# Variedades algebraicas

Mariano Suárez-Álvarez

31 de agosto, 2015

# 1. Variedades afines

## §1.1. Funciones polinomiales

**1.1.1.** Fijemos un cuerpo $\Bbbk$. Todos los espacios vectoriales que consideremos desde ahora serán sobre $\Bbbk$ y todas las álgebras serán $\Bbbk$-álgebras y conmutativas.

**1.1.2.** Sea $V$ un espacio vectorial sobre $\Bbbk$ de dimensión finita, sea $n = \dim V$ y sean $\mathscr{B} = (v_1, \dots, v_n)$ una base de $V$ y $\mathscr{B}^* = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ la correspondiente base dual del espacio dual $V^*$.

**Proposición.** *Si $v \in V$, entonces existe exactamente un morfismo de álgebras*

$$\phi_{\mathscr{B},v} : \Bbbk[x_1, \dots, x_n] \to \Bbbk$$

*tal que $\phi_{\mathscr{B},v}(x_i) = \xi_i(v)$ para cada $i \in [\![n]\!]$.*

Observemos que este morfismo $\phi_{\mathscr{B},v}$ manda un polinomio $f \in \Bbbk[x_1, \dots, x_n]$ al resultado de evaluar $f$ con $x_1, \dots, x_n$ iguales a $\xi_1(v), \dots, \xi_n(v)$, esto es, iguales a las coordenadas del vector $v$ con respecto a la base $\mathscr{B}$.

*Demostración.* Esto es consecuencia inmediata de la propiedad universal del álgebra de polinomios $\Bbbk[x_1, \dots, x_n]$. □

**1.1.3.** Sea $\Bbbk^V$ el álgebra de todas las funciones $V \to \Bbbk$, con sus operaciones usuales de suma, multiplicación por escalares de $\Bbbk$ y producto calculadas punto a punto.

**Proposición.** (*i*) *Hay un morfismo de álgebras*

$$\hat{\Phi}_{\mathscr{B}} : \Bbbk[x_1, \dots, x_n] \to \Bbbk^V$$

*tal que $\hat{\Phi}_{\mathscr{B}}(f)(v) = \phi_{\mathscr{B},v}(f)$ para cada $f \in \Bbbk[x_1, \dots, x_n]$ y cada $v \in V$.*

(*ii*) *La imagen del morfismo $\hat{\Phi}_{\mathscr{B}}$ no depende de la base $\mathscr{B}$.*

*Demostración.* (*i*) Para cada $i \in [\![n]\!]$ tenemos la función $\phi_i : v \in V \mapsto \phi_{\mathscr{B},v}(x_i) \in \Bbbk$, que es un elemento de $\Bbbk^V$, y entonces la propiedad universal del álgebra de polinomios hay exactamente un morfismo $\hat{\Phi}_{\mathscr{B}} : \Bbbk[x_1, \dots, x_n] \to \Bbbk^B$ tal que $\hat{\Phi}_{\mathscr{B}}(x_i) = \phi_i$ y este morfismo satisface la condición del enunciado.

(*ii*) Supongamos que $\mathscr{B}' = (v'_1, \dots, v'_n)$ es otra base ordenada del espacio vectorial $V$ y sea $\mathscr{B}'^* = (\xi'_1, \dots, \xi'_n)$ la correspondiente base dual. Existe una matriz inversible $(a_{i,j}) \in \mathsf{GL}_n(\Bbbk)$ tal que $v_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j} v'_j$ y $\xi'_k = \sum_{i=1}^n a_{i,k} \xi_i$ para cada $i \in [\![n]\!]$. Hay un isomorfismo de álgebras $\alpha : \Bbbk[x_1, \dots, x_n] \to \Bbbk[x_1, \dots, x_n]$ tal que $\alpha(x_i) = \sum_{j=1}^n a_{j,i} x_j$ para cada $i \in [\![n]\!]$. El diagrama

$$\begin{tikzcd}
\Bbbk[x_1,\dots,x_n] \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "\hat\Phi_{\mathscr{B}'}"'] & & \Bbbk[x_1,\dots,x_n] \arrow[dl, "\hat\Phi_{\mathscr{B}}"] \\
& V^{\Bbbk} &
\end{tikzcd} \tag{1}$$

conmuta: si $i \in [\![n]\!]$, para cada $v \in V$ es

$$\begin{aligned}
\hat\Phi_{\mathscr{B}'}(\alpha(x_i))(v) = \hat\Phi_{\mathscr{B}'}\left(\sum_{j=1}^n a_{j,i}x_j\right)(v) = \sum_{j=1}^n a_{j,i}\hat\Phi_{\mathscr{B}'}(x_j)(v) = \sum_{j=1}^n a_{j,i}\xi'_j(v) \\
= \xi_i(v) = \hat\Phi_{\mathscr{B}}(x_i)(v),
\end{aligned}$$

de manera que $(\hat\Phi_{\mathscr{B}'} \circ \alpha)(x_i) = \hat\Phi_{\mathscr{B}'}(x_i)$. Como esto pasa cualquiera sea $i \in [\![n]\!]$, vemos que $\hat\Phi_{\mathscr{B}'} \circ \alpha$ y $\hat\Phi_{\mathscr{B}}$, que son morfismos de álgebras, toman los mismos valores en $x_1, \dots, x_n$ y, por lo tanto, coinciden en todo su dominio.

En vista de la conmutatividad del diagrama (1) es claro que los dos morfismos $\hat\Phi_{\mathscr{B}}$ y $\hat\Phi_{\mathscr{B}'}$ tienen la misma imagen, y esto es lo que afirma el enunciado. □

**1.1.4.** Decimos que una función $V \to \Bbbk$ es ***polinomial*** si está en la imagen del morfismo $\hat\Phi_{\mathscr{B}}$ para alguna base $\mathscr{B}$ de $V$; de acuerdo a la segunda parte de la proposición que acabamos de probar, esta condición no depende de la base $\mathscr{B}$ elegida. Escribimos

$$\Bbbk[V]$$

al subconjunto de $\Bbbk^V$ de las funciones polinomiales y

$$\Phi_{\mathscr{B}} : \Bbbk[x_1,\dots,x_n] \to \Bbbk[V]$$

a la correstricción de $\hat\Phi_{\mathscr{B}}$ a $\Bbbk[V]$. Como es la imagen de la función $\hat\Phi_{\mathscr{B}}$, que es un morfismo de álgebras, es claro que $\Bbbk[V]$ es una subálgebra de $\Bbbk^V$.

Las funciones $V \to \Bbbk$ que son constantes son polinomiales: se trata de las imágenes de los polinomios constantes por el morfismo $\hat\Phi_{\mathscr{B}}$. Por otro lado, el espacio dual $V^*$ de $V$ está contenido en $\Bbbk[V]$. En efecto, si $\xi : V \to \Bbbk$ es una función lineal, existen escalares $a_1, \dots, a_n$ tales que $\xi = \sum_{i=1}^n a_i\xi_i$ y entonces para cada $v \in V$ se tiene que

$$\hat\Phi_{\mathscr{B}}\left(\sum_{i=1}^n a_ix_i\right)(v) = \sum_{i=1}^n a_i\hat\Phi_{\mathscr{B}}(x_i)(v) = \sum_{i=1}^n a_i\xi_i(v) = \xi(v),$$

de manera que $\xi = \hat\Phi_{\mathscr{B}}(\sum_{i=1}^n a_ix_i) \in \Bbbk[V]$. De hecho, podemos describir el álgebra de las funciones polinomiales de una manera muy sencilla gracias a esta observación:

**Proposición.** *El álgebra $\Bbbk[V]$ es la subálgebra de $\Bbbk^V$ generada por $V^*$.*

Las funciones $V \to \Bbbk$ que están en $V^*$ son precisamente las funciones que son funciones coordenadas con respecto a alguna base de $V$: es por esto y la proposición que llamamos a $\Bbbk[V]$ el ***álgebra de funciones coordenadas*** de $V$.

*Demostración.* Acabamos de mostrar que $V^* \subseteq \Bbbk[V]$, así que $\Bbbk[V]$ contiene a la subálgebra de $\Bbbk^V$ generada por $V^*$. Por otro lado, como $x_1, \dots, x_n$ generan a $\Bbbk[x_1, \dots, x_n]$ como álgebra, sus imágenes por $\hat{\Phi}_{\mathscr{B}}$ generan a $\Bbbk[V]$ como álgebra: esas imágenes son precisamente las funciones $\xi_1, \dots, \xi_n$, que están en $V^*$, y esto implica que $\Bbbk[V]$ está contenida en la subálgebra de $\Bbbk^V$ generada por $V^*$. □

**1.1.5.** Las funciones lineales entre espacios vectoriales preservan a las funciones polinomiales en el siguiente sentido:

**Proposición.** *Sea $\alpha : V \to W$ una función lineal afín entre espacios vectoriales, de manera que existe una función lineal $\alpha_0 : V \to W$ y un elemento $w_0 \in W$ tal que $\alpha(v) = \alpha_0(v) + w_0$ para cada $v \in V$.*

(*i*) *Si $f \in \Bbbk[W]$, entonces $f \circ \alpha \in \Bbbk[V]$.*

(*ii*) *La función*

$$\alpha^* : f \in \Bbbk[W] \longmapsto f \circ \alpha \in \Bbbk[V]$$

*es un morfismo de álgebras.*

*Demostración.* Sean $n = \dim B$ y $m = \dim W$, sean $\mathscr{B} = (v_1, \dots, v_n)$ y $\mathscr{B}' = (w_1, \dots, w_m)$ bases ordenadas de $V$ y de $W$, y sean $\mathscr{B}^* = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ y $\mathscr{B}'^* = (\zeta_1, \dots, \zeta_m)$ las correspondientes bases duales de $V^*$ y de $W^*$.

Si $f$ y $g$ son elementos de $\Bbbk[W]$ y $\lambda$ uno de $\Bbbk$, entonces

$$(f+g) \circ \alpha = f \circ \alpha + g \circ \alpha,$$
$$(f \cdot g) \circ \alpha = f \circ \alpha \cdot g \circ \alpha,$$

y

$$(\lambda f) \circ \alpha = \lambda f \circ \alpha.$$

Como las funciones $\zeta_1, \dots, \zeta_m$ generan el álgebra $\Bbbk[W]$, se sigue de esto que para probar la afirmación (*i*) del enunciado es suficiente con que mostremos que $\zeta_i \circ \alpha \in \Bbbk[V]$ para cada $i \in [\![m]\!]$. Ahora bien, si $i \in [\![m]\!]$, entonces $\zeta_i \circ \alpha = \zeta_i \circ \alpha_0 + c$, con $c$ la función constante sobre $V$ de valor $\zeta_i(w_0)$: como $\zeta_i \circ \alpha_0$ es un elemento de $V^*$, pertenece a $\Bbbk[V]$, y como por supuesto $c$ también, vemos que $\zeta_i \circ \alpha \in \Bbbk[V]$, como queríamos.

Para probar (*ii*) es suficiente que observemos que la función

$$f \in \Bbbk^W \longmapsto f \circ \alpha \in \Bbbk^V,$$

es un morfismo de álgebras y que, de acuerdo a la parte (*i*), de acuerdo a la parte (*i*) manda $\Bbbk[W]$ a $\Bbbk[V]$ y, por lo tanto, se restringe a un morfismo de álgebras $\Bbbk[W] \to \Bbbk[V]$: esta restricción es precisamente la función $\alpha^*$ del enunciado. □

**1.1.6.** Supongamos por un momento que el cuerpo $\Bbbk$ es finito. El álgebra $\Bbbk^V$ es finita —ya que como $V$ y $\Bbbk$ son conjuntos finitos hay un número finito de funciones $V \to \Bbbk$— y, por lo tanto, también es finita su subálgebra $\Bbbk[V]$.

- Si $n > 0$, entonces el álgebra de polinomios $\Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$ es infinita: vemos así que en este caso el morfismo $\Phi_{\mathscr{B}} : \Bbbk[x_1, \ldots, x_n] \to \Bbbk[V]$ no es inyectivo.
- Si, en cambio, $n = 0$, entonces $V$ posee exactamente un elemento, su cero, y el álgebra $\Bbbk^V$ se identifica con $\Bbbk$ de manera evidente. Por otro lado, el álgebra de polinomios $\Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$ también se identifica con $\Bbbk$ y el morfismo $\Phi_{\mathscr{B}} : \Bbbk[x_1, \ldots, x_n] \to \Bbbk[V]$ es un isomorfismo.

Para nuestros objetivos, es más interesante lo que ocurre cuando el cuerpo $\Bbbk$ es infinito:

**Proposición.** *Si el cuerpo $\Bbbk$ es infinito, entonces el morfismo $\Phi_{\mathscr{B}} : \Bbbk[x_1, \ldots, x_n] \to \Bbbk[V]$ es un isomorfismo de álgebras.*

*Demostración.* Procedemos por inducción con respecto a $n$, notando que cuando $n = 0$ la veracidad del enunciado es evidente.

Supongamos que $n = 1$ y sea $f \in \Bbbk[x_1]$ tal que $\Phi_{\mathscr{B}}(f) = 0$. Si $\lambda \in \Bbbk$, entonces esto nos dice que

$$0 = \Phi_{\mathscr{B}}(f)(\lambda v_1) = \phi_{\mathscr{B}, \lambda v_1}(f)$$

y, como $\xi_1(\lambda v_1) = \lambda$, el último miembro de esta cadena de igualdades es $f(\lambda)$, el valor de $f$ en $\lambda$. Vemos así que todo elemento de $\Bbbk$ es raíz del polinomio $f$ y, como $\Bbbk$ es infinito por hipótesis, esto implica que $f = 0$. La función $\Phi_{\mathscr{B}}$ es inyectiva en este caso.

Supongamos ahora que $n \geq 2$ y sea $W = \ker \xi_n$. Es claro que $\mathscr{B}' = (x_1, \ldots, x_{n-1})$ es una base de $W$ y que la correspondiente base dual es $\mathscr{B}'^* = (\xi_1|_W, \ldots, \xi_{n-1}|_W)$. Sea $\alpha : W \to V$ la inclusión, sea $\alpha^* : \Bbbk[V] \to \Bbbk[W]$ el morfismo de álgebras asociado a $\alpha$, como en la Proposición **1.1.5**, y sea $a : \Bbbk[x_1, \ldots, x_n] \to \Bbbk[x_1, \ldots, x_{n-1}]$ el morfismo de álgebras tal que para cada $i \in [\![n]\!]$ es

$$a(x_i) = \begin{cases} x_i, & \text{si } 1 \leq i < n; \\ 0, & \text{si } i = n. \end{cases}$$

El núcleo de $a$ es el ideal $(x_n)$ de $\Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$.

Evaluando las dos composiciones en los generadores $x_1$, …, $x_n$ de su dominio, vemos inmediatamente que conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\Bbbk[x_1, \ldots, x_n] \arrow[r, "a"] \arrow[d, "\Phi_{\mathscr{B}}"'] & \Bbbk[x_1, \ldots, x_{n-1}] \arrow[d, "\Phi_{\mathscr{B}'}"] \\
\Bbbk[V] \arrow[r, "\alpha^*"] & \Bbbk[W]
\end{tikzcd}$$

Supongamos ahora que $f \in \ker \Phi_{\mathscr{B}}$ y mostremos que $f$ es necesariamente nulo, haciendo inducción con respecto al grado de $f$. Observemos que esto es evidente si $f$ constante, así que basta considerar el caso en que $f$ tiene grado positivo.

