidente. Veamos la suficiencia. Supongamos que se cumple y sea $\varepsilon > 0$. De acuerdo a la hipótesis, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_{n+1}, x_n) < \varepsilon$ siempre que $n \geq N$. Queremos mostrar que también se tiene $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ siempre que $n \geq m \geq N$. Lo hacemos por inducción con respecto a $n - m$, notando que cuando esta diferencia es nula lo que queremos es evidente. Ahora bien, si $n - m > 0$, entonces la desigualdad ultramétrica nos dice que

$$d(x_n, x_m) \leq \max\{d(x_n, x_{n-1}), d(x_{n-1}, x_m)\}. \tag{3}$$

Como $n-m > 0$ y $n \geq m \geq N$, tenemos que $n-1 \geq N$, así que $d(x_n, x_{n-1}) < \varepsilon$. Por otro lado, $0 \leq (n - 1) - m < n - m$, así que la hipótesis inductiva implica que $d(x_{n-1}, x_m) < \varepsilon$. Juntando estas dos desigualdades y (3), vemos que $d(x_n, x_m) < \varepsilon$, completando la inducción. □

Proposición 10. *El espacio métrico $(\mathbb{Z}, d_p)$ no es completo.*

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea

$$x_n \coloneqq 1 + p^2 + p^4 + \cdots + p^{2(n-1)}.$$

La sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ es de Cauchy en $\mathbb{Z}$: acuerdo al Lema 9, para verlo es suficiente observar que

$$\lim_{n\to\infty} d(x_{n+1}, x_n) = \lim_{n\to\infty} e^{-2n} = 0,$$

ya que para cada $n \in \mathbb{N}$ es $x_{n+1} - x_n = p^{2n}$. Probemos ahora que esa sucesión no tiene límite.

Supongamos que, por el contrario, la sucesión converge a $y \in \mathbb{Z}$. Sea $m \in \mathbb{N}$. La convergencia implica que existe $N \in \mathbb{N}$, que podemos suponer mayor que m, tal que para cada $n \geq N$ es $d_p(x_n, y) < e^{-m}$: esto significa que p^m divide a

$$x_n - y = 1 + p^2 + \cdots + p^{2(n-1)} - y = \frac{1 - p^{2n}}{1 - p^2} - y = \frac{1 - p^{2n} - y(1 - p^2)}{1 - p^2},$$

así que $p^m \mid 1 - p^{2n} - y(1 - p^2)$ y, como $m \leq 2n$,

$$p^m \mid 1 - y(1 - p^2).$$

Vemos así que el entero $1 - y(1 - p^2)$ es divisible por todas las potencias de p, así que tiene que ser igual a 0: esto es absurdo, porque implica que $1 - p^2$ es inversible en $\mathbb{Z}$ y no lo es, ya que no es ni 1 ni -1. □

En la prueba de esta proposición elegimos la sucesión de enteros $(x_n)_{n \geq 1}$ con

$$x_n \coloneqq 1 + p^2 + p^4 + \cdots + p^{2(n-1)}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ porque de esa forma el argumento funciona para todo primo p. Podríamos haber elegido la sucesión $(z_n)_{n \geq 1}$ con

$$z_n \coloneqq 1 + p + p^2 + \cdots + p^{(n-1)}$$

y exactamente el mismo argumento habría probar que es de Cauchy. Si suponemos ahora que $y \in \mathbb{Z}$ es un límite para la sucesión llegaríamos como en la prueba a que el entero $1 - y(1 - p)$ es nulo y, por lo tanto, a que $1 - p$ es inversible en $\mathbb{Z}$. Esto es absurdo *salvo* cuando $p = 2$: en ese caso $1 - p = -1$, así que no llegamos a ninguna contradicción y, de hecho, en ese caso la sucesión sí converge. En efecto, si $p = 2$ es

$$z_n + 1 = 1 + 2 + \cdots + 2^{n-1} + 1 = \frac{1 - 2^n}{1 - 2} + 1 = 2^n,$$

de manera que $d(z_n, -1) = e^{-n}$ y, por lo tanto, $\lim_{n \to \infty} z_n = -1$.

7 La distancia p-ádica en $\mathbb{Q}$

Sea, como en la sección anterior, p un número primo. Si a, a', b y b' son enteros y es $b \neq 0$ y $b' \neq 0$, entonces las diferencias $\nu_p(a) - \nu_p(b)$ y $\nu_p(a') - \nu_p(b')$ tienen sentido, porque los sustraendos son finitos, y

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \implies \nu_p(a) - \nu_p(b) = \nu_p(a') - \nu_p(b').$$

Esto implica inmediatamente que hay una función $\nu_p : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$ tal que

$$\nu_p\left(\frac{a}{b}\right) = \nu_p(a) - \nu_p(b)$$

para cada número racional a/b, ya que el lado derecho de esta igualdad no depende de la escritura elegida para a/b.

