Completación de espacios métricos

Mariano Suárez-Álvarez

20 de septiembre 2019

1 Completaciones 1
2 Completaciones: existencia 8
3 Completaciones: existencia, *bis* 14

1 Completaciones

Si X es un espacio métrico, una ***completación*** de X es una inyección isométrica $\phi : X \to X^c$ con codominio en un espacio métrico completo que tiene imagen $\phi(X)$ densa en X^c.

Lema 1.

(*i*) *Sean X e Y espacios métricos. Si $\psi : X \to Y$ es una inyección isométrica e Y es completo, entonces la correstricción $\psi|^{\overline{\phi(X)}} : X \to \overline{\phi(Y)}$ es una completación de X.*

(*ii*) *Sea X un espacio métrico y sea Y un subespacio de X. Si $\phi : X \to X^c$ es una completación de X, entonces la restricción $\psi = \phi|_Y^{\overline{\phi(Y)}} : Y \to \overline{\phi(Y)}$ es una completación de X.*

(*iii*) *Sean X e Y dos espacios métricos. Si $\phi : X \to X^c$ y $\psi : Y \to Y^c$ son completaciones de X y de Y, entonces la función $\phi \times \psi : X \times Y \to X^c \times Y^c$ es una completación de $X \times Y$.*

Demostración. (i) Supongamos que Y es un espacio métrico completo y que $\psi : X \to Y$ es una inyección isométrica y sea $\phi \coloneqq \phi|^{\overline{\psi(X)}} : X \to \overline{\phi(X)}$. Es claro que ϕ es una inyección isométrica y que su imagen es densa en su codominio. Finalmente, como su codominio es un cerrado en el espacio métrico Y, que es completo, es él mismo un espacio métrico completo.

(ii) Esta afirmación es un caso particular de la parte (i).

(*iii*) Hay que mostrar que la función $\phi \times \psi$ es una inyección isométrica, que tiene imagen densa en $X^c \times Y^c$, y que el espacio métrico $X^c \times Y^c$ es completo. Las tres consas son inmediatas. $\square$

Nuestro objetivo principal en esta sección es probar la llamada *propiedad universal* de la completación de un espacio y un resultado de unicidad. El primer paso para todo eso es el siguiente resultado auxiliar.

Lema 2. *Sea $f : X \to Y$ una función uniformemente continua entre espacios métricos. Si $(x_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy en X, entonces $(f(x_n))_{n\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy en Y.*

Demostración. Sea $(x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de Cauchy en X y sea $\varepsilon > 0$. Como la función f es uniformemente continua, existe $\delta > 0$ tal que cada vez que x e y son puntos de X tales que $d(x, y) < \delta$ se tiene que $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Por otro lado, como $(x_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que cada vez que n y m son enteros tales que n, $m \geq N$ se tiene que $d(x_n, x_m) < \delta$. Si ahora n y m son dos enteros tales que n, $m \geq N$, entonces $d(x_n, x_m) < \delta$ y la elección de δ implica que $d(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon$. Vemos así que la sucesión $(f(x_n))_{n\geq 1}$ es de Cauchy en Y. $\square$

Decimos que una función $f : X \to Y$ entre espacios métricos es ***tensa*** si $d(f(x), f(x')) \leq d(x, x')$ para toda par de puntos x y x' de X. Es inmediato verificar que una función tensa es uniformemente continua.

La siguiente proposición nos dice que la completación de un espacio métrico posee una propiedad de extensión de funciones uniformemente continuas: llamamos a esta propiedad la *propiedad universal* de la completación.

Proposición 3. *Sea X un espacio métrico y sea $\phi : X \to X^c$ una completación de X. Si Y es un espacio métrico completo y $f : X \to Y$ es una función uniformemente continua, entonces existe una y solo una función continua $\bar{f} : X^c \to Y$ tal que $f = \bar{f} \circ \phi$, esto es, tal que conmuta el diagrama*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\phi"'] & Y \\ X^c \arrow[ur, "\bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

La función $\bar{f}$ es, de hecho, uniformemente continua. Si f es tensa, también lo es $\bar{f}$.

Demostración. Sea x un punto de X^c. Como el conjunto $\phi(X)$ es denso en X^c, existe una sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ de puntos de X tal que la sucesión $(\phi(x_n))_{n\geq 1}$

converge a x. Por supuesto, la sucesión $(\phi(x_n))_{n\geq 1}$ es entonces una sucesión de Cauchy en X^c y, como ϕ es una inyección isométrica, vemos que $(x_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy en X. De acuerdo al Lema 2, la sucesión $(f(x_n))_{n\geq 1}$ es de Cauchy en Y y, como Y es completo, posee un límite. Mostremos que ese límite depende solamente del punto x de X^c y no de la elección particular que hicimos de una sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ en X tal que la sucesión $(\phi(x_n))_{n\geq 1}$ converge a x.

Sea para ello $(x'_n)_{n\geq 1}$ otra sucesión en X tal que $(\phi(x'_n))_{n\geq 1}$ converge a x en X^c. Para cada $n \in \mathbb{N}$ pongamos

$$y_n = \begin{cases} x_{n/2} & \text{si } n \text{ es par;} \\ x'_{(n+1)/2} & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Es fácil verificar que la sucesión $(\phi(y_n))_{n\geq 1}$ converge a x, así que $(y_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy y la sucesión $(f(y_n))_{n\geq 1}$ converge. Esto implica que las dos subsucesiones $(f(x_n))_{n\geq 1} = (f(y_{2n}))_{n\geq 1}$ y $(f(x'_n))_{n\geq 1} = (f(y_{2n-1}))_{n\geq 1}$ son convergentes y convergen al mismo límite. Esto prueba lo que queríamos.