Como el diagrama conmuta, tenemos que

$$\Phi_{\mathscr{B}'}(a(f)) = \alpha^*(\Phi_{\mathscr{B}}(f)) = 0$$

y la hipótesis inductiva nos dice que entonces $a(f) = 0$, de manera que existe $g \in \Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$ tal que $f = gx_n$. Para probar que $f = 0$ bastará que mostremos que $g = 0$ y para ello, como $g$ tiene grado menor que $f$ y gracias a nuestra hipótesis inductiva, que $\Phi_{\mathscr{B}}(g) = 0$. Consideramos para ello dos casos:

- Si $v \in V \setminus W$, entonces

  $$0 = \Phi_{\mathscr{B}}(f)(v) = \Phi_{\mathscr{B}}(gx_n)(v) = \Phi_{\mathscr{B}}(g)(v) \cdot \Phi_{\mathscr{B}}(x_n)(v)$$

  y $\Phi_{\mathscr{B}}(x_n)(v) = \xi_n(v) \neq 0$: esto muestra que $\phi_{\mathscr{B}}(g)(v) = 0$.
- Supongamos ahora que $v \in W$ y consideremos el espacio vectorial $S = \Bbbk$ y la función $\gamma : \lambda \in S \mapsto \lambda v_n + v \in V$. Esta función es de la forma de las consideradas en la Proposición **1.1.5**, así que sabemos que induce un morfismo de álgebras $\gamma^* : \Bbbk[V] \to \Bbbk[S]$. Si $\lambda \in S \setminus 0$, entonces

  $$\gamma^*(\Phi_{\mathscr{B}}(g))(\lambda) = (\Phi_{\mathscr{B}}(g) \circ \gamma)(\lambda) = \Phi_{\mathscr{B}}(g)(\lambda v_n + v)$$

  y, como $\lambda v_n + v \in V \setminus W$, lo que ya probamos nos dice que $\gamma^*(\Phi_{\mathscr{B}}(g))(\lambda) = 0$. Esto significa que

  *la función polinomial $\gamma^*(\Phi_{\mathscr{B}}(g)) \in \Bbbk[S]$ se anula en todos los puntos de $S$ salvo posiblemente en $0$.* (2)

  Sea $\mathscr{B}''$ una base de $S$: ya sabemos que el morfismo $\phi_{\mathscr{B}''} : \Bbbk[x_1] \to \Bbbk[S]$ es un isomorfismo, porque $\dim S = 1$. Sea $h \in \Bbbk[x_1]$ tal que $\Phi_{\mathscr{B}''}(h) = \gamma^*(\Phi_{\mathscr{B}}(g))$. De (2) deducimos que el polinomio $h$ se anula en todos los elementos de $\Bbbk$ salvo posiblemente en uno: como $\Bbbk$ es infinito, esto implica inmediatamente que $h$ es el polinomio nulo y, en consecuencia, que $\gamma^*(\Phi_{\mathscr{B}}(g)) = 0$. En particular, tenemos que

$$\Phi_{\mathscr{B}}(g)(v) = \gamma^*(\Phi_{\mathscr{B}}(g))(0) = 0.$$

Vemos de esta forma que cualquiera sea $v \in V$ se tiene que $\Phi_{\mathscr{B}}(g)(v) = 0$, y esto completa la prueba, como dijimos. □

**1.1.7.** Una consecuencia extremadamente importante de la proposición que acabamos de probar es:

**Corolario.** *El álgebra $\Bbbk[\mathbb{A}^n]$ es un dominio de factorización única noetheriano.*

*Demostración.* En efecto, el álgebra $\Bbbk[x_1, \dots, x_n]$ tiene esas propiedades y, de acuerdo a la proposición, es isomorfa a $\Bbbk[\mathbb{A}^n]$. □

**1.1.8.** Notemos que en el transcurso de la prueba de la Proposición 1.1.6 mostramos que si el cuerpo $\Bbbk$ es infinito y $V$ tiene dimensión 1, entonces una función polinomial que se anula en todos los elementos de $V$ salvo posiblemente en 0 se anula idénticamente. Como hay funciones $V \to \Bbbk$ no idénticamente nulas que se anulan en $V \setminus 0$, vemos de esta forma que no toda función $V \to \Bbbk$ es polinomial. De hecho, en un sentido informal, para todo espacio vectorial $V$ el álgebra $\Bbbk^V$ es mucho más grande que su subálgebra $\Bbbk[V]$.

El caso en que $\Bbbk$ es finito es bien diferente:

**Proposición.** *Si el cuerpo $\Bbbk$ es finito, entonces toda función $V \to \Bbbk$ es polinomial, de manera que $\Bbbk[V] = \Bbbk^V$.*

*Demostración.* Para cada $w \in V$ sea $\delta_w : V \to \Bbbk$ la función tal que para cada $v \in V$ se tiene que

$$\delta_w(v) = \begin{cases} 1, & \text{si } v = w; \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Es inmediato verificar que el conjunto $\{\delta_w : w \in V\}$ es una base de $\Bbbk^V$, así que para mostrar que todo elemento de $\Bbbk^V$ es polinomial bastará mostrar que para cada $w \in V$ la función $\delta_w$ lo es.

Fijemos entonces $w \in V$ y consideremos el polinomio

$$f = \prod_{i=1}^{n} \prod_{\substack{\lambda \in \Bbbk \\ \lambda \neq \xi_i(w)}} (x_i - \lambda)$$

Si $v \in V$, entonces

$$\Phi_{\mathscr{B}}(f)(v) = \prod_{i=1}^{n} \prod_{\substack{\lambda \in \Bbbk \\ \lambda \neq \xi_i(w)}} (\xi_i(v) - \lambda).$$

Ahora bien, si $v \neq w$, entonces existe $j \in [\![n]\!]$ tal que $\xi_j(v) \neq \xi_j(w)$ y, por lo tanto, este producto se anula, de manera que $\Phi_{\mathscr{B}}(f)(v) = 0$. Por otro lado,

$$\Phi_{\mathscr{B}}(f)(w) = \prod_{i=1}^{n} \prod_{\substack{\lambda \in \Bbbk \\ \lambda \neq \xi_i(w)}} (\xi_i(w) - \lambda) \neq 0.$$

Vemos así que $\delta_w$ es la imagen por $\Phi_{\mathscr{B}}$ del polinomio

$$\frac{1}{\Phi_{\mathscr{B}}(f)(w)} \prod_{i=1}^{n} \prod_{\substack{\lambda \in \Bbbk \\ \lambda \neq \xi_i(w)}} (x_i - \lambda)$$

y, en consecuencia, que es una función polinomial en $V$. □

## §1.2. La topología de Zariski

**1.2.1.** Desde ahora supondremos que el cuerpo $\Bbbk$ es algebraicamente cerrado y, en particular, infinito. Fijemos $n \in \mathbb{N}_0$ y escribamos $\mathbb{A}^n$ al espacio vectorial $\Bbbk^n$, o $\mathbb{A}^n_{\Bbbk}$ cuando queramos dejar de manifiesto el cuerpo con el que estamos trabajando. Sea $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ la base ordenada estándar de $\mathbb{A}^n$ y sea $\Phi_{\mathscr{B}} : \Bbbk[x_1, \ldots, x_n] \to \Bbbk[\mathbb{A}^n]$ el morfismo de álgebras que construimos en la sección anterior. Como $\Bbbk$ es infinito, este morfismo es un isomorfismo: lo consideraremos en todo lo que sigue como una identificación. En particular, si $p \in \mathbb{A}^n$ y $f \in \Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$ escribiremos $f(p)$ en lugar de $\Phi_{\mathscr{B}}(f)(p)$: como sabemos, $f(p)$ es el elemento de $\Bbbk$ que se obtiene del polinomio $f$ reemplazando las variables $x_1, \ldots, x_n$ por las coordenadas $p_1, \ldots, p_n$ de $p$ con respecto a la base ordenada estándar $\mathscr{B}$.

**1.2.2.** Si $T$ es un subconjunto de $\Bbbk[\mathbb{A}^n]$, escribimos

$$Z(T) = \{p \in \mathbb{A}^n : f(p) = 0 \text{ para todo } f \in T\}.$$

Llamamos a $Z(T)$ el ***lugar de ceros*** del conjunto de polinomios $T$. Si $T = \{f_1, \ldots, f_n\}$ tiene un número finito de elementos, entonces escribimos generalmente $Z(f_1, \ldots, f_m)$ en lugar de $Z(T)$.

**1.2.3.** La siguiente observación nos permite casi siempre restringir nuestra atención al caso en que el conjunto $T$ es un ideal de $\Bbbk[\mathbb{A}^n]$:

**Proposición.** *Si $T$ es un subconjunto de $\Bbbk[\mathbb{A}^n]$ y $\mathfrak{a}$ el ideal de $\Bbbk[\mathbb{A}^n]$ generado por $T$, entonces $Z(T) = Z(\mathfrak{a})$.*

*Demostración.* Como $T \subseteq \mathfrak{a}$, es claro que $Z(T) \supseteq Z(\mathfrak{a})$. Veamos la inclusión recíproca. Sea $p \in Z(T)$ y sea $f \in \mathfrak{a}$. Como $\mathfrak{a}$ es el ideal generado por $T$, existen $r \in \mathbb{N}_0$, $f_1, \ldots, f_r \in T$ y $g_1, \ldots, g_r \in \Bbbk[\mathbb{A}^n]$ tales que $f = \sum_{i=1}^r g_i f_i$, y entonces

$$f(p) = \sum_{i=1}^{r} g_i(p) f_i(p) = 0.$$

Esto nos dice que $p \in Z(\mathfrak{a})$, como queremos. □

**1.2.4.** Una consecuencia importante de la Proposición 1.2.3 es que todo conjunto de ceros puede describirse como el conjunto de ceros de un conjunto *finito* de polinomios.

**Corolario.** *Si $T \subseteq \Bbbk[\mathbb{A}^n]$, entonces existe un subconjunto* finito *$G$ del ideal de $\Bbbk[\mathbb{A}^n]$ generado por $T$ tal que $Z(T) = Z(G)$.*

En general, no es posible elegir a $G$ como un subconjunto de $T$.

*Demostración.* Sea $T \subseteq \Bbbk[\mathbb{A}^n]$ y sea $\mathfrak{a}$ el ideal generado por $T$ en $\Bbbk[\mathbb{A}^n]$. Como $\Bbbk[\mathbb{A}^n]$ es un álgebra noetheriana, el ideal $\mathfrak{a}$ es finitamente generado: existen $f_1, \ldots, f_n \in \mathfrak{a}$ tales que $\mathfrak{a} = (f_1, \ldots, f_n)$. Usando dos veces la Proposición 1.2.3, vemos que el conjunto $G = \{f_1, \ldots, f_n\}$ tiene entonces la propiedad de que $Z(T) = Z(\mathfrak{a}) = Z(G)$. □

**1.2.5.** Un subconjunto $Y$ de $\mathbb{A}^n$ es ***algebraico*** si existe un subconjunto $T$ de $\Bbbk[\mathbb{A}^n]$ tal que $Y = Z(T)$.

**Proposición.** (*i*) *Los subconjuntos $\varnothing$ y $\mathbb{A}^n$ de $\mathbb{A}^n$ son algebraicos.*

(*ii*) *Si $Y_1$ e $Y_2$ son subconjuntos algebraicos de $\mathbb{A}^n$, entonces $Y_1 \cup Y_2$ es un subconjunto algebraico de $\mathbb{A}^n$.*

(*iii*) *Si $(Y_i)_{i \in I}$ es una familia de subconjuntos algebraicos de $\mathbb{A}^n$, entonces $\bigcap_{i \in I} Y_i$ es un subconjunto algebraico de $\mathbb{A}^n$.*

*Demostración.* (*i*) Esto es inmediato, ya que $\varnothing = Z(1)$ y $\mathbb{A}^n = Z(\varnothing)$.

(*ii*) Sean $T_1$ y $T_2$ dos subconjuntos de $\Bbbk[\mathbb{A}^n]$ y pongamos $T = \{fg : f \in T_1, g \in T_2\}$. Mostremos que $Z(T) = Z(T_1) \cup Z(T_2)$ y, en particular, que esta unión es un subconjunto algebraico de $\mathbb{A}^n$.

Si $p \in Z(T_1)$ y $h \in T$, entonces existen $f \in T_1$ y $g \in T_2$ tales que $h = f_1 f_2$ y, por lo tanto, $h(p) = f_1(p) f_2(p) = 0$, ya que $f(p) = 0$. Esto muestra que $Z(T_1) \subseteq Z(T)$ y, por supuesto, un razonamiento similar muestra que $Z(T_2) \subseteq Z(T)$: vemos así que $Z(T_1) \cup Z(T_2) \subseteq Z(T)$.

Recíprocamente, sea $p \in Z(T)$ y supongamos que $p \notin Z(T_1)$, de manera que existe $f \in T_1$ tal que $f(p) \neq 0$. Si $g \in T_2$, entonces $fg \in T$ y la elección de $p$ implica que

$$0 = (fg)(p) = f(p)g(p).$$

Vemos así que $g(p) = 0$ y podemos concluir con esto que $p \in Z(T_2)$. Esto prueba que $Z(T) \subseteq Z(T_1) \cup Z(T_2)$.

(*iii*) Sea $(Y_i)_{i \in I}$ una familia de subconjuntos algebraicos de $\mathbb{A}^n$, de manera que para cada $i \in I$ hay un subconjunto $T_i$ de $\Bbbk[\mathbb{A}^n]$ tal que $Y_i = Z(T_i)$, y pongamos $T = \bigcup_{i \in I} T_i$. Bastará que mostremos que $Z(T) = \bigcap_{i \in I} Z(T_i)$. Si $i \in I$, entonces $T_i \subseteq T$, así que claramente $Z(T_i) \supseteq Z(T)$: vemos así que $\bigcap_{i \in I} Z(T_i) \supseteq Z(T)$. Por otro lado, si $p$ el in elemento de $\bigcap_{i \in I} Z(T_i)$, entonces para todo $i \in I$ y toda función $f \in T_i$ se tiene que $f(p) = 0$, de manera que $\in Z(T)$. Esto muestra que $\bigcap_{i \in I} Z(T_i) \subseteq Z(T)$. □

**1.2.6.** Una consecuencia inmediata de la Proposición 1.2.5 que acabamos de probar es que el conjunto

$$\{\mathbb{A}^n \setminus Y : Y \subseteq \mathbb{A}^n \text{ algebraico}\}$$

es una topología sobre $\mathbb{A}^n$. La llamamos la ***topología de Zariski***. Sus cerrados son precisamente los subconjuntos algebraicos de $\mathbb{A}^n$.

**1.2.7.** Veamos un ejemplo:

**Proposición.** *La topología de Zariski sobre $\mathbb{A}^1$ es la topología cofinita, esto es, un subconjunto no vacío de $\mathbb{A}^1$ es abierto si y solamente si su complemento es finito.*

*Demostración.* La afirmación es equivalente a la siguiente: un subconjunto propio de $\mathbb{A}^1$ es cerrado si y solamente si es finito. Probémosla.

Sea $F$ un subconjunto cerrado y propio de $\mathbb{A}^1$. Existe un ideal $\mathfrak{a}$ en $\Bbbk[\mathbb{A}^1]$ tal que $F = Z(\mathfrak{a})$ y, como el álgebra $\Bbbk[\mathbb{A}^1]$ es isomorfa a $\Bbbk[x_1]$ y es, por lo tanto, un dominio de ideales principales, existe una función $f \in \Bbbk[\mathbb{A}^1]$ tal que $\mathfrak{a} = (f)$. Como $F$ es un subconjunto propio de $\mathbb{A}^1$, es $f \neq 0$ y esto implica, como sabemos, que $f$ posee un número finito de ceros en $\mathbb{A}^1$: el conjunto $F$, que es el conjunto de esos ceros, es por lo tanto finito. □

**1.2.8.** Todo par de abiertos no vacíos de $\mathbb{A}^1$ tiene intersección no vacía —esto es consecuencia inmediata de la Proposición 1.2.7 y del hecho de que el cuerpo $\Bbbk$ es infinito— y, en consecuencia, la topología de $\mathbb{A}^1$ no es Hausdorff. Veremos más adelante que lo mismo ocurre con $\mathbb{A}^n$ cualquiera sea $n \in \mathbb{N}_0$.

Estos espacios satisfacen, sin embargo, el axioma de separación $T_1$:

**Proposición.** *Si $p \in \mathbb{A}^n$, entonces el subconjunto $\{p\}$ de $\mathbb{A}^n$ es algebraico.*

*Demostración.* Si $p = (p_1, \dots, p_n)$ es un punto de $\mathbb{A}^1$, entonces es inmediato verificar que $\{p\} = Z(x_1 - p_1, \dots, x_n - p_n)$, así que $\{p\}$ es un subconjunto algebraico de $\mathbb{A}^n$. □

**1.2.9.** La topología de Zariski tiene la siguiente descripción:

**Proposición.** *La topología de Zariski de $\mathbb{A}^n$ es la menor topología sobre $\mathbb{A}^n$ que hace que todas las funciones polinomiales $\mathbb{A}^n \to \Bbbk$ sean continuas, si dotamos a $\Bbbk$ de su topología cofinita.*

*Demostración.* Mostremos primero que la topología de Zariski hace continuas a todas las funciones polinomiales. Sea $f : \mathbb{A}^n \to \Bbbk$ una función polinomial. Para ver que $f$ es continua, basta mostrar que $f^{-1}(F)$ es un cerrado de $\mathbb{A}^n$ cualquiera sea el cerrado $F$ de $\Bbbk$. Como la topología de $\Bbbk$ es la cofinita, es suficiente considerar el caso en que $F = \{\lambda\}$ tiene exactamente un punto y en ese caso la preimagen $f^{-1}(F)$ coincide claramente con el conjunto $Z(f - \lambda)$, que es cerrado.

Supongamos ahora que $\tau$ es una topología sobre $\mathbb{A}^n$ que hace continuas a todas las funciones polinomiales $\mathbb{A}^n \to \Bbbk$ y sea $f$ una de éstas. Si $F$ es un cerrado de Zariski de $\mathbb{A}^n$, sabemos que hay un conjunto $T \subseteq \Bbbk[\mathbb{A}^n]$ tal que $F = Z(T)$, y entonces

$$F = Z(T) = \bigcap_{f \in T} Z(f) = \bigcap_{f \in T} f^{-1}(\{0\}).$$

Como las funciones de $T$ son continuas para $\tau$ y el conjunto $\{0\}$ es cerrado en $\Bbbk$, cada uno de los conjuntos que aparecen en la última intersección son cerrados para $\tau$: el conjunto $F$ es por lo tanto un cerrado de $\tau$. Vemos así que todo cerrado de Zariski es cerrado de $\tau$ y, en consecuencia, que la topología de Zariski está contenida en $\tau$: esto es lo que queríamos probar. □

**1.2.10.** Como siempre, es útil conocer una base de una topología y en nuestra situación hay una muy conveniente.

**Proposición.** *Para cada $f \in \mathbb{A}^n$ sea*

$$D(f) = \{p \in \mathbb{A}^n : f(p) \neq 0\}.$$

*El conjunto $\mathscr{B} = \{D(f) : f \in \mathbb{A}^n\}$ es una base de la topología de Zariski de $\mathbb{A}^n$.*

*Demostración.* Si $f \in \mathbb{A}^n$, entonces $D(f)$ es el complemento de $Z(f)$ en $\mathbb{A}^n$: vemos así que todos los elementos de $\mathscr{B}$ son abiertos.