De manera similar a lo hecho en la sección anterior, podemos ver que la función

$$d_p : (r, s) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \mapsto e^{-\nu_p(r-s)} \in \mathbb{R}$$

es una métrica en $\mathbb{Q}$ que satisface la desigualdad ultramétrica. Llamamos a esta métrica la ***métrica p-ádica*** de $\mathbb{Q}$. Es claro que la inclusión $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ es una inyección isométrica con respecto a las métricas p-ádicas de $\mathbb{Z}$ y de $\mathbb{Q}$.

Podemos considerar la misma sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ que antes, con

$$x_n = 1 + p^2 + \cdots + p^{2(n-1)}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$, pero esta vez en el espacio métrico $(\mathbb{Q}, d_p)$. A diferencia de lo que ocurría en $\mathbb{Z}$, ahora la sucesión sí converge y converge a

$$\frac{1}{1-p^2}.$$

En efecto, para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos que

$$x_n - \frac{1}{1-p^2} = \frac{1-p^{2n}}{1-p^2} - \frac{1}{1-p^2} = -\frac{p^{2n}}{1-p^2},$$

así que, como $1 - p^2$ es coprimo con p, es

$$\nu_p\left(x_n - \frac{1}{1-p^2}\right) = 2n$$

y

$$d_p\left(x_n, \frac{1}{1-p^2}\right) = e^{-2n}.$$

Es claro, entonces, que $\lim_{n\to\infty} d_p(x_n, (1-p^2)^{-1}) = 0$.

Más allá de este ejemplo, la métrica d_p en $\mathbb{Q}$ no es completa. Para probarlo, usaremos el siguiente lema.

Lema 11. *Si $(x_n)_{n\geq 1}$ e $(y_n)_{n\geq 1}$ son dos sucesiones en $\mathbb{Q}$ que convergen con respecto a la métrica d_p a α y a β, entonces las sucesiones $(x_n + y_n)n \geq 1$ y $(x_n y_n)_{n\geq 1}$ también convergen y sus límites son $\alpha + \beta$ y $\alpha\beta$, respectivamente.*

Proposición 12. *El espacio métrico $(\mathbb{Q}, d_p)$ no es completo.*

Demostración. Consideremos la sucesión de enteros $(c_n)_{n\geq 0}$ tal que $c_0 = 1$ y

$$c_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} c_i c_{n-i} \tag{4}$$

para todo $n \in \mathbb{N}_0$. Los primeros términos de la sucesión son

$$1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, 16796, 58786, 208012, \ldots$$

Estos números son llamados ***números de Catalán***, por Eugène Charles Catalan.

Para cada $n \in \mathbb{N}_0$ sea

$$x_n = \sum_{i=0}^{n} c_i p^i.$$

La sucesión $(x_n)_{n\geq 0}$ es de Cauchy con respecto a la métrica d_p: esto sigue inmediatamente del Lema 9 y de la observación de que $\lim_{n\to\infty} d(x_{n+1}, x_n) = 0$, ya que para todo $n \in \mathbb{N}$ es $\nu_p(x_{n+1} - x_n) = \nu_p(c_{n+1}p^{n+1}) \geq n + 1$.

Sea $n \in \mathbb{N}_0$. Es

$$\begin{aligned} px_n^2 = p\left(\sum_{i=0}^{n} c_i p^i\right)^2 &= \sum_{k=0}^{2n}\left(\sum_{\substack{0\leq i,j\leq n\\ i+j=k}} c_i c_j\right)p^{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{i=0}^{k} c_i c_{n-i}\right)p^{k+1} + p^{n+2}\underbrace{\sum_{k=n+1}^{2n}\left(\sum_{\substack{1\leq i,j\leq n\\ i+j=k}} c_i c_j\right)p^{k-n-1}} \end{aligned}$$

y, recordando la relación (4) y llamando a_n al número marcado con la llave, esto es

$$= \sum_{i=0}^{n} c_{k+1}p^{k+1} + p^{n+1}a_n = x_{n+1} - 1 + p^{n+1}a_n.$$

Supongamos ahora que la sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ converge a un número racional α con respecto a la métrica d_p. Ahora bien, probamos que

$$px_n^2 - x_{n+1} + 1 = p^{n+1}a_n$$

Usando el Lema 11 vemos que la sucesión $(px_n^2 - x_{n+1} + 1)_{n\geq 1}$ converge a $p\alpha^2 - \alpha + 1$ y, por otro lado, es inmediato que la sucesión $(p^{n+1}a_n)_{n\geq 1}$ converge a 0. La conclusión de esto es que α es un número racional tal que

$$p\alpha^2 - \alpha + 1 = 0.$$

Esto es absurdo, porque el polinomio $pT^2 - T + 1 \in \mathbb{Q}[T]$ no tiene raíces racionales. $\square$