La conclusión de todo esto es que existe una función $\bar{f} : X^c \to Y$ con la siguiente propiedad característica:

> *si $x \in X^c$ y $(x_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión en X tal que la sucesión $(\phi(x_n))_{n\geq 1}$ converge a x en X^c, entonces la sucesión $(f(x_n))_{n\geq 1}$ converge a $\bar{f}(x)$.*

Para completar la prueba, verificaremos que $\bar{f}$ tiene las propiedades descriptas en el enunciado.

- Sea $x \in X$ y sea $(x_n)_{n\geq 1}$ la sucesión en X que tiene $x_n = x$ para todo $n \in \mathbb{N}$: es claro que la sucesión $(\phi(x_n))_{n\geq 1}$ converge a $\phi(x)$, simplemente porque es constante, y entonces la propiedad característica de $\bar{f}$ nos dice que $\bar{f}(\phi(x))$ es el límite de la sucesión $(f(x_n))_{n\geq 1}$. Este límite es $f(x)$, otra vez porque esta última sucesión es constante, y esto nos dice que $\bar{f}(\phi(x)) = f(x)$: tenemos entonces que $\bar{f} \circ \phi = f$.
- Mostremos que $\bar{f}$ es uniformemente continua y, en particular, continua. Sea $\varepsilon > 0$. Como f es uniformemente continua, existe $\delta > 0$ tal que para cada z, $z' \in X$ es

  $$d(z, z') < \delta \implies d(f(z), f(z')) < \frac{\varepsilon}{3}$$

  Sean ahora x y x' dos puntos de X^c tales que $d(x, x') < \delta/3$. Como $\phi(X)$ es denso en X^c, existen dos sucesiones $(x_n)_{n\geq 1}$ y $(x'_n)_{n\geq 1}$ en X tales que las sucesiones $(\phi(x_n))_{n\geq 1}$ y $(\phi(x'_n))_{n\geq 1}$ convergen a x y a x'. La propiedad característica de la función $\bar{f}$ nos dice que las sucesiones $(f(x_n))_{n\geq 1}$ y

$(f(x_n))_{n\geq 1}$ convergen a $\bar{f}(x)$ y a $\bar{f}(x')$, respectivamente, y, en particular, tenemos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$n \geq N \implies \begin{cases} d(\phi(x_n), x) < \dfrac{\delta}{3}, & d(\phi(x'_n), x') < \dfrac{\delta}{3}, \\ d(f(x_n), \bar{f}(x)) < \dfrac{\varepsilon}{3}, & d(f(x'_n), \bar{f}(x')) < \dfrac{\varepsilon}{3}. \end{cases}$$

Si ahora $n \in \mathbb{N}$ es tal que $n \geq N$, entonces porque ϕ es una inyección isométrica tenemos que

$$\begin{aligned} d(x_n, x'_n) &= d(\phi(x_n), \phi(x'_n)) \\ &\leq d(\phi(x_n), x) + d(x, x') + d(x', \phi(x'_n)) \\ &< \frac{\delta}{3} + \frac{\delta}{3} + \frac{\delta}{3} = \delta \end{aligned}$$

y, por lo tanto, $d(f(x_n), f(x'_n)) < \varepsilon/3$. Usando esto vemos que

$$\begin{aligned} d(\bar{f}(x), \bar{f}(x')) &\leq d(\bar{f}(x), f(x_n)) + d(f(x_n), f(x'_n)) + d(f(x'_n), \bar{f}(x')) \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

- Supongamos ahora que la función f es tensa y mostremos que entonces $\bar{f}$ también lo es. Sean x y x' dos puntos de X^c y sea $\varepsilon > 0$. Como $\phi(X)$ es denso en X^c, hay sucesiones $(x_n)_{n\geq 1}$ y $(x'_n)_{n\geq 1}$ en X tales que $(\phi(x_n))_{n\geq 1}$ y $(\phi(x'_n))_{n\geq 1}$ convergen a x y a x', respectivamente, y la propiedad característica de la función $\bar{f}$ nos dice que además las sucesiones $(f(x_n))_{n\geq 1}$ y $(f(x'_n))_{n\geq 1}$ convergen a $\bar{f}(x)$ y a $\bar{f}(x')$. Existe entonces $m \in \mathbb{N}$ tal que $d(\phi(x_m), x) < \varepsilon/4$, $d(\phi(x'_m), x') < \varepsilon/4$, $d(f(x_m), \bar{f}(x)) < \varepsilon/4$ y $d(f(x'_m), \bar{f}(x')) < \varepsilon/4$, y, por lo tanto,

$$\begin{aligned} &d(\bar{f}(x), \bar{f}(x')) \\ &\quad \leq d(\bar{f}(x), f(x_m)) + d(f(x_m), f(x'_m)) + d(f(x'_m), \bar{f}(x')) \\ &\quad < \frac{\varepsilon}{2} + d(x_m, x'_m) \end{aligned}$$

porque f es tensa, y como ϕ es una inyección isométrica esto es

$$\begin{aligned} &= \frac{\varepsilon}{2} + d(\phi(x_m), \phi(x'_m)) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + d(\phi(x_m), x) + d(x, x') + d(x', \phi(x'_m)) \\ &< \varepsilon + d(x, x'). \end{aligned}$$

Vemos así que $d(\bar{f}(x), \bar{f}(x')) \leq \varepsilon + d(x, x')$ para todo $\varepsilon > 0$ y, por lo tanto, que $d(\bar{f}(x), \bar{f}(x')) \leq d(x, x')$. Esto muestra que la función $\bar{f}$ es tensa.