Sea $U$ un abierto de $\mathbb{A}^n$ y sea $p \in U$. Sabemos que existen $m \in \mathbb{N}$ y funciones $f_1, \dots, f_m \in \Bbbk[\mathbb{A}^n]$ tales que $\mathbb{A}^n \setminus U = Z(f_1, \dots, f_m)$. Como $p \in U$, existe $i \in [\![m]\!]$ tal que

$f_i(p) \neq 0$ y claramente $p \in D(f_i) \subseteq U$. Esto muestra que $\mathscr{B}$ es una base de la topología de Zariski. $\square$

**1.2.11.** Supongamos por un momento que el cuerpo $\Bbbk$ es $\mathbb{C}$, el cuerpo de los números complejos. En este caso, sobre $\mathbb{C}^n$ tenemos dos topologías: la topología de Zariski que acabamos de construir y la topología euclídea. Como las funciones coordenadas $x_1, \dots, x_n : \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ son continuas para la topología euclídea, todas las funciones polinomiales $\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ son continuas para esa topología y, de acuerdo a la Proposición 1.2.9, esto implica que la topología de euclídea es más fina —esto es, tiene más abiertos— que la topología de Zariski. Las dos topologías son distintas, de todas formas, y una forma de verlo es observar lo siguiente:

**Proposición.** *Todo cerrado propio de $\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ tiene interior vacío con respecto a la topología euclídea. Todo abierto no vacío de $\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ es denso para la topología euclídea.*

*Demostración.* Las dos afirmaciones del enunciado son equivalentes, así que bastará que probemos la primera de ellas. Sea $F$ un cerrado propio de $\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$. Sabemos que existen funciones polinomiales $f_1, \dots, f_n \in \mathbb{C}[\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}]$ tales que $F = Z(f_1, \dots, f_n)$. Como $F$ es propio, alguna de $f_1, \dots, f_n$ es no nula — sin pérdida de generalidad, podemos suponer que la primera de ellas. Como $F \subseteq Z(f_1)$, bastará que probemos que $Z(f_1)$ tiene interior euclídeo vacío.

Supongamos por el contrario que hay un punto $p$ en el interior de $F$. La función $f_1 : \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ es un polinomio: si $d$ es su grado, entonces $f_1$ coincide con su polinomio de Taylor de grado $d$ en $p$. Ahora bien, como $f_1$ se anula en $F$, que es un entorno de $p$, tanto $f_1$ como todas sus derivadas se anulan en $p$: esto nos dice que el polinomio de Taylor de $f_1$ es nulo, lo que es imposible, ya que $f_1 \neq 0$. Esta contradicción prueba la proposición. $\square$

## §1.3. El *Nullstellensatz*

**1.3.1.** Si $B$ es un anillo y $A$ un subanillo de $B$, decimos que un elemento $b$ de $B$ es ***entero*** sobre $A$ si existe un polinomio $f \in A[X]$ con coeficientes en $A$ y mónico tal que $f(b) = 0$. Si todos los elementos de $B$ son enteros sobre $A$ , entonces decimos que el anillo $B$ mismo es ***entero*** sobre $A$.

**1.3.2.** El siguiente resultado nos da dos caracterizaciones alternativas de la integralidad de un elemento:

**Proposición.** *Sea $B$ un anillo y $A$ un subanillo de $B$, y sea $b$ un elemento de $B$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(*a*) *El elemento $b$ es entero sobre $A$.*

(*b*) *El subanillo $A[b]$ de $B$ es un $A$-módulo finitamente generado.*

(*c*) *Hay un $A[b]$-módulo fiel que es finitamente generado como $A$-módulo.*

*Demostración.* (*a*) ⇒ (*b*) Supongamos que $b$ es entero sobre $A$, de manera que existen $n \in \mathbb{N}$ y $a_0, \dots, a_{n-1} \in A$ tales que $b^n = a_0 + a_1 b + \cdots + a_{n-1} b^{n-1}$: es claro, entonces, que el conjunto $\{1, b, \dots, b^{n-1}\}$ genera a $A[b]$ como $A$-módulo.

(*b*) ⇒ (*c*) Supongamos que $A[b]$ es finitamente generado como $A$-módulo. Como claramente $A[b]$ es un $A[b]$-módulo fiel, es claro que se cumple la afirmación (*c*).

(*c*) ⇒ (*a*) Finalmente, supongamos que hay un $A[b]$-módulo fiel $M$ que está generado como $A$-módulo por un conjunto finito $\{m_1, \dots, m_n\}$. Hay una matriz $C = (\alpha_{i,j})$ de tamaño $n \times n$ con entradas en $A$ tal que $bm_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j} m_j$ para cada $i \in [\![n]\!]$. Si $I$ es la matriz identidad de tamaño $n\times$ y ponemos $N = bI - M$ y consideramos el vector columna $\vec{m} = (m_1, \dots, m_n) \in M^n$ con componentes en $M$, podemos escribir estas $n$ igualdades matricialmente en la forma

$$N \cdot \vec{m} = 0.$$

Sea $\mathsf{adj}(N)$ la matriz adjunta de $N$, de manera que $\mathsf{adj}(N) \cdot N = \mathsf{det}(N) I$. Si $m \in M$, entonces existe un vector $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in A^n$ tal que $m = \sum_{i=1}^{n} x_i m_i = \vec{x}^t \cdot \vec{m}$, y entonces

$$dm = \vec{x}^t \cdot \mathsf{det}(N) I \cdot \vec{m} = \vec{x}^t \cdot \mathsf{adj}(N) \cdot N \cdot \vec{m} = 0.$$

Vemos así que $dM = 0$: como $M$ es un $A[b]$-módulo fiel, esto sólo es posible si $d = 0$. Ahora bien, $d = \mathsf{det}(bI - M)$ es claramente el valor de un polinomio mónico con coeficientes en $A$ en $b$ y esto prueba que $b$ es entero sobre $A$. □

**1.3.3.** La implicación (*a*) ⇒ (*b*) de la Proposición 1.3.2 tiene la siguiente extensión:

**Proposición.** *Sea $B$ un anillo y $A$ un subanillo de $B$. Si $B$ es entero sobre $A$ y finitamente generado como $A$-álgebra, entonces $B$ es finitamente generado como $A$-módulo.*

*Demostración.* Supongamos que $B$ es entero sobre $A$ y que está generado como $A$-álgebra por el conjunto finito $\{b_1, \dots, b_n\}$. Tenemos una torre de subanillos

$$A \subseteq A[b_1] \subseteq A[b_1, b_2] \subseteq \cdots \subseteq A[b_1, \dots, b_n] = B.$$

Para todo $i \in [\![n]\!]$, el elemento $b_i$ es entero sobre $A[b_1, \dots, b_{i-1}]$, porque ya lo es sobre $A$, así que la Proposición 1.3.2 nos dice que $A[b_1, \dots, b_i]$ es finitamente generado como $A[b_1, \dots, b_{i-1}]$-módulo. Que $B$ es finitamente generado como $A$-módulo es consecuencia, entonces, de una inducción evidente a partir del siguiente hecho:

> *Si $A \subseteq B \subseteq C$ es una torre de anillos tal que $B$ es finitamente generado como $A$-módulo y $C$ es finitamente generado como $B$-módulo, entonces $C$ es finitamente generado como $A$-módulo.* □

**1.3.4.** Una aplicación importante de la Proposición 1.3.2 es la siguiente:

**Proposición.** *Sea $C$ un anillo y $A$ un subanillo de $C$. El conjunto $B$ de los elementos de $C$ que son enteros sobre $A$ es un subanillo de $C$.*

Llamamos a este anillo $B$ la ***clausura íntegra*** de $A$ en $C$. Se trata del subanillo de $C$ más grande que es entero sobre $A$.

*Demostración.* Sean $a$ y $b$ dos elementos de $B$, de manera que los subanillos $M = A[a]$ y $N = A[b]$ de $C$ son finitamente generados como $A$-módulos. Escribamos $P$ al subgrupo abeliano de $C$ generado por el conjunto $\{mn : m \in M, n \in N\}$. Es inmediato verificar que $P$ es un $A$-submódulo de $C$ y que es finitamente generado sobre $A$. Además, y gracias a que $aM \subseteq M$ y $bN \subseteq N$, tenemos que $(a + b)P \subseteq P$ y $abP \subseteq P$, de manera que $P$ es simultáneamente un $A[a + b]$-módulo y un $A[ab]$-módulo. Finalmente, como $P$ contiene a 1, es fiel tanto como $A[a + b]$-módulo como como $A[ab]$-módulo. De acuerdo a la Proposición 1.3.2 esto implica que $a + b$ y $ab$ son enteros sobre $A$. □

**1.3.5.** Otra aplicación de la Proposición 1.3.2 es:

**Proposición.** *Sea $A \subseteq B \subseteq C$ una torre de anillos. El anillo $C$ es entero sobre $A$ si y solamente si $B$ es entero sobre $A$ y $C$ es entero sobre $B$.*

*Demostración.* La necesidad de la condición es evidente. Veamos la suficiencia: supongamos que $B$ es entero sobre $A$ y que $C$ es entero sobre $B$, y sea $c \in C$. Como $c$ es entero sobre $B$, existe $n \in \mathbb{N}$ y $b_1, \dots, b_{n-1} \in B$ tales que $c^n + b_{n-1}c^{n-1} + \cdots + b_1 c + b_0 = 0$. Sea $B_1$ el subanillo $A[b_0, \dots, b_{n-1}]$ de $B$. Como $B_1$ está generado como $A$-álgebra por finitos elementos enteros sobre $A$, la Proposición 1.3.3 nos dice que es finitamente generado como $A$-módulo. Por otro lado, $c$ es entero sobre $B_1$, así que $B_1[c]$ es finitamente generado como $B_1$-módulo. Juntando estas dos cosas, vemos que $B_1[c]$ es un $A$-módulo finitamente generado. Como es además un $A[c]$-módulo fiel, ya que contiene a 1, la Proposición 1.3.2 implica que $c$ es entero sobre $A$. Concluimos así que todo elemento de $C$ es entero sobre $A$, como queríamos. □

**1.3.6. Proposición.** *Si $B$ es un anillo entero sobre un subanillo $A$ y $S$ es un conjunto multiplicativamente cerrado de $A$, entonces $S^{-1}B$ es entero sobre $S^{-1}A$.*

*Demostración.* Sea $b/s$ un elemento de $S^{-1}B$. Como $B$ es entero sobre $A$, existen $n \in \mathbb{N}_0$ y elementos $a_0, \dots, a_{n-1}$ de $A$ tales que $b^n + a_{n-1}b^{n-1} + \cdots + a_1 b + a_0 = 0$. Dividiendo por $s^n$, vemos que en $S^{-1}B$ es

$$(b/s)^n + \frac{a_{n-1}}{s}(b/s)^{n-1} + \cdots + \frac{a_1}{s^{n-1}}(b/s) + \frac{a_0}{s^n} = 0$$

y que, por lo tanto, $b/s$ es entero sobre $S^{-1}A$. □

**1.3.7. Proposición.** *Sea $B$ un anillo entero sobre un subanillo $A$ y sea $\mathfrak{p}$ un ideal primo de $A$. Es $\mathfrak{p}B \neq B$ y existe un ideal primo $\mathfrak{P}$ de $B$ tal que $\mathfrak{p} = \mathfrak{P} \cap A$.*

Decimos en esta situación que el primo $\mathfrak{P}$ de $B$ está ***arriba*** de $\mathfrak{p}$.

*Demostración.* Sea $S = A - \mathfrak{p}$, de manera que $A_\mathfrak{p} = S^{-1}A$, y sea $\mathfrak{m}_\mathfrak{p} = S^{-1}\mathfrak{p}$, que es el ideal maximal de $A_\mathfrak{p}$. Afirmamos que

$$B_\mathfrak{p} \supsetneq \mathfrak{m}_\mathfrak{p} B_\mathfrak{p}.$$

En efecto, supongamos que vale, por el contrario la igualdad. Esto implica, en particular, que el elemento 1 de $B_\mathfrak{p}$ pertenece a $\mathfrak{m}_\mathfrak{p} B_\mathfrak{p}$ y entonces que existen $a_1, \dots, a_r \in \mathfrak{m}_\mathfrak{p}$ y $b_1, \dots, b_r \in B$ tales que

$$1 = a_1 b_1 + \cdots + a_r b_r. \tag{3}$$

El subanillo $B' = A_\mathfrak{p}[b_1, \dots, b_r]$ de $B_\mathfrak{p}$ está finitamente generado por elementos enteros sobre $A_\mathfrak{p}$, así que es un $A_\mathfrak{p}$ módulo finitamente generado. Por otro lado, de la igualdad (3) se deduce inmediatamente que $\mathfrak{m}_\mathfrak{p} B' = B'$: el Lema de Nakayama, entonces, implica que $B' = 0$, lo que es absurdo.

Para probar la primera afirmación, ahora, basta observar que si $\mathfrak{p}B = B$, entonces tendríamos que $\mathfrak{m}_\mathfrak{p} B_\mathfrak{p} = B_\mathfrak{p}$. En efecto, en ese caso es

$$B_\mathfrak{p} = S^{-1}B = S^{-1}(\mathfrak{p}B) = \mathfrak{p}B_p = \mathfrak{p}A_\mathfrak{p}B_\mathfrak{p} = \mathfrak{m}_\mathfrak{p}B_\mathfrak{p}.$$

Veamos ahora la segunda afirmación. Probamos que $\mathfrak{m}_\mathfrak{p}B_\mathfrak{p}$ es un ideal propio de $B_\mathfrak{p}$, así que existe un ideal maximal $\mathfrak{M}$ de $B_\mathfrak{p}$ que lo contiene. La intersección $\mathfrak{M} \cap A_\mathfrak{p}$ es un ideal de $A_\mathfrak{p}$ y $\mathfrak{M} \cap A_\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{m}_\mathfrak{p}B_\mathfrak{p} \cap A_\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{m}_\mathfrak{p}$, así que, como $\mathfrak{m}_\mathfrak{p}$ es un ideal maximal de $A_\mathfrak{p}$, es $\mathfrak{M} \cap A_\mathfrak{p} = \mathfrak{m}_\mathfrak{p}$. Por otro lado, la intersección $\mathfrak{P} = \mathfrak{M} \cap B$ es un ideal primo de $B$ y, como el cuadrado de inclusiones

$$\begin{array}{ccc} B & \hookrightarrow & B_{\mathfrak{p}} \\ \uparrow & & \uparrow \\ A & \hookrightarrow & A_{\mathfrak{p}} \end{array}$$

por supuesto conmuta, tenemos que

$$\mathfrak{P} \cap A = \mathfrak{M} \cap B \cap A = \mathfrak{M} \cap A_{\mathfrak{p}} \cap A = \mathfrak{m}_{\mathfrak{p}} \cap A = \mathfrak{p}.$$

Vemos así que el primo $\mathfrak{P}$ de $B$ tiene la propiedad que queremos. □

**1.3.8. Proposición.** *Sea $B$ un anillo entero sobre un subanillo $A$, sean $\mathfrak{P}$ y $\mathfrak{p}$ ideales primos de $B$ y de $A$, respectivamente, y supongamos que $\mathfrak{P}$ está arriba de $\mathfrak{p}$. El ideal $\mathfrak{P}$ es maximal en $B$ si y solamente si el ideal $\mathfrak{p}$ es maximal en $A$.*

*Demostración.* Observemos que $A/\mathfrak{p} \subseteq B/\mathfrak{P}$ y que $B/\mathfrak{P}$ es entero sobre $A/\mathfrak{p}$.

Supongamos primero que $\mathfrak{p}$ es maximal en $A$, de manera que $A/\mathfrak{p}$ es un cuerpo. Si $b \in B/\mathfrak{P}$, entonces el subanillo $(A/\mathfrak{p})[b]$ de $B/\mathfrak{P}$ es un dominio —porque $\mathfrak{P}$ es primo— finitamente generado como $A/\mathfrak{p}$-módulo —porque $b$ es entero sobre $A/\mathfrak{p}$— y esto implica que se trata de un cuerpo. En particular, $b$ es inversible en $(A/\mathfrak{p})[b]$ y, *a fortiori*, en $B/\mathfrak{P}$. Vemos así que $B/\mathfrak{P}$ es un cuerpo y, por lo tanto, que $\mathfrak{P}$ es un ideal maximal de $B$.

