Ejercicios

1. (a) Las curvas $Z(xy-1)$ y $Z(y-x^2)$ de $\mathbb{A}^2$ no son isomorfas.
   (b) Si $f \in \Bbbk[x,y]$ es un polinomio irreducible de grado 2, entonces $Z(f)$ es una variedad afín isomorfa a alguna de las dos de la primera parte.
2. Muestre que $Z(x^2 - yx, xz - x) \subseteq \mathbb{A}^3$ tiene tres componentes irreducibles y encuentre los ideales primos correspondientes a cada una.
3. El conjunto $Y = \{(t^3, t^4, t^5) \in \mathbb{A}^3 : t \in \Bbbk\}$ es un cerrado irreducible de $\mathbb{A}^3$. Encuentre el ideal $I(Y)$ y muestre que no puede ser generado por dos elementos.
4. Un abierto de $\mathbb{A}^1$ no es isomorfo a $\mathbb{A}^1$.
5. Un morfismo de variedades afines que es un homeomorfismo no es necesariamente un isomorfismo:
   (a) La función $t \in \mathbb{A}^1 \mapsto (t^2, t^3) \in Z(x^3 - y^2) \subseteq \mathbb{A}^2$ es un morfismo bicontinuo pero no un isomorfismo.
   (b) Si $\Bbbk$ tiene característica positiva p, entonces la función $t \in \mathbb{A}^1 \mapsto t^1 \in \mathbb{A}^1$ es un morfismo bicontinuo pero no un isomorfismo.
6. Si $X \subseteq \mathbb{A}^n$ es un conjunto *finito*, entonces $I(X)$ puede generarse con n elementos.
7. El ideal de $Z(x,y) \cup Z(z,w) \subseteq \mathbb{A}^4$ no puede ser generado con dos elementos (ni tampoco con tres!)
8. (a) Sean a y b dos enteros positivos. Muestre que la imagen de la función
   $$t \in \Bbbk \mapsto (t^a, t^b) \in \mathbb{A}^2$$
   es un cerrado irreducible y encuentre el ideal que lo define.
   (b) La imagen de la función
   $$t \in \Bbbk \mapsto (t^2 - 1, (t^1 - 1)) \in \mathbb{A}^2$$
   tiene como imagen un cerrado irreducible de $\mathbb{A}^2$ de dimensión 1.

9. Sea $\phi : X \to Y$ un morfismo de variedades quasi-afines.

   (a) Si $p \in Y$, entonces ϕ induce un morfismo $\phi_p^* : \mathcal{O}_{\phi(p),Y} \to \mathcal{O}_{p,X}$ de anillos locales que preserva los ideales maximales, esto es, tal que $\phi_+^*(\mathfrak{m}_{\phi(o)}) = \mathfrak{m}_p$.
   (b) Si ϕ tiene imagen densa en Y, entonces este morfismo ϕ_p^* es inyectivo.

10. Sea X una variedad quasi-afín y $p \in X$. Hay una correspondencia biyectiva entre el conjunto de los ideales primos del anillo local $\mathcal{O}_{p,X}$ de p en X y el conjunto de las subvariedades cerradas de X que contienen a p.

11. Un grupo afín es una variedad afín G y un morfismo $\mu : G \times G \to G$ que hace de G un grupo de manera tal que la función $\iota : g \in G \mapsto g^{-1} \in G$ también es un morfismo.

   (a) El grupo aditivo $G = \Bbbk$, con la operación de suma, es un grupo afín.
   (b) El grupo multiplicativo $G = \Bbbk^\times$ de $\Bbbk$, visto como un abierto de $\mathbb{A}^1$, es un grupo afín.
   (c) El grupo $\mathsf{GL}_n(\Bbbk)$ de las matrices inversibles con entradas en $\Bbbk$ es un grupo afín.
   (d) El grupo $\mathsf{SL}_n(\Bbbk)$ de las matrices de determinante 1 con entradas en $\Bbbk$ es un grupo afín.
   (e) Si G y H son dos grupos afines, entonces un morfismo de grupos afines $\phi : G \to H$ es un morfismo de grupos que es a la vez un morfismo de variedades. Encuentre todos los morfismos de grupos afines $\Bbbk \to \Bbbk$, $\Bbbk \to \Bbbk^\times$, $\Bbbk^\times \to \Bbbk$ y $\Bbbk^\times \to \Bbbk^\times$.