- Finalmente, mostremos que $\bar{f}$ es la única función continua $X^c \to Y$ tal que $\bar{f} \circ \phi = f$. Supongamos, para ello, que $g : X^c \to Y$ es otra función continua tal que $g \circ \phi = f$ y sea $x \in X^c$. Como $\phi(X)$ es denso en X^c, hay una sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ en X tal que $(\phi(x_n))_{n\geq 1}$ converge a x y la propiedad característica de la función $\bar{f}$ nos dice que $\bar{f}(x)$ es el límite de $(f(x_n))_{n\geq 1}$. Ahora bien, para todo $n \in \mathbb{N}$ es $f(x_n) = g(\phi(x_n))$, así que

$$\bar{f}(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} g(\phi(x_n)) = g\left(\lim_{n\to\infty} \phi(x_n)\right) = g(x),$$

porque la función g es continua y $(\phi(x_n))_{n\geq 1}$ converge a x. Esto muestra que f y g coinciden. $\square$

Un corolario importante de la proposición que acabamos de probar que es un espacio métrico admite, a menos de isometrías, a lo sumo una completación.

Proposición 4. *Sea X un espacio métrico. Si $\phi_1 : X \to X_1^c$ y $\phi_2 : X \to X_2^c$ son dos completaciones de X, entonces existe una y solamente una isometría $r : X_1^c \to X_2^c$ tal que conmuta el diagrama*

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "\phi_1"'] \arrow[dr, "\phi_2"] & \\ X_2^c \arrow[rr, "r"] & & X_1^c \end{tikzcd}$$

Demostración. Como la función $\phi_2 : X \to X_2^c$ es una inyección isométrica, se trata en particular de una función uniformemente continua y tensa: de acuerdo a la Proposición 3 y porque $\phi_1 : X \to X_1^c$ es una completaciones existe entonces una función continua $r : X_1^c \to X_2^c$ que es tensa y tal que $r \circ \phi_1 = \phi_2$. De manera similar, como la función $\phi_1 : X \to X_1^c$ es una inyección isométrica, es uniformemente continua y tensa, y porque $\phi_2 : X \to X_2^c$ es una completación, esa proposición nos dice que hay una función continua $s : X_2^c \to X_1^c$ que es tensa y tal que $s \circ \phi_2 = \phi_1$.

Si $x \in X$, entonces

$$(r \circ s)(\phi_2(x)) = r(s(\phi_2(x)) = r(\phi_1(x)) = \phi_2(x).$$

Esto nos dice que las dos funciones $\mathsf{id}_{X_2^c} : X_2^c \to X_2^c$ y $r \circ s : X_2^c \to X_2^c$ coinciden sobre el subespacio $\phi_2(X)$ de X_2^c. Como este subespacio es denso y las dos funciones son continuas, esto nos dice que, de hecho,

$$\mathsf{id}_{X_2^c} = r \circ s.$$

De manera simétrica, para cada $x \in X$ tenemos que

$$(s \circ r)(\phi_1(x)) = s(r(\phi_1(x)) = s(\phi_2(x)) = \phi_1(x),$$

así que las funciones continuas $\mathsf{id}_{X_1^c} : X_1^c \to X_1^c$ y $s \circ r : X_1^c \to X_1^c$ coinciden sobre el subconjunto denso $\phi_1(X)$ de X_c^1 y, por lo tanto,

$$\mathsf{id}_{X_1^c} = s \circ r.$$

Vemos de esta forma que las funciones r y s son mutuamente inversas y, en particular, r es una biyección. Más aún, como ambas funciones son tensas, cada vez que x y x' son puntos de X_1^c tenemos que

$$d(x, x') = d(s(r(x)), s(r(x')) \leq d(r(x), r(x')) \leq d(x, x'),$$

así que $d(r(x), r(x')) = d(x, x')$ y podemos concluir que r es una isometría.

Nos queda verificar la afirmación de unicidad que hace la proposición. Sea $r' : X_1^c \to X_2^c$ otra función continua tal que $r' \circ \phi_1 = \phi_2$. Como también $r \circ \phi_1 = \phi_2$, esto nos dice que r y r' coinciden sobre el subespacio $\phi_1(X)$ de X_c^1. Como este subespacio es denso, vemos que $r = r'$, como queremos. $\square$

Muchas veces queremos extender funciones que no son uniformemente continuas de un espacio métrico a su completación. En esa situación la Proposición 3 no se aplica directamente. La siguiente variante es muchas veces útil.

Proposición 5. *Sea X un espacio métrico y sea $\phi : X \to X^c$ una completación de X Si Y es un espacio métrico completo y $f : X \to Y$ es una función tal que existe un punto $x_0 \in X$ que satisface la condición de que*

> *para todo $R > 0$ la restricción $f|_{B_R(x_0)} : B_R(x_0) \to Y$ es uniformemente continua,*

entonces existe una y solo una función continua $\bar{f} : X \to Y$ tal que $f = \bar{f} \circ \phi$.

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$, escribamos $B_n \coloneqq B_n(x_0)$ y consideremos la restricción $f_n \coloneqq f|_{B_n} : B_n \to Y$. Como $\phi : X \to Y$ es una completación de X, la restricción

$$\phi_n \coloneqq \phi|_{B_n}^{\overline{\phi(B_n)}} : B_n \to \overline{\phi(B_n)}$$

es una completación de B_n. Como la función f_n es uniformemente continua, existe una y solo una función continua $\bar{f}_n : \overline{\phi(B_n)} \to Y$ tal que $f_n = \bar{f}_n \circ \phi_n$.