Recíprocamente, supongamos que $\mathfrak{p}$ no es maximal en $A$, de manera que hay un ideal primo no nulo $\mathfrak{q}$ en $A/\mathfrak{p}$. Como $B/\mathfrak{P}$ es entero sobre $A/\mathfrak{p}$, la Proposición 1.3.7 nos dice que hay un ideal primo $\mathfrak{Q}$ en $B/\mathfrak{P}$ arriba de $\mathfrak{q}$: esto implica, por supuesto, que $B/\mathfrak{P}$ no es un cuerpo y, por lo tanto que $\mathfrak{P}$ no es maximal en $B$. □

**1.3.9.** Una de las razones por las que nos interesan las extensiones enteras de anillos es que podemos extender morfismos de anillos con codominio en cuerpos algebraicamente cerrados:

**Proposición.** *Sea $B$ un anillo entero sobre un subanillo $A$ y sea $L$ un cuerpo algebraicamente cerrado. Todo morfismo $\phi : A \to L$ extiende a $B$.*

*Demostración.* Sea $\phi : A \to L$ un morfismo y sea $\mathfrak{p}$ su núcleo, que es un ideal primo ya que $L$ es un dominio. Como todo elemento de $S = A - \mathfrak{p}$ va por $\phi$ a un elemento inversible, el morfismo $\phi$ extiende a otro $\phi' : A_{\mathfrak{p}} \to L$, cuyo núcleo es el ideal maximal $\mathfrak{m}_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ de $A_{\mathfrak{p}}$. En particular, $\phi'$ induce un morfismo $\phi'' : A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{m}_p \to L$.

El anillo $B_{\mathfrak{p}}$ es entero sobre $A_{\mathfrak{p}}$, así que la Proposición 1.3.7 nos dice que hay un ideal $\mathfrak{M}$ en $B_{\mathfrak{p}}$ sobre $\mathfrak{m}_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ y como $\mathfrak{m}_{\mathfrak{p}}$ es maximal en $A_{\mathfrak{p}}$, el ideal $\mathfrak{M}$ es maximal en $B_\mathfrak{p}$. Como consecuencia de esto, la inclusión $A_\mathfrak{p}/\mathfrak{m}_p \subseteq B_\mathfrak{p}/\mathfrak{M}$ es una extensión de cuerpos y esta extensión es algebraica porque $B$ es entero sobre $A$. Se sigue de esto y de que $L$ es algebraicamente cerrado, entonces, que $\phi''$ extiende a un morfismo $\phi''' : B_\mathfrak{p}/\mathfrak{M} \to L$. Componiendo esta extensión con el morfismo canónico $B \to B_\mathfrak{p}/\mathfrak{M}$, obtenemos una extensión de $\phi$ a $B$, y esto prueba la proposición. □

**1.3.10.** Con un poco de trabajo, podemos extender la Proposición 1.3.9 en la siguiente forma:

**Proposición.** *Sea $K$ un cuerpo y sea $A$ una $K$-álgebra finitamente generada. Todo morfismo $K \to L$ con codominio en un cuerpo algebraicamente cerrado extiende a un morfismo $A \to L$.*

*Demostración.* Observemos que, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $L$ es una extensión de $K$ y entonces lo que tenemos que mostrar es que existe un morfismo de $K$-álgebras $A \to L$.

Supongamos primero que $A$ es un cuerpo. Sea $G$ un subconjunto finito de $A$ que genera a $A$ como $K$-álgebra y sea $T$ un subconjunto algebraicamente independiente sobre $K$ maximal de $G$. Es fácil ver que la extensión $L/K(T)$ es algebraica y claramente $L$ es finitamente generada como $K(T)$-álgebra.

Supongamos que los elementos de $T$ son $t_1, \ldots, t_n$ y que los elementos $x_1, \ldots, x_m$ de $L$ generan a $L$ como $K(T)$-álgebra. Sean $f_1, \ldots, f_m \in K(T)[y]$ los polinomios minimales de $x_1, \ldots, x_m$ sobre $K(T)$. Como $K(T)$ es el cuerpo de fracciones de su subálgebra $K[t_1, \ldots, t_n]$, existe $a \in K[t_1, \ldots, t_n]$ no nulo tal que los productos $af_1, \ldots, af_m$ son elementos de $K[t_1, \ldots, t_m][y]$. En otras palabras, los polinomios $f_1, \ldots, f_m$, que son mónicos, tienen sus coeficientes en la subálgebra $M = K[t_1, \ldots, t_n, 1/a]$ de $L$ y, por lo tanto, los elementos $x_1, \ldots, x_m$ de $L$ son enteros sobre $M$.

Como los elementos $t_1, \ldots, t_n$ son algebraicamente independientes sobre $K$, el elemento $a$ de $K[t_1, \ldots, t_n]$ no es nulo, y $L$ es algebraicamente cerrado, existe un morfismo $\phi : K[t_1, \ldots, t_n] \to L$ tal que $\phi(a) \neq 0$. Como $M$ es la localización de $K[t_1, \ldots, t_n]$ en $a$, este morfismo extiende a un morfismo $\phi' : M \to L$. Finalmente, como el cuerpo $A$ es entero sobre $M$ y finitamente generado como $M$-álgebra, la Proposición 1.3.9 nos dice que $\phi'$ extiende a su vez a un morfismo $\phi'' : A \to L$. Como este morfismo es un morfismo de $K$-álgebras, esto prueba la proposición bajo la hipótesis adicional que pusimos arriba de que $A$ sea un cuerpo.

Consideremos ahora el caso general, esto es, sea $A$ una $K$-álgebra finitamente generada. Si $\mathfrak{m}$ es un ideal maximal de $A$, entonces $A/\mathfrak{m}$ es un cuerpo que contiene a $K$ y es finitamente generado como $K$-álgebra. Lo que ya probamos implica que existe un morfismo de $K$-álgebras $\phi : A/\mathfrak{m} \to L$. Componiendo con la proyección canónica

$A \to A/\mathfrak{m}$ obtenemos un morfismo de $K$-álgebras $A \to L$, que es lo que queremos. $\square$

**1.3.11.** Una consecuencia inmediata de esto es el *Lema de Zariski*:

**Corolario.** *Si $K$ es un cuerpo y $L$ es una extensión de $K$ que es finitamente generada como $K$-álgebra, entonces $L$ es algebraico sobre $K$.*

*Demostración.* En efecto, la Proposición 1.3.10 nos dice que, como $L$ es finitamente generado como $K$-álgebra, hay un morfismo de $K$-álgebras $L \to \overline{K}$ con codominio la clausura algebraica de $K$ y esto, por supuesto, implica que $L$ es algebraico sobre $K$. $\square$

**1.3.12.** Usando el Lema de Zariski podemos describir fácilmente los ideales maximales de $\Bbbk[\mathbb{A}^n]$. Aquí, como siempre, $\Bbbk$ denota un cuerpo algebraicamente cerrado.

**Proposición.** *Si $\mathfrak{m}$ es un ideal maximal de $\Bbbk[\mathbb{A}^n]$, entonces existe un punto $p = (p_1, \ldots, p_n)$ de $\mathbb{A}^n$ y uno solo tal que $\mathfrak{m} = (x_1 - p_1, \ldots, x_n - p_n)$ y $\mathfrak{m}$ coincide con el núcleo del morfismo $f \in \Bbbk[\mathbb{A}^n] \mapsto f(p) \in \Bbbk$.*

*Demostración.* Sea $\mathfrak{m}$ un ideal maximal de $\Bbbk[\mathbb{A}^n]$. El álgebra cociente $\Bbbk[\mathbb{A}^n]/\mathfrak{m}$ es un cuerpo que es una extensión de $\Bbbk$ finitamente generada como álgebra, así que el Corolario 1.3.11 y el hecho de que $\Bbbk$ es algebraicamente cerrado implican que $\Bbbk[\mathbb{A}^n]/\mathfrak{m} = \Bbbk$. Sea $\pi : \Bbbk[\mathbb{A}^n] \to \Bbbk[\mathbb{A}^n]/\mathfrak{m} = \Bbbk$ la proyección canónica, para cada $i \in [\![n]\!]$ sea $p_i = \pi(x_i)$ y sea $p = (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{A}^n$. Es claro que el ideal $\mathfrak{m}' = (x_1 - p_1, \ldots, x_n - p_n)$ de $\Bbbk[\mathbb{A}^n]$, que es maximal y coincide con el núcleo del morfismo $f \in \Bbbk[\mathbb{A}^n] \mapsto f(p) \in \Bbbk$, está contenido en el núcleo de $\pi$, esto es, de $\mathfrak{m}$. La proposición sigue de esto. $\square$

**1.3.13.** El Lema de Zariski nos permite probar el llamado *Nullstellensatz débil*:

**Proposición.** *Si $\mathfrak{a}$ es un ideal propio de $\Bbbk[\mathbb{A}^n]$, entonces $Z(\mathfrak{a})$ es un subconjunto no vacío de $\mathbb{A}^n$.*

*Demostración.* Escribamos $A = \Bbbk[\mathbb{A}^n]$ y sea $\mathfrak{a}$ un ideal propio de $A$. Existe un ideal maximal $\mathfrak{m}$ de $A$ que contiene a $\mathfrak{a}$ y $A/\mathfrak{m}$ es un cuerpo que es finitamente generado como $\Bbbk$-álgebra. De acuerdo al Corolario 1.3.11, este cuerpo $A/\mathfrak{m}$ es por lo tanto algebraico sobre $\Bbbk$ y, como este último es algebraicamente cerrado, de hecho igual a $\Bbbk$. Se sigue de esto que la proyección canónica $\pi : A \to A/\mathfrak{m} = \Bbbk$ es un morfismo de álgebras que tiene a $\mathfrak{a}$ en su núcleo. Para cada $i \in [\![n]\!]$ sea $p_i = \pi(x_i)$ y sea $p = (p_1, \ldots, p_n)$, que es un punto de $\mathbb{A}^n$. Que $\mathfrak{a}$ esté contenido en el núcleo de $\pi$ significa, precisamente, que $p$ está en $Z(\mathfrak{a})$ y, por lo tanto, que este conjunto no es vacío. $\square$

**1.3.14.** De la versión débil del Nullstellensatz podemos obtener el *Nullstellensatz fuerte*, que es el resultado que corona esta sección, gracias al *truco de Rabinowitsch*.

Recordemos que si $R$ es un anillo y $\mathfrak{a}$ es un ideal de $R$, el ***radical*** de $\mathfrak{a}$ es

$$\sqrt{a} = \{a \in R : \text{existe } r \in \mathbb{N} \text{ tal que } a^r \in \mathfrak{a}\},$$

que es un ideal de $R$.

**Proposición.** *Sea $\mathfrak{a}$ un ideal de $\Bbbk[\mathbb{A}^n]$. Si $f \in \Bbbk[\mathbb{A}^n]$ es tal que $f(p) = 0$ para todo $p \in Z(\mathfrak{a})$, entonces existe $f \in \sqrt{\mathfrak{a}}$.*

*Demostración.* Sea $f \in \Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$ tal que $f(p) = 0$ para todo $p \in Z(\mathfrak{a})$. Queremos probar que existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $f^r \in \mathfrak{a}$; como esto es evidente si $f = 0$, basta que nos ocupemos del caso en que $f \neq 0$. Consideremos el ideal $\mathfrak{a}'$ de $\Bbbk[x_1, \ldots, x_n, y]$ generado por $\mathfrak{a}$ y por $1 - yf$. El subconjunto $Z(\mathfrak{a}')$ de $\mathbb{A}^{n+1}$ es vacío, así que la Proposición 1.3.13 nos dice que $\mathfrak{a}' = \Bbbk[x_1, \ldots, x_n, y]$. En particular, $1 \in \mathfrak{a}'$, y esto significa que existen $f_1, \ldots, f_n \in \mathfrak{a}$ y $g_1, \ldots, g_{n+1}$ tales que

$$1 = g_1 \cdot f_1 + \cdots + g_n \cdot f_n + g_{n+1} \cdot (1 - yf). \tag{4}$$

Hay un morfismo $\phi : \Bbbk[x_1, \ldots, x_n, y] \to \Bbbk[x_1, \ldots, x_n]_f$ con codominio en la localización de $\Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$ en $f$ tal que $\phi(x_i) = x_i$ si $i \in [\![n]\!]$ y $\phi(y) = 1/f$. Aplicando este morfismo a ambos lados de la igualdad (4), vemos que

$$1 = \phi(g_1) \cdot f_1 + \cdots + \phi(g_n) \cdot f_n.$$

Existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $f^r\phi(g_i) \in \Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$ para cada $i \in [\![n]\!]$ y entonces

$$f^r = f^r\phi(g_1) \cdot f_1 + \cdots + f^r\phi(g_n) \cdot f_n \in \mathfrak{a}.$$

Esto es precisamente lo que queríamos. □

**1.3.15.** Usando el Nullstellensatz podemos probar que $\Bbbk[\mathbb{A}^n]$ es un ***anillo de Jacobson***:

**Proposición.** *Todo ideal primo de $\Bbbk[\mathbb{A}^n]$ es intersección de ideales maximales.*

*Demostración.* Sea $\mathfrak{p}$ un ideal maximal de $\Bbbk[\mathbb{A}^n]$ y sea $f \in \Bbbk[\mathbb{A}^n] \setminus \mathfrak{p}$. Como $\mathfrak{p}$ es primo, se sigue de esto que $f^r \notin \mathfrak{p}$ para todo $r \in \mathbb{N}$ y la Proposición 1.3.14 nos dice entonces que existe $p \in Z(\mathfrak{p}) \subseteq \mathbb{A}^n$ tal que $f(p) \neq 0$. El núcleo del morfismo $g \in \Bbbk[\mathbb{A}^n] \mapsto g(p) \in \Bbbk$ es un ideal maximal $\mathfrak{m}$ de $\Bbbk[\mathbb{A}^n]$ que contiene a $\mathfrak{p}$ y no a $f$. Esto muestra que $\mathfrak{p}$ contiene a la intersección de todos los ideales maximales de $\Bbbk[\mathbb{A}^n]$ que lo contienen y prueba, por lo tanto, la proposición. □

## §1.4. La correspondencia entre ideales y conjuntos cerrados

**1.4.1.** Si $Y$ es un subconjunto de $\mathbb{A}^n$, escribimos

$$I(Y) = \{f \in \Bbbk[\mathbb{A}^n] : f(p) = 0 \text{ para todo } p \in Y\}.$$

Es inmediato verificar que se trata de un ideal de $\Bbbk[\mathbb{A}^n]$.

**1.4.2. Proposición.** (*i*) *Si $T_1$ y $T_2$ son subconjuntos de $\Bbbk[\mathbb{A}^n]$ tales que $T_1 \subseteq T_2$, entonces $Z(T_1) \supseteq Z(T_2)$.*

(*ii*) *Si $Y_1$ e $Y_2$ son subconjuntos de $\mathbb{A}^n$ tales que $Y_1 \subseteq Y_2$, entonces $I(Y_1) \supseteq I(Y_2)$.*

(*iii*) *Si $Y_1$ e $Y_2$ son subconjuntos de $\mathbb{A}^n$, entonces $I(Y_1 \cup Y_2) = I(Y_1) \cap I(Y_2)$.*

(*iv*) *Si $\mathfrak{a}$ es un ideal de $\Bbbk[\mathbb{A}^n]$, entonces $I(Z(\mathfrak{a})) = \sqrt{\mathfrak{a}}$, el radical de $\mathfrak{a}$.*

(*v*) *Si $Y$ es un subconjunto de $\mathbb{A}^n$, entonces $Z(I(Y)) = \overline{Y}$, la clausura de $Y$.*

*Demostración.* Las tres primeras afirmaciones son evidentes, y la cuarta es consecuencia inmediata del *Nullstellensatz* 1.3.14. Probemos la quinta.

Sea $Y$ un subconjunto de $\mathbb{A}^n$. Es claro que $Y \subseteq Z(I(Y))$ y que $Z(I(Y))$ es un cerrado de $\mathbb{A}^n$. Supongamos, por otro lado, que $F$ es un cerrado de $\mathbb{A}^n$ tal que $F \supseteq Y$. Como $F$ es cerrado, hay un ideal $\mathfrak{a}$ de $\Bbbk[\mathbb{A}^n]$ tal que $F = Z(\mathfrak{a})$. De acuerdo a (*ii*), tenemos que

$$\mathfrak{a} \subseteq I(Z(\mathfrak{a})) = I(F) \subseteq I(Y)$$

y, por (*i*), $F = Z(\mathfrak{a}) \supseteq Z(I(Y))$. Esto nos dice que $Z(I(Y)) = \overline{Y}$, como queríamos. □

**1.4.3. Corolario.** *Sea $Y$ un subconjunto de $\mathbb{A}^n$.*

(*i*) *Es $I(Y) = I(\overline{Y})$.*

(*ii*) *El ideal $I(Y)$ de $\Bbbk[\mathbb{A}^n]$ es radical, esto es, coincide con su radical.*

*Demostración.* (*i*) Como $Y \subseteq \overline{Y}$, es $I(Y) \supseteq I(\overline{Y})$. Por otro lado, si $f \in I(Y)$, entonces la función $f : V \to \Bbbk$ se anula sobre $Y$ y, como es continua y $\Bbbk$ es $T_1$, también se anula en $\overline{Y}$: esto nos dice que $I(Y) \subseteq I(\overline{Y})$.