12. Sea G un grupo afín, con multiplicación $\mu : G \times G \to G$ e inversión $\iota : G \to G$. Los morfismos μ e ι inducen morfismos de álgebras $\Delta = \mu^* : \mathcal{O}(G) \to \mathcal{O}(G) \otimes \mathcal{O}(G)$ y $S : \mathcal{O}(G) \to \mathcal{O}(G)$. Por otro lado, si 1_G es el elemento neutro de G y vemos a $\{1_G\}$ como una variedad afín de la manera evidente — así que en particular $\mathcal{O}(\{1_G\}) = \Bbbk$ — entonces la inclusión $\{1_G\} \to G$ induce un morfismo de álgebras $\varepsilon : \mathcal{O}(G) \to \Bbbk$.

    Averigüe qué es un ***álgebra de Hopf*** y muestre que $(\mathcal{O}(G), \Delta, \varepsilon, S)$ es un álgebra de Hopf.

13. (a) Pruebe que si X e Y son variedades quasi-afines contenidas en $\mathbb{A}^n$ y $\mathbb{A}^m$, entonces el subconjunto $X \times Y$ de $\mathbb{A}^{n+m}$ es una subvariedad quasi-afín y las proyecciones $\pi_1 : X \times Y \to X$ y $\pi_2 : X \times Y \to Y$ son morfismos.

(b) Más aún, de esta manera obtenemos un producto para X e Y en la categoría de las variedades quasi-afines: cada vez que $\phi : Z \to X$ y $\psi : Z \to Y$ son morfismos con dominio en una variedad quasi-afín Z, existe un morfismo $h : Z \to X \times Y$ y uno solo tal que $\pi_1 \circ h = \phi$ y $\pi_2 \circ h = \psi$.

14. (a) Lea los capítulos 2 y 3 del libro *Ideals, Varieties and Algorithms* de D. Cox, J. Little y D. O'Shea.

    (b) Si f y g son dos elementos de $\Bbbk[x]$ no simultáneamente constantes, entonces la imagen de la función

    $$t \in \Bbbk \mapsto (f(t), g(t)) \in \mathbb{A}^2$$

    es un cerrado irreducible.

    (c) Aprenda a usar el programa *Macaulay2* lo suficiente como para poder resolver en la práctica la parte 2 de este ejercicio.

15. (a) Traduzca, usando la correspondencia entre cerrados de $\mathbb{A}^n$ y los ideales radicales de $\Bbbk[x_1, \dots, x_n]$, el teorema que afirma que todo cerrado de $\mathbb{A}^n$ es unión finita irredundante de cerrados irreducibles de manera única.

    (b) En un libro de álgebra conmutativa — como el de Atiyah–Macdonald el de Eisenbud, o el de D. Cox *et al.* mencionado arriba — lea el teorema de descomposición primaria de ideales de un anillo conmutativo noetheriano.

    (c) Aprenda a usar *Macaulay2* para calcular la descomposición primaria de un ideal de un anillo de polinomios.

16. (a) Sea G un grupo cíclico de orden primo p, sea $\gamma \in G$ un generador y sea $\omega \in \mathbb{C}$ una raíz p-ésima primitiva de la unidad. El grupo G actúa sobre $\mathbb{A}^2$ de manera tal que

    $$\gamma \cdot (x, y) = (\omega x, \omega y)$$

    para cada punto $(x, y) \in \mathbb{A}^2$. Determine el álgebra de invariantes $\mathcal{O}(\mathbb{A}^2)^G$, escríbala explícitamente como un cociente de un álgebra de polinomios y la variedad cociente $\mathbb{A}^2/G$. Considere primero valores pequeños de n para 'adivinar' cual es el resultado general.

    (b) Sea $D = \langle r, s : r^n, s^2, srsr \rangle$ el grupo diedral de orden $2n$ y sea $\omega \in \mathbb{C}$ otra vez una raíz n-ésima primitiva de la unidad. Hay una acción de D sobre $\mathbb{A}^2$ tal que

    $$r \cdot (x, y) = (\omega x, \omega^{-1} y), \qquad s \cdot (x, y) = (y, x)$$

    para cada $(x, y) \in \mathbb{A}^2$. Describa explícitamente el cociente $\mathbb{A}^2/D$.