Sean ahora n y m dos elementos de $\mathbb{N}$ tales que $n \leq m$. Como $B_n \subseteq B_m$, tenemos que $\overline{\phi(B_n)} \subseteq \overline{\phi(B_m)}$ y podemos construir el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
B_n \arrow[r, "\phi_n"] \arrow[d, hook] \arrow[rr, bend left, "f_n"] & \overline{\phi(B_n)} \arrow[r, "\bar{f}_n"] \arrow[d, hook] \arrow[dr, phantom, "?"] & Y \arrow[d, equal] \\
B_m \arrow[r, "\phi_m"] \arrow[rr, bend right, "f_m"'] & \overline{\phi(B_m)} \arrow[r, "\bar{f}_m"] & Y
\end{tikzcd}$$

Todas las regiones del diagrama, incluida la exterior y salvo posiblemente la marcada con el signo de pregunta conmutan, y de esto se deduce que

$$f_n = \bar{f}_m|_{\overline{\phi(B_n)}} \circ \phi_n.$$

La propiedad de unicidad que caracteriza a $\bar{f}_n$ nos dice entonces que

$$\bar{f}_n = \bar{f}_m|_{\overline{\phi(B_n)}}. \tag{1}$$

Observemos que

$$B(\phi(x_0), n) \subseteq \overline{\phi(B_n)}. \tag{2}$$

En efecto, si $y \in B(\phi(x_0), n)$, hay una sucesión $(y_k)_{k\geq 1}$ en X tal que $(\phi(y_k))_{k\geq 1}$ converge a y. En particular,

$$\lim_{k\to\infty} d(y_k, x_0) = \lim_{k\to\infty} d(\phi(y_k), \phi(x_0)) = d(y, x_0) < n,$$

así que existe $K \in \mathbb{N}$ tal que $d(y_k, x_0) < n$ siempre que $k \geq K$. Así, la sucesión $(y_{K+k})_{k\geq 1}$ toma valores en B_n y, por lo tanto, el punto y, que es el límite de $(\phi(y_{K+k}))_{k\geq 1}$, es un elemento de $\overline{\phi(B_n)}$.

Usando ahora (1) y (2), es claro ahora que existe una función $\bar{f} : X^c \to Y$ tal que cada vez que $n \in \mathbb{N}$ y $x \in B_n(\phi(x_0))$ se tiene $\bar{f}(x) = \bar{f}_n(x)$. Esta función es continua porque el conjunto $\{B_n(\phi(x_0)) : n \in \mathbb{N}\}$ es un cubrimiento abierto de X^c y para todo $n \in \mathbb{N}$ la restricción

$$\bar{f}|_{B_n(\phi(x_0))} = \bar{f}_n|_{B_n(\phi(x_0))}$$

es continua, porque $\bar{f}_n$ lo es. Finamente, si $x \in X$ y $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \in B_n(x_0)$, entonces $\phi(x) \in B_n(\phi(x_0))$ y

$$\bar{f}(\phi(x)) = \bar{f}_n|_{B_n(\phi(x_0))}(\phi(x)) = \bar{f}_n(\phi(x)) = f(x).$$

Esto nos dice que $\bar{f} \circ \phi = f$. Fnalmente, si $g : X^c \to Y$ es otra función continua tal que $g \circ \phi = f$, entonces $f(x) = g(x)$ para todo $x \in \phi(X)$ y, como f y g son continuas y $\phi(X)$ es denso en X^c, es $f = g$. $\square$

Para terminar esta sección, queremos hacer la observación de que la propiedad universal de la completación de un espacio métrico X la caracteriza completamente (como siempre, a menos de una isometría) entre todas las funciones tensas con dominio X:

Proposición 6. *Sean X y X^c dos espacios métricos. Si $\phi : X \to X^c$ es una función tensa con la propiedad de que*

> *para todo espacio métrico Y y toda función tensa $f : X \to Y$ existe una y solo una función tensa $\bar{f} : X^c \to Y$ tal que $f = \bar{f} \circ \phi$,*

entonces ϕ es una completación.

Demostración. Sea $\phi : X \to X^c$ una función que tiene la propiedad del enunciado. Supongamos que $\phi(X)$ no es denso en X^c, de manera que existen $y \in X^c$ y $r > 0$ tal que $B_r(y) \cap \phi(X) = \varnothing$. Sean α, $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ las funciones tales que para cada $t \in \mathbb{R}$ es

$$\alpha(t) = 1, \qquad\qquad \beta(t) = \begin{cases} \dfrac{t}{r} & \text{si } |t| \leq r; \\ 1 & \text{si } |t| \geq r. \end{cases}$$

Es claro que se trata de funciones continuas, así que las funciones

$$f : x \in X^c \mapsto \alpha(d(y,x)) \in \mathbb{R}, \qquad\qquad g : x \in X^c \mapsto \beta(d(y,x)) \in \mathbb{R}$$

son continuas. La forma en que elegimos el número r implica que las composiciones $f \circ \phi$ y $g \circ \phi$ coinciden ambas con la función $h : X \to \mathbb{R}$ constante de valor 1. Como h es claramente tensa, existe por hipótesis exactamente una función continua $\bar{h} : X^c \to \mathbb{R}$ tal que $\bar{h} \circ \phi = h$. Pero, como dijimos, es $f \circ \phi = h$ y $g \circ \phi = h$, así que debe ser $f = g$: esto es absurdo, ya que $f(y) = \alpha(d(y,y)) = \alpha(0) = 1$, mientras que $g(y) = \beta(d(y,y)) = \beta(0) = 0$. Esta contradicción provino de haber supuesto que $\phi(X)$ no es denso en X^c, así que lo contrario tiene que ser cierto.