(*ii*) Usando la parte (*i*) que ya probamos y las partes (*iv*) y (*v*) de la Proposición 1.4.2 vemos que

$$\sqrt{I(Y)} = I(Z(I(Y)) = I(\overline{Y}) = I(Y).$$

Esto muestra que el ideal $I(Y)$ es radical. □

**1.4.4. Proposición.** *Sea $\mathscr{F}$ el conjunto de los cerrados de $\mathbb{A}^n$ y sea $\mathscr{I}$ el conjunto ordenado de los ideales radicales del álgebra $\Bbbk[\mathbb{A}^n]$. Las funciones*

$$Z : \mathfrak{a} \in \mathscr{I} \mapsto Z(\mathfrak{a}) \in \mathscr{F} \qquad\qquad I : Y \in \mathscr{F} \mapsto I(Y) \in \mathscr{I}$$

*son biyecciones inversas que invierten el sentido de las inclusiones.*

*Demostración.* De acuerdo a las dos últimas partes de la Proposición 1.4.2, tenemos que $Z(I(Y)) = Y$ para todo cerrado $Y$ de $\mathbb{A}^n$ y que $I(Z(\mathfrak{a})) = \mathfrak{a}$ para todo ideal radical de $\Bbbk[\mathbb{A}^n]$. Esto muestra que las dos funciones del enunciado son biyecciones inversas. Que ambas invierten el sentido de las inclusiones es consecuencia de las dos primeras partes de aquella proposición. □

## §1.5. Inducción noetheriana

**1.5.1.** Decimos que un espacio topológico $X$ es ***noetheriano*** si satisface la condición de cadena descendente sobre conjuntos cerrados, esto es, si cada vez que se tiene una cadena decreciente

$$F_1 \supseteq F_2 \supseteq F_3 \supseteq \cdots$$

de cerrados de $X$, existe un entero $m \in \mathbb{N}$ tal que $F_i = F_m$ para todo $i \geq m$.

**1.5.2.** Los espacios usuales del análisis y la topología no son noetherianos salvo en casos triviales. Así, por ejemplo, $\mathbb{R}$ con su topología euclídea no es noetheriano ya que la cadena de cerrados

$$[0,1] \supsetneq [0,\tfrac{1}{2}] \supsetneq [0,\tfrac{1}{3}] \supsetneq [0,\tfrac{1}{4}] \supsetneq \cdots$$

no se estabiliza. La razón por la que estamos interesados en esta noción es la siguiente:

**Proposición.** *El espacio $\mathbb{A}^n$ es noetheriano.*

*Demostración.* Si

$$F_1 \supseteq F_2 \supseteq F_3 \supseteq \cdots$$

es una cadena descendente de cerrados de $\mathbb{A}^n$, tenemos una cadena ascendente

$$I(F_1) \subseteq I(F_2) \subseteq I(F_3) \subseteq \cdots$$

de ideales de $\Bbbk[\mathbb{A}^n]$. Como el álgebra $\Bbbk[\mathbb{A}^n]$ es noetheriana, existe $m \in \mathbb{N}_0$ tal que $I(F_m) = I(F_i)$ para todo $i \geq m$ y, de acuerdo a la Proposición 1.4.4, tenemos entonces que

$$F_m = Z(I(F_m)) = Z(I(F_i)) = F_i$$

para todo $i \geq m$. Esto muestra que $\mathbb{A}^n$ es noetheriano, como queremos. □

**1.5.3.** En la práctica, usaremos casi siempre la condición de noetherianidad de un espacio a través del siguiente resultado:

**Proposición.** *Sea $X$ un espacio topológico. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

($a$) *El espacio $X$ es noetheriano.*

($b$) *Toda familia no vacía de cerrados de $X$ posee un elemento minimal.*

($c$) *El espacio $X$ satisface la condición de cadena ascendente sobre conjuntos abiertos, esto es, si $U_1 \subseteq U_2 \subseteq U_3 \subseteq \cdots$ es una cadena creciente de abiertos de $X$, entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $U_m = U_i$ para todo $i \geq m$.*

($d$) *Toda familia no vacía de abiertos de $X$ posee un elemento maximal.*

*Demostración.* Es claro que las equivalencias ($a$) $\Leftrightarrow$ ($c$) y ($b$) $\Leftrightarrow$ ($d$) valen, así que será suficiente con mostrar que ($a$) $\Leftrightarrow$ ($b$) vale.

Supongamos primero $\mathscr{F}$ es una una familia no vacía de cerrados de $X$ que no posee un elemento minimal, de manera que hay una función $\phi : \mathscr{F} \to \mathscr{F}$ tal que $\phi(F) \subsetneq F$ para todo $F \in \mathscr{F}$. Ahora bien, si $F$ es un elemento de $\mathscr{F}$, entonces la cadena

$$F \supsetneq \phi(F) \supsetneq \phi(\phi(F)) \supsetneq \phi(\phi(\phi(F))) \supsetneq \cdots$$

de cerrados de $X$ no se estabiliza: esto muestra que $X$ no es noetheriano.

Supongamos ahora que $X$ satisface la condición ($b$) y sea

$$F_1 \supseteq F_2 \supseteq F_3 \supseteq \cdots$$

una cadena descendente de cerrados de $X$. La hipótesis implica que la familia $\mathscr{F} = \{F_i : i \in \mathbb{N}\}$ posee un elemento minimal, esto es, que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $F_m \subseteq F_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Como además $F_m \supseteq F_i$ si $i \geq m$, vemos que $F_m = F_i$ si $i \geq m$: esto nos dice que $X$ es noetheriano. □

**1.5.4.** La noetherianidad es una propiedad hereditaria:

**Proposición.** *Un subespacio de un espacio topológico noetheriano es él mismo noetheriano.*

*Demostración.* Sea $X$ un espacio topológico noetheriano, sea $Y$ un subespacio de $X$ y sea

$$F_1 \supseteq F_2 \supseteq F_3 \supseteq \cdots$$

una cadena descendente de cerrados de $Y$. Para cada $i \in \mathbb{N}$ existe un cerrado $F_i'$ de $X$ tal que $F_i = F_i' \cap Y$. Si ahora ponemos $F_i'' = \bigcap_{j=1}^{i} F_j'$ para cada $i \in \mathbb{N}$, entonces

$$F_1'' \supseteq F_2'' \supseteq F_3'' \supseteq \cdots$$

es una cadena descendente de cerrados de $X$. La hipótesis implica, por lo tanto, que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $F_m'' = F_i''$ siempre que $i \geq m$. Como $F_i = F_i'' \cap Y$ cualquiera sea $i \in \mathbb{N}$, vemos inmediatamente que $F_m = F_i$ siempre que $i \geq m$. Concluimos así que $Y$ es un espacio noetheriano, como queremos. □

**1.5.5.** Un ejemplo sencillo de aplicación de la hipótesis de noetherianidad para espacios es el siguiente:

**Proposición.** *Un espacio topológico noetheriano es compacto.*

*Demostración.* Sea $X$ un espacio topológico noetheriano y sea $\mathscr{F}$ una familia de cerrados de $X$ tal que el conjunto $\mathscr{F}'$ de todas las intersecciones finitas de elementos de $\mathscr{F}$ no contiene a $\emptyset$. Como $X$ es noetheriano, $\mathscr{F}'$ posee un elemento minimal $F$. En particular, $F$ no es vacío y está contenido en todo elemento de $\mathscr{F}$: esto muestra que la intersección de todos los elementos de $\mathscr{F}$ no es vacía. Vemos así que $X$ tiene la llamada *propiedad de intersección finita* y que es, por lo tanto, compacto. □

## §1.6. Conjuntos irreducibles

**1.6.1.** Un espacio topológico $Y$ es ***irreducible*** si no es vacío y cada vez que $Y = F_1 \cup F_2$ con $F_1$ y $F_2$ subconjuntos cerrados de $Y$ se tiene que alguno de $F_1$ o $F_2$ es igual a $Y$.

**Lema.** *Sea $X$ un espacio topológico. Un subespacio $Y$ de $X$ es irreducible si y solamente si cada vez que $Y$ está contenido en la unión de un número finito cerrados de $X$ está contenido, de hecho, en alguno de ellos.*

*Demostración.* Sea $Y$ un subespacio de $X$. Supongamos primero que $Y$ satisface la condición del enunciado y sean $F_1$ y $F_2$ dos cerrados de $Y$ tales que $Y = F_1 \cup F_2$. Existen entonces cerrados $F_1'$ y $F_2'$ de $X$ tales que $F_1 = F_1' \cap Y$ y $F_2 = F_2' \cap Y$, y se tiene que

$Y \subseteq F_1' \cup F_2'$. La hipótesis, entonces, implica que $Y$ está contenido en alguno de $F_1'$ o $F_2'$ y, por lo tanto, que $Y$ coincide con $F_1$ o con $F_2$. Vemos así que $Y$ es irreducible.

Recíprocamente, supongamos que $Y$ es irreducible y sean $F_1, \dots, F_r$ cerrados de $X$ tales que $Y \subseteq \bigcup_{i=1}^n F_i$. Queremos probar que existe $j \in [\![n]\!]$ tal que $Y \subseteq F_j$: hagámoslo por inducción con respecto $n$. Si $n = 1$ no hay nada que probar. Supongamos entonces que $n \geq 2$. Como $Y \subseteq F_1 \cup (\bigcup_{i=2}^n F_i)$, vemos que $Y$ es unión de sus dos cerrados $\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} F_i\right) \cap Y$ y $F_n \cap Y$. Como es irreducible, tiene que coincidir con alguno de ellos: esto nos dice que o bien $Y \subseteq \bigcup_{i=1}^{n-1} F_i$ o bien $Y \subseteq Y_n$. En el primer caso caso, la hipótesis inductiva nos dice que existe $i \in [\![n-1]\!]$ tal que $Y \subseteq F_i$. Así, en cualquier caso vemos que $Y$ está contenido en alguno de los cerrados $F_1, \dots, F_n$. □

**1.6.2.** Los espacios usuales del análisis y la topología no son irreducibles. Por ejemplo, si $X$ es un espacio Hausdorff con más de un punto, entonces $X$ no es irreducible. En efecto, si $a$ y $b$ son dos puntos distintos de un espacio Hausdorff y $U$ y $V$ son dos abiertos disjuntos tales que $a \in U$ y $b \in V$, entonces $X = (X \setminus U) \cup (X \setminus V)$ y los dos cerrados $X \setminus U$ y $X \setminus V$ son propios.

Por otro lado, podemos probar directamente que $\mathbb{A}^1$, dotado de su topología de Zariski, es un espacio irreducible. En efecto, si $\mathbb{A}^1 = F_1 \cup F_2$ con $F_1$ y $F_2$ cerrados de $\mathbb{A}^1$, entonces alguno de $F_1$ o $F_2$ tiene que ser infinito y, como la topología de $\mathbb{A}^1$ es la cofinita, igual a $\mathbb{A}^1$.

**1.6.3.** Los cerrados irreducibles de $\Bbbk[\mathbb{A}^n]$ tiene la siguiente descripción algebraica:

**Proposición.** *Un cerrado $Y$ de $\mathbb{A}^n$ es irreducible si y solamente si el ideal $I(Y)$ de $\Bbbk[\mathbb{A}^n]$ es primo.*

*Demostración.* Supongamos primero que $Y$ es irreducible y que $f$ y $g$ son elementos de $\Bbbk[\mathbb{A}^n]$ tales que $fg \in I(Y)$. Es claro que $Y \subseteq Z(f) \cup Z(g)$ y, de acuerdo al Lema **1.6.1**, esto implica que alguno de los dos cerrados $Z(f)$ o $Z(g)$ contiene a $Y$: así, alguna de las funciones $f$ o $g$ pertenece a $I(Y)$. Esto muestra que $I(Y)$ es un ideal primo.

Recíprocamente, supongamos que el ideal $I(Y)$ es primo y que $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ son dos ideales de $\Bbbk[\mathbb{A}^n]$ tales que $Y \subseteq Z(\mathfrak{a}) \cup Z(\mathfrak{b})$. Tenemos entonces que

$$I(Y) \supseteq I(Z(\mathfrak{a}) \cup Z(\mathfrak{b})) = I(Z(\mathfrak{a})) \cap I(Z(\mathfrak{b})) \supseteq \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}.$$

Como $I(Y)$ es primo, esto implica que alguno de $\mathfrak{a}$ o $\mathfrak{b}$ está contenido en $I(Y)$ y, por lo tanto, que $Y = Z(I(Y))$ está contenido alguno de $Z(\mathfrak{a})$ o $Z(\mathfrak{b})$: vemos así que $Y$ es irreducible. □

**1.6.4.** Usando esta caracterización de los cerrados irreducibles de $\mathbb{A}^n$ podemos ahora dar muchos ejemplos de conjuntos irreducibles:

**Corolario.** $(i)$ *$\mathbb{A}^n$ es un espacio irreducible.*

$(ii)$ *Si $f \in \Bbbk[\mathbb{A}^n]$ es un polinomio irreducible, entonces $Z(f)$ es un cerrado irreducible de $\mathbb{A}^n$.*

*Demostración.* La primera afirmación es consecuencia de que $I(\mathbb{A}^n)$ es el ideal nulo de $\Bbbk[\mathbb{A}^n]$ y es, por lo tanto, primo. Por otro lado, si $f$ es un elemento irreducible de $\Bbbk[\mathbb{A}^n]$, entonces no es constante y, como $\Bbbk[\mathbb{A}^n]$ es un dominio de factorización única, el ideal $(f)$ es primo: esto nos dice que el cerrado $Z(f)$ es no vacío e irreducible. □

**1.6.5. Proposición.** *Sea $X$ un espacio topológico.*

$(i)$ *Si $X$ es irreducible, todo abierto no vacío de $X$ es denso e irreducible.*

$(ii)$ *Si $Y$ es un subconjunto irreducible de $X$, entonces su clausura $\overline{Y}$ también es irreducible.*

*Demostración.* $(i)$ Sea $U$ un abierto no vacío de $X$. Como $X$ es la unión de sus dos cerrados $\overline{U}$ y $X \setminus U$ e irreducible, tiene que coincidir con alguno de ellos. El segundo es un subconjunto propio de $X$, porque $U$ no es vacío, así que $\overline{U} = X$, esto es, $U$ es denso en $X$. Por otro lado, supongamos que $F_1$ y $F_2$ son cerrados de $X$ tale que $U \subseteq F_1 \cup F_2$. Entonces $X = \overline{U} \subseteq \overline{F_1 \cup F_2} = F_1 \cup F_2$ y, por lo tanto, alguno de $F_1$ o $F_2$ coincide con $X$ y, en particular, contiene a $U$.

$(ii)$ Sea $Y$ un subconjunto irreducible de $X$ y supongamos que $\overline{Y} \subseteq F_1 \cup F_2$, con $F_1$ y $F_2$ cerrados de $X$. Como claramente $Y \subseteq F_1 \cup F_2$, la hipótesis nos dice que alguno de $F_1$ o $F_2$ contiene a $Y$ y, como es cerrado, también a $\overline{Y}$. Esto nos dice que $\overline{Y}$ es irreducible. □

**1.6.6. Proposición.** *Sea $X$ un espacio topológico noetheriano. Si $Y$ es un cerrado no vacío de $X$, entonces existen cerrados irreducibles $Y_1, \dots, Y_n$ tales que*

- $Y = Y_1 \cup \cdots \cup Y_n$ *e*
- $Y_i \not\subseteq Y_j$ *si $i$ y $j$ son elementos distintos de $[\![n]\!]$.*

*Tanto el número $n$ como el conjunto $\{Y_1, \dots, Y_n\}$ están bien determinados por $Y$.*

Llamamos a los cerrados $Y_1, \dots, Y_n$ las ***componentes irreducibles*** de $Y$.

*Demostración.* Sea $S$ el conjunto de todos los cerrados de $X$ que no son unión finita de cerrados irreducibles y supongamos que $S \neq \varnothing$. Como $X$ es noetheriano, existe en $S$ un elemento minimal: llamémoslo $F$. Este cerrado $F$ no puede ser irreducible —ya que en ese caso sería obviamente unión finita de cerrados irreducibles— así que hay cerrados $F_1$ y $F_2$ de $X$ propiamente contenidos en $F$ tales que $F = F_1 \cup F_2$. Como $F$ es minimal en $S$, ni $F_1$ ni $F_2$ pertenecen a $S$: se sigue de esto que cada uno de ellos es unión finita de cerrados irreducibles y, por lo tanto, su unión $F$ también. Esto es absurdo, ya que $F$ pertenece a $S$.

Sea $Y$ un cerrado no vacío de $X$. Lo que acabamos de probar nos dice que $Y$ es unión de cerrados irreducibles. Sea $n$ el menor elemento de $\mathbb{N}$ tal que existen cerrados irreducibles $Y_1, \dots, Y_n$ con $Y = \bigcup_{i=k}^{n} Y_k$. Si hubiera índices $i$ y $j$ en $[\![n]\!]$ tales que $Y_i \subseteq Y_j$ tendríamos que $Y = \bigcup_{k \in [\![n]\!] \setminus i} Y_k$, contradiciendo la minimalidad de $n$. Vemos así que la afirmación de existencia del enunciado es cierta.

Veamos ahora la unicidad. Supongamos que $m$, $m \in \mathbb{N}$ y $Y_1, \dots, Y_n, Y'_1, \dots, Y'_m$ son cerrados irreducibles de $X$ tales que

- $Y_1 \cup \dots \cup Y_n = Y = Y'_1 \cup \dots \cup Y'_m$,
- $Y_i \not\subseteq Y_j$ si $i \in [\![n]\!]$, y de $[\![n]\!]$, y
- $Y'_i \not\subseteq Y'_j$ si $i$ y $j$ son elementos distintos de $[\![m]\!]$.

Si $i \in [\![n]\!]$, entonces $Y_i \subseteq Y'_1 \cup \dots \cup Y'_m$ y, como $Y_i$ es irreducible, existe un elemento $\phi(i) \in [\![m]\!]$ tal que $Y_i \subseteq Y'_{\phi(i)}$. Existe entonces una función $\phi : [\![n]\!] \to [\![m]\!]$ tal que $Y_i \subseteq Y'_{\phi(i)}$ para todo $i \in [\![n]\!]$. De manera similar, por supuesto, existe otra función $\psi : [\![m]\!] \to [\![n]\!]$ tal que $Y'_j \subseteq Y_{\psi(j)}$ para todo $j \in [\![m]\!]$.

Si $i \in [\![n]\!]$, entonces $Y_i \subseteq Y'_{\phi(i)} \subseteq Y_{\psi(\phi(i))}$ y esto implica que $\psi(\phi(i)) = i$. Simétricamente, tenemos que $\phi(\psi(j)) = j$ para todo $j \in [\![m]\!]$ y, por lo tanto, las funciones $\phi$ y $\psi$ son mutuamente inversas. Por un lado, esto nos dice que $n = m$. Por otro, para cada $i \in [\![n]\!]$ esto nos dice que $Y_i \subseteq Y'_{\phi(i)} \subseteq Y_i$, así que $Y_i = Y'_{\phi(i)}$: esto significa que los conjuntos $\{Y_1, \dots, Y_n\}$ y $\{Y'_1, \dots, Y'_m\}$ son iguales. $\square$

**1.6.7.** Por ejemplo, supongamos que $f \in \mathbb{k}[\mathbb{A}^n]$ se factoriza en la forma $f = f_1^{r_1} \cdots f_n^{r_n}$ con $f_1, \dots, f_n$ elementos irreducibles de $\mathbb{k}[\mathbb{A}^n]$ no asociados dos a dos y $r_1, \dots, r_n \in \mathbb{N}$. En ese caso, la descomposición de $Z(f)$ como unión de componentes irreducibles es

$$Z(f) = Z(f_1) \cup \dots \cup Z(f_n).$$

En efecto, los $n$ cerrados que aparecen aquí a la derecha son irreducibles, porque los polinomios $f_1, \dots, f_n$ son irreducibles, y ninguno contiene a otro porque no hay dos de esos polinomios que sean asociados.

**1.6.8.** Las componentes irreducibles de un cerrado de $\mathbb{A}^n$ tienen una descripción algebraica sencilla:

**Proposición.** *Sean $Y$ y $F$ dos cerrados de $\mathbb{A}^n$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(*a*) *$F$ es una componente irreducible de $Y$.*

(*b*) *$F$ es un elemento maximal del conjunto de los cerrados irreducibles contenidos en $Y$.*

(*c*) *El ideal $I(F)$ es un elemento minimal del conjunto de ideales primos que contienen a $I(Y)$.*

*Demostración.* La equivalencia entre las afirmaciones (*ii*) y (*iii*) es consecuencia inmediata de la correspondencia dada por la Proposición 1.4.4 y la Proposición 1.6.3. Veamos la equivalencia de (*i*) y (*ii*).

Sea $Y = Y_1 \cup \cdots \cup Y_m$ la descomposición en componentes irreducibles de $Y$ y sea $\mathscr{S}$ el conjunto de los cerrados irreducibles contenidos en $Y$. Si $G$ es un elemento maximal de $\mathscr{S}$, entonces $G \subseteq Y_1 \cup \cdots \cup Y_m$ y, por lo tanto, existe $i \in [\![m]\!]$ tal que $G \subseteq Y_i$: como $Y_i \in \mathscr{S}$ y $G$ es maximal, vemos que debe ser $G = Y_i$.

Sea, por otro lado, $i \in [\![m]\!]$. Claramente $Y_i$ pertenece a $\mathscr{S}$. Supongamos que $F$ es un elemento de $\mathscr{S}$ tal que $Y_i \subseteq F$. Como $F \subseteq Y_1 \cup \cdots \cup Y_m$, existe $j \in [\![m]\!]$ tal que $F \subseteq Y_j$ y, en consecuencia, $Y_i \subseteq Y_j$. Esto implica que $i = j$ y, entonces, que $Y_i = F$, de manera que $Y_i$ es un elemento maximal de $\mathscr{S}$. □

## §1.7. Variedades cuasi-afines y funciones regulares

**1.7.1.** Una ***variedad afín*** es un cerrado irreducible de $\mathbb{A}^n$ y una ***variedad cuasi-afín*** es un abierto de una variedad afín. De acuerdo a la Proposición **1.6.5** toda variedad cuasi-afín es irreducible y densa en una variedad afín. Observemos, por otro lado, que todo abierto de una variedad cuasi-afín es él mismo una variedad cuasi-afín.

**1.7.2.** Sea $Y$ una variedad cuasi-afín en $\mathbb{A}^n$. Una función $f : Y \to \Bbbk$ es ***regular*** en un punto $p$ de $Y$ si existe un abierto $U$ de $Y$ que contiene a $p$ y funciones polinomiales $g, h \in \Bbbk[\mathbb{A}^n]$ tales que $h(q) \neq 0$ y $f(q) = g(q)/h(q)$ para todo $q \in U$, y es ***regular*** si es regular en cada uno de los puntos de $Y$. Escribimos $\mathcal{O}(Y)$ al conjunto de todas las funciones $Y \to \Bbbk$ que son regulares en $Y$.

**Proposición.** *Sea $Y$ una variedad cuasi-afín en $\mathbb{A}^n$. El conjunto $\mathcal{O}(Y)$ es una subálgebra del álgebra $\Bbbk^Y$ de todas las funciones $Y \to \Bbbk$. Todo elemento de $\mathcal{O}(Y)$ es una función continua.*

*Demostración.* Es evidente que las funciones constantes $Y \to \Bbbk$ están en $\mathcal{O}(Y)$, y que si $f_1$ y $f_2$ son elementos de $\mathcal{O}(Y)$ entonces $f_1 + f_2$ y $f_1 f_2$ también lo son. Esto es suficiente para concluir que $\mathcal{O}(Y)$ es una subálgebra de $\Bbbk^Y$.

Sea $f : Y \to \Bbbk$ una función regular. Para ver que es continua basta mostrar que $f^{-1}(\lambda)$ es un cerrado para todo $\lambda \in \Bbbk$, ya que $\Bbbk$ tiene su topología cofinita. Fijemos entonces $\lambda \in \Bbbk$. Sea $p \in f^{-1}(\lambda)$. Como $f$ es regular en $p$, existe un abierto $U_p$ de $Y$ que contiene a $p$ y funciones polinomiales $g_p, h_p \in \Bbbk[\mathbb{A}^n]$ tales que $h_p(q) \neq 0$ y $f(q) = g_p(q)/h_p(q)$ para todo $q \in U$. Es inmediato verificar que

$$U_p \cap f^{-1}(\lambda) = U_p \cap Z(g_p - \lambda h_p).$$

Tenemos así un cubrimiento abierto $\mathscr{U} = \{U_p : p \in Y\}$ de $Y$ en $\mathbb{A}^n$ tal que para cada

$U \in \mathscr{U}$ la intersección de $U \cap f^{-1}(\lambda)$ es un cerrado de $U$. Esto implica que $f^{-1}(\lambda)$ es un cerrado de $Y$. $\square$

**1.7.3. Corolario.** *Sea $Y$ una variedad cuasi-afín en $\mathbb{A}^n$. Si $f$, $g : Y \to \Bbbk$ son funciones regulares, entonces el conjunto $\Delta = \{p \in Y : f(p) = g(p)\}$ es un cerrado de $Y$. Si este conjunto contiene un abierto, entonces $f = g$.*

*Demostración.* Si $f$ y $g$ son elementos de $\mathcal{O}(Y)$, entonces $f - g$ también es una función regular y $\Delta = (f - g)^{-1}(0)$ es un cerrado de $Y$, porque $\Bbbk$ es un espacio $T_1$. Si $\Delta$ contiene un abierto no vacío $U$ de $Y$, entonces de la Proposición 1.6.5 y el hecho de que $Y$ es irreducible se sigue que $U$ es denso en $Y$ y, por lo tanto, que $\Delta = Y$: esto prueba la segunda afirmación del corolario. $\square$

**1.7.4.** El siguiente caso particular es útil:

**Corolario.** *Sea $Y$ una variedad cuasi-afín en $\mathbb{A}^n$. Si $f : Y \to \Bbbk$ es una función regular, entonces el conjunto $Z(f) = \{p \in Y : f(p) = 0\}$ es un cerrado de $Y$. Si este conjunto contiene un abierto, entonces $f = 0$.*

*Demostración.* Basta poner $g = 0$ en el corolario anterior. $\square$

**1.7.5.** Una observación útil y casi inmediata es que una función regular es inversible si y solamente si es puntualmente inversible. La parte más interesante de esta afirmación es la que nos da el siguiente resultado:

**Proposición.** *Sea $Y$ una variedad quasi-afín en $\mathbb{A}^n$ y sea $f : Y \to \Bbbk$ una función regular. Si para todo $p \in Y$ se tiene que $f(p) \neq 0$, entonces la función $1/f : Y \to \Bbbk$ también es regular.*

*Demostración.* Supongamos que $f(p) \neq 0$ para todo $p \in Y$ y mostremos que $1/f$ es regular. Sea $p \in Y$. Como $f$ es regular, existen un entorno abierto $U$ de $p$ en $Y$ y funciones polinomiales $g, h \in \Bbbk[\mathbb{A}^n]$ tales que $h(q) \neq 0$ y $f(q) = g(q)/h(q)$ para todo $q \in U$. Más aún, como $f$ no se anula en ningún punto de $Y$, tenemos que también $g(q) \neq 0$ para todo $q \in U$ y, por lo tanto, que $1/f(q) = h(q)/g(q)$ para todo $q \in U$. Esto muestra que la $1/f$ es regular en $p$. $\square$

**1.7.6.** Si $X$ es una variedad cuasi-afín en $\mathbb{A}^n$, una ***subvariedad*** de $X$ es un subconjunto $Y$ de $X$ que es irreducible y localmente cerrado —esto es, la intersección de un cerrado y un abierto de $X$. Es claro que $Y$ es en esa situación una variedad cuasi-afín en $\mathbb{A}^n$.

Notemos que las subvariedades de $\mathbb{A}^n$ son precisamente las variedades cuasi-afines en $\mathbb{A}^n$. Por otro lado, es inmediato que la relación de subvariedad es transitiva: si $Y$

es una subvariedad de una variedad cuasi-afín $X$ y $Z$ una de $Y$, entonces $Z$ es una subvariedad de $X$.

**1.7.7. Proposición.** *Sea $X$ una variedad cuasi-afín en $\mathbb{A}^n$ y sea $Y$ una subvariedad de $X$.*

(*i*) *Si $f$ es un elemento de $\mathcal{O}(X)$, entonces la restricción $f|_Y$ es un elemento de $\mathcal{O}(Y)$.*

(*ii*) *La función*

$$\mathsf{res}_Y^X : f \in \mathcal{O}(X) \longmapsto f|_Y \in \mathcal{O}(Y)$$

*es un morfismo de álgebras.*

*Demostración.* (*i*) Sea $f \in \mathcal{O}(X)$ y sea $p \in Y$. Como $p \in X$, sabemos que existe un entorno abierto $U$ de $p$ en $X$ y funciones polinomiales $g, h \in \Bbbk[\mathbb{A}^n]$ tales que $h(q) \neq 0$ y $f(q) = g(q)/h(q)$ para todo $q \in U$. La intersección $U \cap Y$ es un entorno abierto de $p$ en $Y$ y por supuesto $h(q) \neq 0$ y $(f|_Y)(q) = g(q)/h(q)$ para cada $q \in U \cap Y$: esto muestra que la restricción $f|_Y$ es regular en $p$.

(*ii*) La función $f \in \Bbbk^X \mapsto f|_Y \in \Bbbk^Y$ es un morfismo de álgebras y, de acuerdo a la primera parte de la proposición, se restringe a la función $\mathsf{res}_Y^X : \mathcal{O}(X) \to \mathcal{O}(Y)$ del enunciado, que es, por lo tanto, también un morfismo de álgebras. □

**1.7.8. Ejemplo.** Consideremos un abierto no vacío $Y$ de $\mathbb{A}^1$, que es una variedad quasi-afín. Sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ los elementos de $\mathbb{A}^1 \setminus U$ listados sin repeticiones sea $w = \prod_{i=1}^n (x - \lambda_i)$. Si $g \in \Bbbk[\mathbb{A}^1]$ y $\nu \in \mathbb{N}_0$, la función

$$q \in Y \longmapsto \frac{g(q)}{w(q)^\nu} \in \Bbbk \tag{5}$$

es claramente regular. Es fácil ver que hay por lo tanto un morfismo de álgebras

$$\Bbbk[\mathbb{A}^1]_w \to \mathcal{O}(Y) \tag{6}$$

de la localización de $\Bbbk[\mathbb{A}^1]$ en $w$, que asigna a cada fracción $g/w^\nu$ de $\Bbbk[\mathbb{A}^1]_w$ la función (5). Este morfismo es inyectivo —esto es inmediato. Mostremos que es, de hecho, un isomorfismo. Esto describe completamente el álgebra $\mathcal{O}(Y)$.

Sea $f : Y \to \Bbbk$ una función regular y sea $p \in Y$. Como $f$ es regular en $p$, hay un abierto $U$ de $Y$ que contiene a $p$ y funciones polinomiales $g, h \in \Bbbk[\mathbb{A}^1]$ tales que $h(q) \neq 0$ y $f(q) = g(q)/h(q)$ para todo $q \in U$, y podemos elegir a $g$ y a $h$ de manera que sean coprimos.

Sea $r \in Y \setminus U$. La regularidad de $f$ en $r$ implica que existe un abierto $V$ de $Y$ y funciones polinomiales $u, v \in \Bbbk[\mathbb{A}^1]$ tales que $v(q) \neq 0$ y $f(q) = u(q)/v(q)$ para todo $q \in V$. En particular, tenemos que $u(q)/v(q) = g(q)/h(q)$ o, equivalentemente, que

$u(q)h(q) = g(q)v(q)$ para todo elemento $q$ del conjunto $U \cap V$. Como este conjunto es infinito, de esto deducimos que, de hecho, hay una igualdad de polinomios $uh = gv$. Ahora bien, como $v(r) \neq 0$ y $g$ y $h$ son coprimos, esta igualdad implica que $h(r) \neq 0$.

Concluimos de esta manera que el polinomio $h$ tiene todas sus raíces en el conjunto $\mathbb{A}^1 \setminus U$. Esto implica que existe $\nu \in \mathbb{N}_0$ tal que $h$ divide a $w^\nu$. Supongamos entonces que $k \in \Bbbk[\mathbb{A}^1]$ es tal que $w^\nu = gk$. La función

$$f' : q \in Y \longmapsto g(q)k(q)/w(q)^\nu \in \Bbbk$$

es claramente regular y coincide con $f$ en el abierto $U$: se sigue de esto que, de hecho, coincide con $f$. La función $f$ es, por lo tanto, la imagen de la fracción $gk/w^\nu$ por el morfismo (6) y este morfismo es, como queríamos ver, sobreyectivo.

Como casos particulares del resultado que obtuvimos, notemos que tenemos que el álgebra $\mathcal{O}(\mathbb{A}^1)$ es isomorfa al álgebra de polinomios $\Bbbk[x]$, mientras que $\mathcal{O}(\mathbb{A}^1 \setminus \{0\})$ es isomorfa al álgebra de polinomios de Laurent $\Bbbk[x^{\pm 1}]$. ■

## §1.8. Morfismos

**1.8.1.** Si $X$ e $Y$ son dos variedades cuasi-afines en $\mathbb{A}^n$ y $\mathbb{A}^m$, respectivamente, entonces una función $\phi : X \to Y$ es un ***morfismo*** si es continua y para cada abierto $U$ de $Y$ y cada $f \in \mathcal{O}(U)$ se tiene que $f \circ \phi \in \mathcal{O}(\phi^{-1}(U))$. Observemos que esta condición tiene sentido, ya que como $f$ es continua el conjunto $\phi^{-1}(U)$ es un abierto de $X$. Cuando $\phi$ es un morfismo, tenemos claramente una función

$$\phi^* : f \in \mathcal{O}(Y) \longmapsto f \circ \phi \in \mathcal{O}(X)$$

y ésta es, como puede verificarse inmediatamente, un morfismo de álgebras.

**1.8.2.** Hay una subcategoría de la categoría de conjuntos que tiene como objetos a las variedades cuasi-afines y como morfismos los morfismos que acabamos de definir. Esto es consecuencia del siguiente resultado:

**Proposición.** (*i*) *Si $X$ es una variedad cuasi-afín, la función identidad $\mathrm{id}_X : X \to X$ es un morfismo de variedades cuasi-afines.*

(*ii*) *Si $\phi : X \to Y$ y $\psi : Y \to Z$ son dos morfismos de variedades cuasi-afines, la composición $\psi \circ \phi : X \to Y$ también es un morfismo de variedades cuasi-afines.*

Escribiremos desde ahora **QAff** a la subcategoría de la categoría de conjuntos de las variedades cuasi-afines y los morfismos entre ellas, y **Aff** a su subcategoría plena generada por las variedades afines.