Para terminar, mostremos que ϕ es una inyección isométrica. Como es tensa, sabemos que cada vez que y e y' son elementos de X se tiene que

$$d(\phi(y), \phi(y')) \leq d(y, y').$$

Veamos que también que vale la desigualdad recíproca. Consideremos la función $g : x \in X \mapsto d(x,y) \in \mathbb{R}$. Como para todo x, $x' \in X$ se tiene que

$$|g(x) - g(x')| = |d(x,y) - d(x',y')| \leq d(x,x'),$$

la función g es tensa y existe, por lo tanto, una función tensa $\bar{g} : X^c \to \mathbb{R}$ tal que $\bar{g} \circ \phi = g$. En particular, tenemos que

$$\begin{aligned} d(\phi(y'), \phi(y)) &\geq d(\bar{g}(\phi(y')), \bar{g}(\phi(y)) = d(g(y'), g(y)) = |g(y') - g(y)| \\ &= d(y', y). \end{aligned}$$

Esto completa la demostración. □

2 Completaciones: existencia

Queremos mostrar ahora que todo espacio métrico admite una completación.

Sea X un espacio métrico y sea $\mathscr{C}(X)$ el conjunto de todas las sucesiones de Cauchy de X. Definimos una relación $\sim$ en $\mathscr{C}(X)$: si $x = (x_n)_{n\geq 1}$ e $y = (y_n)_{n\geq 1}$ son dos elementos de $\mathscr{C}(X)$, ponemos $x \sim y$ si y solamente si la sucesión $(d(x_n, y_n))_{n\geq 1}$ de números reales converge a 0.

Lema 7. *La relación $\sim$ sobre el conjunto $\mathscr{C}(X)$ es una relación de equivalencia.*

Demostración. Sea $x = (x_n)_{n\geq 1}$ un elemento de $\mathscr{C}(X)$. Como la sucesión $(d(x_n, x_n))_{n\geq 1}$ es idénticamente nula, converge a 0 y, por lo tanto, $x \sim x$.

Sean ahora $x = (x_n)_{n\geq 1}$ e $y = (y_n)_{n\geq 1}$ dos elementos de $\mathscr{C}(X)$ tales que $x \sim y$, de manera que la sucesión $(d(x_n, y_n))_{n\geq 1}$ converge a 0. Como esa sucesión coincide término a término con la sucesión $(d(y_n, x_n))_{n\geq 1}$, esta última también converge a cero y, por lo tanto, $y \sim x$.

Sean finalmente $x = (x_n)_{n\geq 1}$, $y = (y_n)_{n\geq 1}$ y $z = (z_n)_{n\geq 1}$ tres elementos de $\mathscr{C}(X)$ tales que $x \sim y$ e $y \sim z$, de manera que las sucesiones $(d(x_n, y_n))_{n\geq 1}$ y $(d(y_n, z_n))_{n\geq 1}$ convergen a 0. Como para todo $n \in \mathbb{N}$ es

$$0 \leq d(x_n, z_n) \leq d(x_n, y_n) + d(y_n, z_n)$$

y el miembro derecho de esta desigualdad converge a 0 cuando n crece, vemos que la sucesión $(d(x_n, z_n))_{n\geq 1}$ converge a 0 y, por lo tanto, que $x \sim z$. □

Lema 8. *Sea $x = (x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de Cauchy en X y sea $x' = (x_{n_k})_{k\geq 1}$ una subsucesión de x.*

(i) La subsucesión x' es de Cauchy y $x \sim x'$.

(ii) Si x' converge, entonces x converge y ambas sucesiones tienen el mismo límite.

Demostración. (i) Sea $\varepsilon > 0$. Como x es una sucesión de Cauchy, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para cada n y m en $\mathbb{N}$ tales que n, $m \geq N$ se tiene que $d(x_n, x_m) < \varepsilon$. Si ahora k y l son elementos de $\mathbb{N}$ tales que k, $l \geq N$, entonces es $n_k \geq k \geq N$

y $n_l \geq l \geq N$ y, por lo tanto, $d(x_{n_k}, x_{n_l}) < \varepsilon$. Esto muestra que x' es una sucesión de Cauchy.

Por otro lado, si $\varepsilon > 0$ y $N \in \mathbb{N}$ es tal que para cada n y m en $\mathbb{N}$ tales que n, $m \geq N$ se tiene que $d(x_n, x_m) < \varepsilon$, entonces $d(x_k, x_{n_k}) < \varepsilon/2$ para todo $k \in \mathbb{N}$ tal que $k \neq N$, ya que $n_k \geq k$, y esto significa que la sucesión $(d(x_k, x_{n_k}))_{k\geq 1}$ converge a 0, esto es, que $x \sim x'$.

(ii) Supongamos que la subsucesión x' converge a a. Sea $\varepsilon > 0$. Como x es de Cauchy, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para cada n y m en $\mathbb{N}$ tales que n, $m \geq N$ se tiene que $d(x_n, x_m) < \varepsilon/2$. Por otro lado, como x' converge a a, existe $K \in \mathbb{N}$ tal que $K \geq N$ y para cada $k \in \mathbb{N}$ con $k \geq K$ se tiene que $d(x_{n_k}, a) < \varepsilon/2$. Si ahora $n \in \mathbb{N}$ es tal que $n \geq K$, entonces

$$d(x_n, a) \leq d(x_n, x_{n_K}) + d(x_{n_K}, a) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

ya que $n \geq N$ y $n_K \geq K \geq N$. Esto muestra que la sucesión x converge a a. □

Como $\sim$ es una relación de equivalencia sobre el conjunto $\mathscr{C}(X)$, podemos considerar el conjunto cociente

$$X^c := \frac{\mathscr{C}(X)}{\sim},$$

cuyos elementos son las clases de equivalencia de la relación $\sim$ en $\mathscr{C}(X)$. Si x es un elemento de $\mathscr{C}(X)$, escribimos, como siempre, $[x]$ a la clase de equivalencia de x.