*Demostración.* La primera afirmación es evidente. Veamos la segunda. Sean $\phi : X \to Y$ y $\psi : Y \to Z$ morfismos de variedades cuasi-afines. La composición $g \circ f$ es continua. Por otro lado, si $U$ es un abierto de $Z$ y $f \in \mathcal{O}(U)$, entonces $f \circ \psi \in \mathcal{O}(\psi^{-1}(U))$, porque $\psi$ es regular, y $f \circ \psi \circ \phi \in \mathcal{O}(\phi^{-1}(\psi^{-1}(U))) = \mathcal{O}((\psi \circ \phi)^{-1}(U))$. Esto prueba que la composición $\psi \circ \phi$ es un morfismo de variedades cuasi-afines. □

**1.8.3.** Hay un functor $\mathcal{O} : \mathbf{QAff} \to \mathbf{Alg}^{\mathrm{op}}$ con valores en la categoría de las álgebras conmutativas que asigna a cada variedad cuasi-afín $X$ de $\mathbf{QAff}$ el álgebra $\mathcal{O}(X)$, y a cada morfismo $\phi : X \to Y$ de variedades cuasi-afines el morfismo de álgebras $\phi^* : \mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(X)$. Que esta asignación define en efecto un functor es precisamente el contenido de la siguiente proposición:

**Proposición.** (*i*) *Si $X$ es una variedad cuasi-afín e* $\mathrm{id}_X : X \to X$ *es el morfismo identidad de $X$, entonces* $\mathrm{id}^* : \mathcal{O}(X) \to \mathcal{O}(X)$ *es la identidad de* $\mathcal{O}(X)$.

(*ii*) *Si $\phi : X \to Y$ y $\psi : Y \to Z$ son dos morfismos de variedades cuasi-afines, entonces* $(\psi \circ \phi)^* = \phi^* \circ \psi^*$ *como morfismos* $\mathcal{O}(Z) \to \mathcal{O}(X)$.

*Demostración.* Si $X$ es una variedad cuasi-afín e $\mathrm{id}_X : X \to X$ su morfismo identidad, entonces para cada función regular $f \in \mathcal{O}(X)$ se tiene que $\mathrm{id}_X^*(f) = f \circ \mathrm{id}_X = f$: esto muestra que $\mathrm{id}_X^* = \mathrm{id}_{\mathcal{O}(X)}$.

Sean, por otro lado, $\phi : X \to Y$ y $\psi : Y \to Z$ morfismos de variedades cuasi-afines Para cada $f \in \mathcal{O}(Z)$ se tiene que

$$(\phi^* \circ \phi^*)(f) = \phi^*(\psi^*(f)) = \phi^*(f \circ \psi) = (f \circ \psi) \circ \phi = f \circ (\psi \circ \phi) = (\psi \circ \phi)^*(f)$$

y esta igualdad prueba la segunda afirmación del enunciado. □

**1.8.4.** Una consecuencia inmediata de que tenemos un functor $\mathcal{O} : \mathbf{QAff} \to \mathbf{Alg}^{\mathrm{op}}$ es que el álgebra de funciones regulares sobre una variedad-quasi afín es un invariante de esta a menos de isomorfismo:

**Corolario.** *Si $\phi : X \to Y$ es un isomorfismo de variedades cuasi-afines, el morfismo de álgebras* $\phi^* : \mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(X)$ *es un isomorfismo.*

*Demostración.* En efecto, si $\phi : X \to Y$ es un isomorfismo de variedades cuasi-afines y $\psi : Y \to X$ es el isomorfismo inverso, entonces $\phi^* \circ \psi^* = (\psi \circ \phi)^* = \mathrm{id}_X^* = \mathrm{id}_{\mathcal{O}(X)}$ y, de manera similar, $\psi^* \circ \phi^* = \mathrm{id}_{\mathcal{O}(Y)}$, de manera que los morfismos de álgebras $\phi^* : \mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(X)$ y $\psi^* : \mathcal{O}(X) \to \mathcal{O}(Y)$ son isomorfismos inversos. □

**1.8.5.** En muchas situaciones querremos restringir o correstringir morfismos de variedades cuasi-afines. Esto es posible gracias al siguiente resultado:

**Proposición.** *Sean $X$ e $Y$ variedades cuasi-afines y sea $\phi : X \to Y$ una función.*

(*i*) *Si $Z$ es una subvariedad de $X$ y $\phi$ es un morfismo, entonces la restricción $\phi|_Z : Z \to Y$ también lo es.*

(*ii*) *Si $Z$ es una subvariedad de $Y$ tal que $\phi(X) \subseteq Z$, entonces la correstricción $\phi|^Z : X \to Z$ es un morfismo si y solamente si $\phi$ es un morfismo.*

*Demostración.* (*i*) Sea $Z$ una subvariedad de $X$ y supongamos que $\phi$ es un morfismo. Sabemos que la restricción $\phi|_Z$ es continua. Sea $U$ un abierto de $Y$ y sea $f \in \mathcal{O}(U)$. Como $\phi$ es un morfismo, sabemos que $f \circ \phi$ es un elemento de $\mathcal{O}(\phi^{-1}(U))$ y, por lo tanto, la composición $f \circ \phi|_Z$, que coincide con la restricción $(f \circ \phi)|_Z$, es un elemento de $\mathcal{O}((\phi|_Z)^{-1}(U)) = \mathcal{O}(\phi^{-1}(U) \cap Z)$. Esto prueba que $\phi|_Z$ es un morfismo.

(*ii*) Sea $Z$ una subvariedad de $Y$ tal que $\phi(X) \subseteq Z$. Supongamos primero que la correstricción $\phi|^Z : X \to Z$ es un morfismo y mostremos que $\phi : X \to Y$ es un morfismo. Como $\phi$ es la composición de $\phi|^Z$ con la inclusión $Z \to Y$, es suficiente con mostrar que esta última es un morfismo y esto es consecuencia de la primera parte de la proposición, que ya probamos, ya que esa inclusión es la restricción del morfismo identidad $\mathrm{id}_Y : Y \to Y$ a la subvariedad $Z$ de $Y$.

Para ver a recíproca, supongamos que $\phi : X \to Y$ es un morfismo y mostremos que la correstricción $\phi|^Z : X \to Z$ también lo es. Esta correstricción es claramente continua. Sea $U$ un abierto de $Z$ y sea $f \in \mathcal{O}(U)$: queda que probemos que $f \circ \phi|^Z$ es regular en $(\phi|^Z)^{-1}(U)$. Sea $p \in (\phi|^Z)^{-1}(U)$. Como $\phi(p)$ es un elemento de $U$ y $f$ es regular en $U$, existe un abierto $V$ de $U$ y funciones polinomiales $g, h \in \Bbbk[\mathbb{A}^n]$ tales que $h(q) \neq 0$ y $f(q) = g(q)/h(q)$ para todo $q \in V$. La función polinomial $h$ se restringe a una función regular en $Y$, así que $W = Y \setminus Z(h)$ es un abierto de $Y$. Sobre este abierto tenemos la función $r : q \in W \mapsto g(q)/h(q) \in \Bbbk$, que es regular, así que como $\phi$ es un morfismo la función $r \circ \phi : \phi^{-1}(W) \to \Bbbk$ es regular. Ahora bien, como $Z$ contiene la imagen de $\phi$, tenemos que $\phi^{-1}(W) = \phi^{-1}(Z \setminus Z(h)) \supseteq \phi^{-1}(V)$ y la restricción de $r \circ \phi$ a $\phi^{-1}(V)$ coincide con $f \circ \phi$. Esto muestra que $f \circ \phi$ es regular en $p$. □

**1.8.6.** Un caso particular de la segunda parte de proposición que acabamos de probar es:

**Corolario.** *Sea $Y$ una variedad cuasi-afín y sea $Z$ una subvariedad de $Y$. La inclusión $\iota : Z \to Y$ es un morfismo.*

*Demostración.* En efecto, $\iota$ es la restricción del morfismo identidad $\mathrm{id}_Y : Y \to Y$ de $Y$ a la subvariedad $Z$ de su dominio. □

## §1.9. Anillos locales

**1.9.1.** Sea $Y$ una variedad cuasi-afín y sea $p$ un punto de $Y$. Un ***elemento de función regular*** en $p$ es un par ordenado $(U, f)$ con $U$ un abierto de $Y$ que contiene a $p$ y $f \in \mathcal{O}(U)$. Escribimos $\mathscr{E}_p(Y)$ al conjunto de los elementos de funciones regulares en $p$.

Dos elementos de funciones regulares $(U, f)$ y $(V, g)$ en $p$ son ***equivalentes*** si $f|_{U\cap V} = g|_{U\cap V}$, y en ese caso escribimos $(U, f) \sim (V, g)$. Esta relación es una relación de equivalencia en el conjunto $\mathscr{E}_p(Y)$. Que es reflexiva y simétrica es evidente. Mostremos que es transitiva. Sean $(U, f)$, $(V, g)$ y $(W, h)$ elementos de funciones regulares en $p$ tales que $(U, f) \sim (V, g)$ y $(V, g) \sim (W, h)$, de manera que $f|_{U\cap V} = g|_{U\cap V}$ y $g|_{V\cap W} = h|_{V\cap W}$. De esto se sigue que $f$ y $h$ coinciden en $U \cap V \cap W$: como este es un abierto no vacío del abierto $U \cap W$, que es irreducible, tenemos que de hecho $f$ y $h$ coinciden sobre todo $U \cap W$. En otras palabras, es $(f, U) \sim (h, W)$.

Escribimos $\mathcal{O}_{p,Y}$ al conjunto cociente $\mathscr{E}_p(Y)/\sim$ y llamamos a sus elementos ***gérmenes*** de funciones regulares. Si $(U, f)$ es un elemento de función regular en $p$, escribimos $\langle U, f\rangle_p$ o $\langle U, f\rangle_{p,Y}$, si es necesario dejar de manifiesto a la variedad $Y$ en la notación, al correspondiente germen, esto es, a la clase de equivalencia de $(U, f)$ en $\mathcal{O}_{p,Y}$.

**1.9.2. Proposición.** *Sea $Y$ una variedad cuasi-afín y sea $p$ un punto de $Y$. El conjunto $\mathcal{O}_{p,Y}$ es una $\Bbbk$-álgebra de manera tal que*

$$\lambda \cdot \langle U, f\rangle_p = \langle U, \lambda f\rangle_p,$$
$$\langle U, f\rangle_p + \langle V, g\rangle_p = \langle U \cap V, f|_{U\cap V} + g|_{U\cap V}\rangle_p$$

*y*

$$\langle U, f\rangle_p \cdot \langle V, g\rangle_p = \langle U \cap V, f|_{U\cap V} \cdot g|_{U\cap V}\rangle_p$$

*siempre que $\lambda \in \Bbbk$ y $\langle U, f\rangle_p$, $\langle V, g\rangle_p \in \mathcal{O}_{p,Y}$. Se trata de un álgebra local, con ideal maximal*

$$\mathfrak{m} = \{\langle U, f\rangle_p \in \mathcal{O}_{p,Y} : f(p) = 0\}.$$

*El cuerpo de residuos $\mathcal{O}_{p,Y}/\mathfrak{m}$ es $\Bbbk$.*

Llamamos a $\mathcal{O}_{p,Y}$ el ***anillo local*** de $P$ en $p$.

*Demostración.* La primera afirmación es consecuencia de una serie de verificaciones más o menos automáticas. Hay una función $e : \mathcal{O}_{p,Y} \to \Bbbk$ tal que $e(\langle U, f\rangle_p) = f(p)$ para todo germen $\langle U, f\rangle_f \in \mathcal{O}_{p,Y}$ y se trata de un morfismo de álgebras. El conjunto $\mathfrak{m}$ del enunciado es su núcleo, así que se trata de un ideal de $\mathcal{O}_{p,Y}$. Más aún, como este morfismo $e$ es claramente sobreyectivo, este ideal $\mathfrak{m}$ es maximal y $\mathcal{O}_{p,Y}/\mathfrak{m} \cong \Bbbk$. Para ver que $\mathfrak{m}$ es el único ideal maximal de $\mathcal{O}_{p,Y}$ es suficiente que mostremos que todo elemento de $\mathcal{O}_{p,Y} \setminus \mathfrak{m}$ es inversible.

Sea entonces $\langle U, f\rangle_p$ un elemento de $\mathcal{O}_{p,Y}$ tal que $f(p) \neq 0$. La función $f : U \to \Bbbk$ es continua, así que el conjunto $V = U \setminus f^{-1}(0)$ es un abierto de $U$ y, por lo tanto, de $Y$. Como $f$ no se anula en $V$, podemos considerar la función $1/f : V \to \Bbbk$. Mostremos que es regular en $V$. Si $q \in V$, entonces existe un abierto $W$ de $U$ que contiene a $q$ y funciones regulares $g, h \in \mathcal{O}(W)$ tales que $h(r) \neq 0$ y $f(r) = g(r)/h(r)$ para cada $r \in W$. Observemos que la elección de $V$ implica que $g(r) \neq 0$ si $r \in V \cap W$, así que $1/f(r) = h(r)/g(r)$ para cada $r \in V \cap W$. Vemos así que $1/f \in \mathcal{O}(V)$ y podemos entonces considerar el germen $\langle V, 1/f\rangle_p$. Es inmediato que es un inverso para $\langle U, f\rangle_p$ en $\mathcal{O}_{p,Y}$. □

**1.9.3.** Supongamos que $\phi : X \to Y$ es un isomorfismo de variedades cuasi-afines y que $p \in X$. Si $(U, f)$ es un elemento de función regular en $\phi(p)$, entonces $(\phi^{-1}(U), f \circ \phi)$ es un elemento de función regular en $p$. Más aún, si $(U, f)$ y $(V, g)$ son dos elementos de funciones regulares en $p$ y $(U, f) \sim (V, g)$, entonces $(\phi^{-1}(U), f \circ \phi) \sim (\phi^{-1}(V), g \circ \phi)$. Esto implica que hay una función $\phi_p^* : \mathcal{O}_{\phi(p),Y} \to \mathcal{O}_{p,X}$ tal que

$$\phi_p^*(\langle U, f\rangle_{\phi(p)}) = \langle \phi^{-1}(U), f \circ \phi\rangle_p$$

para cada germen $\langle U, f\rangle_{\phi(p)} \in \mathcal{O}_{\phi(p),Y}$. La observación más importante a hacer sobre esta función es la siguiente:

**Proposición.** *Si $\phi : X \to Y$ es un morfismo de variedades cuasi-afines y $p \in X$, entonces la función $\phi_p^* : \mathcal{O}_{\phi(p),Y} \to \mathcal{O}_{p,X}$ es un morfismo local de álgebras.*

Recordemos que si $A$ y $B$ son dos anillos locales de ideales maximales $\mathfrak{m}_A$ y $\mathfrak{m}_B$, respectivamente, entonces un morfismo de anillos $h : A \to B$ es ***local*** si $h(\mathfrak{m}_A) \subseteq \mathfrak{m}_B$ o, equivalentemente, $h^{-1}(\mathfrak{m}_B) = \mathfrak{m}_A$.

*Demostración.* Sea $\phi : X \to Y$ un morfismo de variedades cuasi-afines y sea $p \in X$. Que la función $\phi_p^* : \mathcal{O}_{\phi(p),Y} \to \mathcal{O}_{p,X}$ es un morfismo de álgebras es consecuencia inmediata de la definición de los anillos locales y de esa función. Para ver que se trata de un morfismo local es suficiente observar que si un germen $\langle U, f\rangle_{\phi(p)} \in \mathcal{O}_{\phi(p),Y}$ es tal que $f(\phi(p)) = 0$, entonces su imagen por $\phi_p^*$, el germen $\langle \phi^{-1}(U), f \circ \phi\rangle_p$, se anula en $p$. □

**1.9.4.** Estos morfismos inducidos en los anillos locales por morfismos de variedades cuasi-afines son functoriales:

**Proposición.** (*i*) *Si $\mathrm{id}_X \to X$ es el morfismo identidad de una variedad cuasi-afín $X$ y $p \in X$, entonces el morfismo $\mathrm{id}_p^* : \mathcal{O}_{p,X} \to \mathcal{O}_{p,X}$ es la identidad del anillo local $\mathcal{O}_{p,X}$.*

(*ii*) *Si* $\phi : X \to Y$ *y* $\psi : Y \to Z$ *son morfismos de variedades cuasi-afines y* $p \in X$*, entonces* $(\psi \circ \phi)^*_p = \phi^*_p \circ \psi^*_{\phi(p)} : \mathcal{O}_{\psi(\phi(p)),Z} \to \mathcal{O}_{p,X}$.