Lema 9.

(i) *Si $x = (x_n)_{n\geq 1}$, $y = (y_n)_{n\geq 1}$ son dos elementos de $\mathscr{C}(X)$, entonces la sucesión $(d(x_n, y_n))_{n\geq 1}$ converge y tiene límite no negativo.*

(ii) *Si $x = (x_n)_{n\geq 1}$, $y = (y_n)_{n\geq 1}$ $x' = (x'_n)_{n\geq 1}$ e $y' = (y'_n)_{n\geq 1}$ son cuatro elementos de $\mathscr{C}(X)$ tales que $x \sim x'$ e $y \sim y'$, entonces*

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} d(x'_n, y'_n).$$

Demostración. (i) Sean $x = (x_n)_{n\geq 1}$, $y = (y_n)_{n\geq 1}$ dos elementos de $\mathscr{C}(X)$. Es suficiente que mostremos que la sucesión $(d(x_n, y_n))_{n\geq 1}$ es de Cauchy, ya que el espacio métrico $\mathbb{R}$ es completo.

Sea $\varepsilon > 0$. Como x e y son sucesiones de Cauchy, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que cada vez que n, $m \geq N$ se tiene que $d(x_n, x_m) < \varepsilon/2$ y $d(y_n, y_m) < \varepsilon/2$. Sean ahora n y m dos elementos de $\mathbb{N}$ tales que n, $m \geq N$. Como

$$d(x_n, y_n) \leq d(x_n, x_m) + d(x_m, y_m) + d(y_m, y_n),$$

tenemos que

$$d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m) \leq d(x_n, x_m) + d(y_m, y_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Intercambiando los roles de x y de y, vemos que también es

$$-d(x_n, y_n) + d(x_m, y_m) < \varepsilon$$

y, por lo tanto, que

$$\big|d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m)\big| < \varepsilon.$$

Esto prueba que $(d(x_n, y_n))_{n\geq 1}$ es de Cauchy, como queríamos.

(ii) Sean $x = (x_n)_{n\geq 1}$, $y = (y_n)_{n\geq 1}$ $x' = (x'_n)_{n\geq 1}$ e $y' = (y'_n)_{n\geq 1}$ cuatro elementos de $\mathscr{C}(X)$ y supongamos que $x \sim x'$ e $y \sim y'$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$d(x_n, y_n) \leq d(x_n, x'_n) + d(x'_n, y'_n) + d(y'_n, y_n),$$

así que

$$d(x_n, y_n) - d(x'_n, y'_n) \leq d(x_n, x'_n) + d(y'_n, y_n).$$

De manera similar tenemos que

$$-d(x_n, y_n) + d(x'_n, y'_n) \leq d(x_n, x'_n) + d(y'_n, y_n),$$

así que

$$\big|d(x_n, y_n) - d(x'_n, y'_n)\big| \leq d(x_n, x'_n) + d(y'_n, y_n). \tag{3}$$

Como $x \sim x'$ e $y \sim y'$, las sucesiones $(d(x_n, x'_n))_{n\geq 1}$ y $(d(y_n, y'_n))_{n\geq 1}$ convergen a 0: esto implica que el miembro derecho de la desigualdad (3) converge a 0 cuando n crece, así que el izquierdo también lo hace. Esto implica que

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} d(x'_n, y'_n),$$

que es lo que queríamos probar. □

Gracias al lema que acabamos de probar podemos hacer del conjunto X^c un espacio métrico:

Proposición 10. *Hay una función $d^c : X^c \times X^c \to [0, +\infty)$ tal que cada vez que ξ y ζ son elementos de X^c y $x = (x_n)_{n\geq 1}$ e $y = (y_n)_{n\geq 1}$ son elementos de ξ y de ζ, respectivamente, se tiene que*

$$d^c(\xi, \zeta) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n).$$

Esta función d^c es una métrica.

Demostración. Que existe una función $d^c : X^c \times X^c \to \mathbb{R}$ con la propiedad descripta en la proposición es consecuencia inmediata de la segunda parte del Lema 9. Mostremos que se trata de una métrica.

- Si $\xi \in X^c$ y $x = (x_n)_{n\geq 1} \in \xi$, entonces
$$d^c(\xi, \xi) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, x_n) = 0.$$
- Supongamos que ξ y ζ son dos elementos de X^c tales que $d^c(\xi, \zeta) = 0$. Sea $x = (x_n)_{n\geq 1}$ un elemento de ξ y sea $y = (y_n)_{n\geq 1}$ un elemento de ζ. Tenemos entonces que
$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = d^c(\xi, \zeta) = 0$$
y, por lo tanto, que $x \sim y$: esto implica que $\xi = \zeta$.
- Si ξ y ζ son dos elementos de X^c y $x = (x_n)_{n\geq 1}$ es un elemento de ξ y $y = (y_n)_{n\geq 1}$ uno de ζ, entonces
$$d^c(\xi, \zeta) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} d(y_n, x_n) = d^c(\zeta, \xi).$$
- Sean finalmente ξ, ζ y ϱ tres elementos de X^c y sean $x = (x_n)_{n\geq 1}$, $y = (y_n)_{n\geq 1}$ y $z = (x_n)_{n\geq 1}$ elementos de ξ, ζ y ϱ, respectivamente. Para todo $n \in \mathbb{N}$ es $d(x_n, z_n) \leq d(x_n, y_n) + d(y_n, z_n)$, así que
$$\begin{aligned} d^c(\xi, \varrho) &= \lim_{n\to\infty} d(x_n, z_n) \leq \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) + \lim_{n\to\infty} d(y_n, z_n) \\ &= d^c(\xi, \zeta) + d^c(\zeta, \varrho). \end{aligned}$$
□

El siguiente paso es mostrar que el espacio métrico (X^c, d^c) que construimos es completo. Usaremos para ello la siguiente condición suficiente para la completitud:

Proposición 11. *Sea Z un espacio métrico y sea A un subconjunto denso de Z. Si toda sucesión de Cauchy con valores en A converge en Z, entonces Z es completo.*

Demostración. Supongamos que toda sucesión de Cauchy con valores en A converge en Z y sea $(z_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de Cauchy en Z. Como A es denso en Z, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $a_n \in A$ tal que $d(a_n, z_n) < 1/n$. Mostremos que la sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$, que toma valores en A, es de Cauchy.

Sea $\varepsilon > 0$. Como la sucesión $(z_n)_{n\geq 1}$ es de Cauchy, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que cada vez que n y m son elementos de $\mathbb{N}$ se tiene que
$$n, m \geq N \implies d(z_n, z_m) < \varepsilon/3.$$

Por otro lado, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $1/M < \varepsilon/3$. Si ahora n y m son dos elementos de $\mathbb{N}$ tales que n, $m \geq \max\{N, M\}$, entonces

$$d(a_n, a_m) \leq d(a_n, z_n) + d(z_n, z_m) + d(z_m, a_m) < \frac{1}{n} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{1}{m} < \varepsilon.$$

Ahora bien, como la sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$ es de Cauchy y toma valores en A, nuestra hipótesis nos dice que existe $z \in Z$ al que $(a_n)_{n\geq 1}$ converge a z. Mostremos que la sucesión $(z_n)_{n\geq 1}$ con la que empezamos también converge a z.

Sea $\varepsilon > 0$. Como $(a_n)_{n\geq 1}$ converge a z, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(a_n, z) < \varepsilon/2$ para todo $n \geq N$. Por otro lado, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $1/M < \varepsilon/2$. Si ahora n es un elemento de $\mathbb{N}$ tal que $n \geq \max\{N, M\}$, entonces tenemos que

$$d(z_n, z) \leq d(z_n, a_n) + d(a_n, z) < \frac{1}{n} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Esto muestra que la sucesión $(z_n)_{n\geq 1}$ tiene límite en Z y, en definitiva, que Z es un espacio métrico completo. □

Si $x \in X$, entonces podemos considerar la sucesión constante $\hat{x} = (x_n)_{n\geq 1}$ con $x_n = x$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se trata evidentemente de una sucesión de Cauchy en X, esto es, de un elemento de $\mathscr{C}(X)$, y, por lo tanto, podemos considerar su clase de equivalencia $[\hat{x}]$ en X^c. Obtenemos de esta forma una función

$$\phi : x \in X \mapsto [\hat{x}] \in X^c.$$

Proposición 12. *La función $\phi : X \to X^c$ es una completación.*

Demostración. Tenemos que probar que la función ϕ es una inyección isométrica, que su imagen $\phi(X)$ es densa en X^c y que X^c es un espacio métrico completo.

Si x e y son dos puntos de X, las sucesiones constantes $\hat{x} = (x_n)_{n\geq 1}$ e $\hat{y} = (y_n)_{n\geq 1}$ claramente tienen $d(x_n, y_n) = d(x, y)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, así que

$$d(\phi(x), \phi(y)) = d([\hat{x}], [\hat{y}]) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = d(x, y).$$

Esto nos dice que la función ϕ es una inyección isométrica.

Sea ahora ξ un elemento de X^c y sea $x = (x_n)_{n\geq 1}$ un elemento de ξ. Sea $\varepsilon > 0$. Como x es una sucesión de Cauchy, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que cada vez que n y m son elementos de $\mathbb{N}$ tales que n, $m \geq N$ se tiene que $d(x_n, x_m) < \varepsilon/2$. Sea ahora n es un elemento de $\mathbb{N}$ tal que $n \geq N$: tenemos que $d(x_m, x_n) < \varepsilon/2$ para todo $m \geq N$ y, por lo tanto, que

$$d(\xi, \phi(x_n)) = \lim_{m\to\infty} d(x_m, x_n) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Esto prueba que la sucesión $(\phi(x_n))_{n\geq 1}$ converge a ξ. Como esa sucesión tiene valores en $\phi(X)$, concluimos de esta forma que $\phi(X)$ es un subconjunto denso del espacio X^c.

Hecho esto, para probar que X^c es un espacio métrico completo es suficiente, de acuerdo a la Proposición 11, con mostrar que toda sucesión de Cauchy en $\phi(X)$ posee un límite en X^c.

Sea $(\xi_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de Cauchy en $\phi(X)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ existe entonces un punto x_n en X tal que $\xi_n = \phi(x_n)$. Como la función ϕ es una inyección isométrica, es evidente que la sucesión $x = (x_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy en X: se trata entonces de un elemento de $\mathscr{C}(X)$ y podemos considerar su clase $\xi \coloneqq [x]$ en X^c. Mostremos que la sucesión $(\xi_n)_{n\geq 1}$ converge a ξ.

Sea $\varepsilon > 0$. Como la sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ es de Cauchy, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que cada vez que n y m son elementos de $\mathbb{N}$ tales que n, $m \geq N$ se tiene que $d(x_n, x_m) < \varepsilon/2$. En particular, para cada $m \geq N$ se tiene que $d(x_n, x_m) < \varepsilon/2$ para todo $n \geq N$ y entonces

$$d(\xi, \xi_m) = d(\xi, \phi(x_m)) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, x_m) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Esto completa la prueba. □

3 Completaciones: existencia, *bis*

Sea X un espacio métrico. Queremos construir otra vez una completación de X, pero ahora usando un método distinto. Si X es vacío, esto es inmediato, así que podemos suponer en lo que resta de esta sección que $X \neq \varnothing$. Sea $B(X)$ el conjunto de todas las funciones $X \to \mathbb{R}$ que son acotadas. Consideramos a $B(X)$ como un espacio métrico con respecto a la métrica uniforme d_∞, que tiene

$$d_\infty(f, g) = \sup_{x\in X} |f(x) - g(x)|$$

cada vez que f y g son elementos de $B(X)$.

Lema 13. *El espacio métrico $B(X)$ es completo.*

Demostración. Sea $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de Cauchy en $B(X)$.

Si $x \in X$ y $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n, m \geq N \implies d_\infty(f_n, f_m) < \varepsilon$$

y, por lo tanto, si n, $m \geq N$ se tiene que

$$|f_n(x) - f_n(y)| \leq \sup_{y\in X} |f_n(y) - f_m(y)| = d_\infty(f_n, f_m) < \varepsilon.$$

Esto muestra que la sucesión $(f_n(x))_{n\geq 1}$ en $\mathbb{R}$ es de Cauchy: podemos, por lo tanto, considerar su límite. Obtenemos de esta manera una función

$$f : x \in X \mapsto \lim_{n\to\infty} f_n(x) \in \mathbb{R}.$$

Esta función es acotada. En efecto, como la sucesión $(f_n)_{n\geq 1}$ es de Cauchy, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n, m \geq N \implies d_\infty(f_n, f_m) < 1,$$

y esto implica que para cada $x \in X$ es

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x)| = \left|\lim_{n\to\infty} f_n(x) - f_N(x)\right| + |f_N(x)| \\ &= \lim_{n\to\infty} |f_n(x) - f_N(x))| + |f_N(x)| \leq \lim_{n\to\infty} d_\infty(f_n, f_N) + |f_N(x)| \\ &\leq 1 + |f_N(x)| \leq 1 + \sup_{y\in X} |f_N(y)|. \end{aligned}$$

Vemos así que la función f es acotada, como dijimos, y, por lo tanto, que se trata de un elemento de $B(X)$.

Para terminar, mostremos que la sucesión $(f_n)_{n\geq 1}$ con la que empezamos converge a f en $B(X)$. Sea $\varepsilon > 0$. Como $(f_n)_{n\geq 1}$ es de Cauchy, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n, m \geq N \implies d_\infty(f_n, f_m) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sea n un elemento de $\mathbb{N}$ tal que $n \geq N$. Para cada $x \in X$ es

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq d_\infty(f_n, f_m) < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{para todo } m \geq N,$$

así que

$$|f_n(x) - f(x)| = \lim_{m\to\infty} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

y, por lo tanto,

$$d_\infty(f_n, f) = \sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Esto prueba, como queríamos, que la sucesión $(f_n)_{n\geq 1}$ converge a f. $\square$

Como nuestro espacio X no es vacío, podemos fijar un punto x_0 en X. Si $x \in X$, podemos considerar la función

$$f_x : y \in X \mapsto d(y, x) - d(y, x_0) \in \mathbb{R}.$$

Esta función es acotada: en efecto, para todo $y \in X$ es

$$|f_x(y)| = |d(y,x) - d(y,x_0)| \leq d(x,x_0).$$

Tenemos entonces una función

$$\psi : x \in X \mapsto f_x \in B(X).$$

Proposición 14. *Sea $X^c \coloneqq \overline{\psi(X)}$, que es un subespacio de $B(X)$. La correstricción $\phi \coloneqq \psi|^{X^c} : X \to X^c$ es una completación.*

Demostración. Es claro que X^c es un espacio métrico completo, ya que es un cerrado del espacio métrico completo $B(X)$, y es claro que la imagen $\phi(X)$ de ϕ es densa en X^c. Para probar la proposición, entonces, es suficiente que mostremos que ϕ es una inyección isométrica.

Sean x y x' dos puntos de X. Por un lado, tenemos que

$$\begin{aligned}
|\phi(x)(x) - \phi(x')(x)| &= |f_x(x) - f_{x'}(x)| \\
&= \big|(d(x,x) - d(x,x_0)) - (d(x,x') - d(x,x_0))\big| \\
&= d(x,x'),
\end{aligned}$$

así que

$$\begin{aligned}
d_\infty(\phi(x),\phi(x')) &= \sup_{y\in X}|\phi(x)(y) - \phi(x')(y)| \geq |\phi(x)(x) - \phi(x')(x)| \\
&\geq d(x,x').
\end{aligned}$$

Por otro, si $y \in X$, entonces

$$\begin{aligned}
|\phi(x)(y) - \phi(x')(y)| &= \big|(d(y,x) - d(y,x_0)) - (d(y,x') - d(y,x_0))\big| \\
&= \big|d(y,x) - d(y,x')\big| \\
&\leq d(x,x').
\end{aligned}$$

Juntando las dos desigualdades, vemos que

$$d(\phi(x),\phi(x')) = d(x,x')$$

que es lo que queríamos probar. $\square$