*Demostración.* Ambas afirmaciones siguen inmediatamente de la definición de los morfismos inducidos en los anillos locales dada en 1.9.3. □

**1.9.5.** Como es usual, la functorialidad descripta en la proposición anterior tiene como consecuencia el hecho de que el anillo local de un punto $p$ en una variedad cuasi-afín $X$ es un invariante del par $(X, p)$, en el siguiente sentido:

**Corolario.** *Si* $\phi : X \to Y$ *es un isomorfismo de variedades cuasi-afines y* $p \in X$*, entonces la función* $\phi^*_p : \mathcal{O}_{\phi(p),Y} \to \mathcal{O}_{p,X}$ *es un isomorfismo de álgebras.*

*Demostración.* Sea $\phi : X \to Y$ un isomorfismo de variedades cuasi-afines, sea $\psi : Y \to X$ el morfismo inverso y sea $p \in X$. De acuerdo a la Proposición 1.9.4 tenemos que $\phi^*_p \circ \psi^*_{\phi(p)} = (\psi \circ \phi)^*_p = (\mathrm{id}_X)^*_p = \mathrm{id}_{\mathcal{O}_{p,X}}$ y, de manera similar, que $\psi^*_{\phi(p)} \circ \phi^*_p = \mathrm{id}_{\mathcal{O}_{\phi(p),Y}}$. Esto nos dice que $\phi^*_p$ y $\psi^*_{\phi(p)}$ son isomorfismos de álgebras inversos. □

**1.9.6.** El anillo local de un punto en una variedad depende solamente de un entorno abierto de aquél en ella:

**Proposición.** *Sea* $Y$ *una variedad cuasi-afín, sea* $p$ *un punto de* $Y$ *y sea* $U$ *un entorno abierto de* $p$ *en* $Y$*. Si* $\iota : U \to Y$ *es la inclusión, entonces el morfismo* $\iota^*_p : \mathcal{O}_{p,Y} \to \mathcal{O}_{p,U}$ *es un isomorfismo de álgebras.*

*Demostración.* Sabemos que $\iota^*_p$ es un morfismo de álgebras, así que para probar la proposición es suficiente que mostremos que es biyectivo. Si $\langle V, f \rangle_{p,U}$ es un germen de función regular de $Y$ alrededor de $p$, entonces —porque $V$ es un abierto de $U$ y $U$ uno de $Y$— podemos considerar el germen $\langle V, f \rangle_{p,Y}$ de función regular de $Y$ alrededor de $p$ y observar que $\iota^*_p(\langle V, f \rangle_{p,Y}) = \langle V, f \rangle_{p,U}$: esto muestra que el morfismo $\iota^*_p$ es sobreyectivo. Por otro lado, si $\langle V, f \rangle_{p,Y}$ es un germen de función regular en $Y$ alrededor de $U$ cuya imagen $\iota^*_p(\langle V, f \rangle_{p,Y}) = \langle V \cap U, f|_{V \cap U} \rangle_{p,U}$ es el cero de $\mathcal{O}_{p,U}$, entonces la función $f$ se anula sobre el abierto $V \cap U$ de su dominio $V$: esto implica, ya que $V$ es irreducible, que $f = 0$ y, por lo tanto, que el morfismo $\iota^*_p$ es inyectivo. □

**1.9.7.** Si $Y$ es una variedad cuasi-afín, $p$ un punto de $Y$ y $f$ una función regular en $Y$, claramente podemos considerar el elemento de función regular $(Y, f)$ y su correspondiente germen $\langle Y, f \rangle_p$ en $\mathcal{O}_{p,Y}$. Hay por lo tanto una función $\mathrm{res}^Y_{p,Y} : \mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}_{p,Y}$ tal que $\mathrm{res}^Y_{p,Y}(f) = \langle Y, f \rangle_p$ para toda $f \in \mathcal{O}(Y)$.

**Proposición.** *La función* $\mathsf{res}^Y_{p,Y} : \mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}_{p,Y}$ *es un morfismo de álgebras inyectivo. Más aún, si* $U$ *es un abierto de* $Y$ *que contiene a* $p$ *e* $\iota : U \to Y$ *el morfismo de inclusión, entonces conmuta el diagrama*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}(Y) \arrow[r, "\iota^*"] \arrow[d, "\mathsf{res}^Y_{p,Y}"'] & \mathcal{O}(U) \arrow[d, "\mathsf{res}^U_{p,U}"] \\ \mathcal{O}_{p,Y} \arrow[r, "\iota^*_p"] & \mathcal{O}_{p,U} \end{tikzcd}$$

Aquí $\iota^*_p$ es el morfismo de la Proposición 1.9.6 e $\iota^*$ el construido en 1.8.1 a partir de la inclusión $\iota$.

*Demostración.* Que la función $\mathsf{res}^Y_{p,Y}$ es un morfismo de álgebras es inmediato de las definiciones. Por otro lado, si $f \in \mathcal{O}(Y)$ es tal que $\mathsf{res}^Y_{p,Y}(f) = 0$, de manera que el germen $\langle Y, f\rangle_p$ es nulo, entonces $f$ se anula sobre todo un entorno abierto de $p$ en $Y$ y, por lo tanto, se anula idénticamente. Esto implica que la función $\mathsf{res}^Y_{p,Y}$ es inyectiva.

Para ver la segunda afirmación del enunciado, sea $Y$ un abierto de $Y$ tal que $p \in U$, sea $\iota : U \to Y$ la inclusión, y sea $f \in \mathcal{O}(Y)$. Es $\iota^*(f) = f|_U$ y $\mathsf{res}^U_{p,U}(\iota^*(f)) = \langle U, f|_U\rangle_{p,U}$. Por otro lado, $\mathsf{res}^Y_{p,Y}(f) = \langle Y, f\rangle_{p,Y}$ y entonces $\iota^*_p(\mathsf{res}^Y_{p,Y}(f)) = \langle U, f|_U\rangle_{p,U}$. Vemos así que el diagrama conmuta, como queremos. □

## §1.10. El cuerpo de funciones racionales

**1.10.1.** Sea otra vez $Y$ una variedad cuasi-afín y sea $\mathscr{E}(Y)$ el conjunto de pares ordenados $(U, f)$ con $U$ un abierto no vacío de $Y$ y $f \in \mathcal{O}(U)$. Decimos que dos tales pares $(U, f)$ y $(V, g)$ son ***equivalentes*** si $f|_{U\cap V} = g|_{U\cap V}$ y en ese caso escribimos $(U, f) \sim (V, g)$. Observemos que como $Y$ es irreducible, tanto $U$ como $V$ son densos en $Y$ y, en particular, la intersección $U \cap V$ no es vacía.

Razonando de manera enteramente similar a como lo hicimos en 1.9.1 podemos ver que $\sim$ es una relación de equivalencia en el conjunto $\mathscr{E}(Y)$. Escribimos $K(Y)$ al conjunto cociente $\mathscr{E}(Y)/\sim$ y llamamos a sus elementos ***funciones racionales*** sobre $Y$. Así, una función racional sobre $Y$ es una función regular sobre un abierto de $Y$, que es necesariamente denso. Si $(U, f)$ es un elemento de $\mathscr{E}(Y)$, escribimos $\langle U, f\rangle$ al correspondiente elemento de $K(Y)$.

**1.10.2. Proposición.** *Sea* $Y$ *una variedad cuasi-afín. El conjunto* $K(Y)$ *es una* $\Bbbk$*-álgebra de* *manera tal que*

$$\lambda \cdot \langle U, f\rangle = \langle U, \lambda f\rangle,$$
$$\langle U, f\rangle + \langle V, g\rangle = \langle U \cap V, f|_{U\cap V} + g|_{U\cap V}\rangle$$

*y*

$$\langle U, f\rangle \cdot \langle V, g\rangle = \langle U \cap V, f|_{U\cap V} \cdot g|_{U\cap V}\rangle$$

*siempre que* $\lambda \in \Bbbk$ *y* $\langle U, f\rangle$, $\langle V, g\rangle \in K(Y)$. *Más aún,* $K(Y)$ *es un cuerpo.*

Llamamos a $K(Y)$ el ***cuerpo de funciones racionales*** sobre $Y$.

*Demostración.* Que el conjunto $K(Y)$ es un álgebra con respecto a las operaciones descriptas en el enunciado puede verse fácilmente. Mostremos que es un cuerpo.

Sea $\langle U, f\rangle$ una función racional no nula, de manera que la función regular $f : U \to \Bbbk$ no es idénticamente nula. El conjunto $Z(f)$ es por lo tanto un cerrado propio de $U$, así que $V = U \setminus Z(f)$ es un abierto no vacío de $Y$. La elección de $V$ implica que podemos considerar la función $1/f : V \to \Bbbk$. Exactamente como en la prueba de la Proposición 1.9.2 podemos ver que $1/f \in \mathcal{O}(V)$, así que tenemos una función racional $\langle V, 1/f\rangle$ en $Y$. Finalmente, es inmediato que $\langle V, 1/f\rangle$ es un inverso de $\langle U, f\rangle$ en $K(Y)$, así que $\langle U, f\rangle$ es inversible en $K(Y)$. □

**1.10.3.** Si $Y$ es una variedad cuasi-afín, $p$ un punto de $Y$ y $\langle U, f\rangle_p$ un germen de función regular en $p$, entonces el par $(U, f)$ es un elemento de $\mathscr{E}(Y)$ y podemos considerar la función racional $\langle U, f\rangle \in K(Y)$. Esta función racional depende solamente del germen de partida $\langle U, f\rangle_p$ y no del elemento $(U, f)$ que lo representa y hay por lo tanto una función $j^p : \mathcal{O}_{p,Y} \to K(Y)$ tal que $j^p(\langle U, f\rangle_p) = \langle U, f\rangle$ para todo germen $\langle U, f\rangle \in \mathcal{O}_{p,Y}$.

**Proposición.** *Sea* $Y$ *una variedad cuasi-afín y sea* $p \in Y$.

(*i*) *La función* $j^p : \mathcal{O}_{p,Y} \to K(Y)$ *es un morfismo de álgebras inyectivo.*

(*ii*) *Si* $q$ *es otro punto de* $Y$*, entonces conmuta el diagrama*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}(Y) \arrow[r, "\mathrm{res}^Y_{p,Y}"] \arrow[d, "\mathrm{res}^Y_{q,Y}"'] & \mathcal{O}_{p,Y} \arrow[d, "j^p"] \\ \mathcal{O}_{q,Y} \arrow[r, "j^q"'] & K(Y) \end{tikzcd}$$

*Demostración.* (*i*) Que $j^p$ es un morfismo de álgebras es inmediato de la forma en que se definen las operaciones de su dominio y su codominio. Por otro lado, si $\langle U, f\rangle_p$ es un germen de función regular en $Y$ alrededor de $p$ tal que la función racional $\langle U, f\rangle$

es nula, entonces $f$ se anula en un abierto no vacío de $U$ y, por lo tanto, se anula idénticamente: esto implica que el morfismo $j^p$ es inyectivo.

(*ii*) Las dos composiciones resultan en la función $f \in \mathcal{O}(Y) \mapsto \langle Y, f \rangle \in K(Y)$. □

**1.10.4.** La primera parte de la Proposición 1.10.3 nos permite identificar a cada anillo local $\mathcal{O}_{p,Y}$ de $Y$ con una subálgebra del cuerpo de funciones racionales $K(Y)$. Por otro lado, la Proposición 1.9.7 nos permite identificar a $\mathcal{O}(Y)$ como una subálgebra de cada anillo local $\mathcal{O}_{p,Y}$. El punto de la segunda parte de la Proposición 1.10.3 es que el subanillo de de $K(Y)$ que corresponde a $\mathcal{O}(Y)$ bajo estas identificaciones no depende del punto $p$.

Desde ahora consideraremos siempre al álgebra $\mathcal{O}(Y)$ y a los anillos locales $O_{p,Y}$ como subálgebras del cuerpo $K(Y)$ de funciones racionales gracias a estas identificaciones.

## §1.11. Una equivalencia de categorías

**1.11.1.** Sea $Y$ una variedad cuasi-afín en $\mathbb{A}^n$. Si $f \in \Bbbk[\mathbb{A}^n]$ es una función polinomial sobre $\mathbb{A}^n$, podemos considerar la restricción $f|_Y$, que es un elemento del álgebra $\Bbbk^Y$ de todas las funciones $Y \to \Bbbk$. Obtenemos de esta forma una función

$$f \in \Bbbk[\mathbb{A}^n] \longmapsto f|_Y \in \Bbbk^Y \tag{7}$$

que es un morfismo de álgebras. Escribimos $\Bbbk[Y]$ a su imagen, que es, por supuesto, una subálgebra de $\Bbbk^Y$, y llamamos a los elementos de $\Bbbk[Y]$ funciones polinomiales sobre $Y$. El núcleo del morfismo (7) es, por definición, el ideal $I(Y)$ de $\Bbbk[\mathbb{A}^n]$, y su correstricción a $\Bbbk[Y]$ induce por lo tanto un isomorfismo

$$\Bbbk[Y] \cong \frac{\Bbbk[\mathbb{A}^n]}{I(Y)},$$

al que consideraremos, cuando sea conveniente, como una identificación.

Una observación casi inmediata que tenemos que hacer es que las funciones polinomiales sobre $Y$ son regulares:

**Proposición.** *Sea $Y$ una variedad cuasi-afín en $\mathbb{A}^n$.*

(*i*) *Si $f \in \Bbbk[Y]$, entonces $f \in \mathcal{O}(Y)$.*

(*ii*) *La función $f \in \Bbbk[Y] \mapsto f \in \mathcal{O}(Y)$ es un morfismo de álgebras inyectivo.*

Gracias al morfismo inyectivo descripto en la segunda parte de esta proposición podemos identificar a $\Bbbk[Y]$ con una subálgebra de $\mathcal{O}(Y)$.

*Demostración.* La primera afirmación es inmediata de la definición de función regular. Que la función de la segunda afirmación es un morfismo inyectivo de álgebras es consecuencia de que se trata de la restricción de la identidad $\mathbb{k}^Y \to \mathbb{k}^Y$ al la subálgebra $\mathbb{k}[Y]$ de su dominio y la subálgebra $\mathcal{O}(Y()$ de su codominio. □

**1.11.2.** Una primera razón por la que estamos interesados en el álgebra $\mathbb{k}[Y]$ es que nos permite describir los anillos locales de $Y$:

**Proposición.** *Sea $Y$ una variedad* afín *en $\mathbb{A}^n$.*

(*i*) *Si $p \in Y$, entonces $\mathfrak{m}_p = \{f \in \mathbb{k}[Y] : f(p) = 0\}$ es un ideal maximal de $\mathbb{k}[Y]$.*

(*ii*) *Si $\operatorname{\mathsf{maxSpec}} \mathbb{k}[Y]$ denota el conjunto de los ideales maximales de $\mathbb{k}[Y]$, entonces la función*

$$p \in Y \longmapsto \mathfrak{m}_p \in \operatorname{\mathsf{maxSpec}} \mathbb{k}[Y]$$

*es una biyección.*

(*iii*) *Si $p \in Y$, entonces la composición $\mathbb{k}[Y] \hookrightarrow \mathcal{O}(Y) \hookrightarrow \mathcal{O}_{p,Y}$ se extiende a un isomorfismo $\mathbb{k}[Y]_{\mathfrak{m}_p} \to \mathcal{O}_{p,Y}$ sobre la localización de $\mathbb{k}[Y]$ en $\mathfrak{m}_p$. Este último isomorfismo es, de hecho, una igualdad si vemos a $\mathbb{k}[Y]_{\mathfrak{m}_p}$ y a $\mathcal{O}_{p,Y}$ somo subálgebras del cuerpo $K(Y)$.*

*Demostración.* (*i*) Sea $p \in Y$. La función $\alpha : f \in \mathbb{k}[Y] \mapsto f(p) \in \mathbb{k}$ es un morfismo de álgebras sobreyectivo y su codominio es un cuerpo, así que su núcleo, que es precisamente el subespacio $\mathfrak{m}_p$ descripto en el enunciado, es un ideal maximal de $\mathbb{k}[Y]$.

(*ii*) La correspondencia de la Proposición 1.4.4 se restringe a una biyección entre el conjuntos de los puntos de $Y$, que son los cerrados de $\mathbb{A}^n$ minimales entre los cerrados no vacíos contenidos en $Y$, y el conjunto de ideales maximales de $\mathbb{k}[\mathbb{A}^n]$ que contienen al ideal $I(Y)$. Por otro lado, el tercer teorema de isomorfismo establece una biyección entre este conjunto de ideales de $\mathbb{k}[\mathbb{A}^n]$ y el conjunto de ideales maximales del cociente $\mathbb{k}[\mathbb{A}^n]/I(Y)$, que es isomorfo al álgebra $\mathbb{k}[Y]$. La composición de estas dos biyecciones da la biyección del enunciado.

(*iii*) Sea $p \in Y$. Para ver que la composición de inclusiones $\mathbb{k}[Y] \hookrightarrow \mathcal{O}(Y) \hookrightarrow \mathcal{O}_{p,Y}$ extiende a un morfismo $\mathbb{k}[Y]_{\mathfrak{m}_p} \to \mathcal{O}_{p,Y}$ es suficiente mostrar que un elemento de $\mathbb{k}[Y] \setminus \mathfrak{m}_o$ es inversible en $\mathcal{O}_{p,Y}$. Sea, para ello, $f$ un elemento de $\mathbb{k}[Y]$ tal que $f(p) \neq 0$. Bajo nuestras identificaciones, esta función $f$ es el germen $\langle Y, f\rangle_p \in \mathcal{O}_{p,Y}$. Ahora bien, $Z(f)$ es un cerrado de $Y$ que no contiene a $p$ y podemos considerar el germen $\langle U \setminus Z(f), 1/f\rangle_p$: se trata, claramente, de un inverso para $\langle Y, f\rangle_p$ en $\mathcal{O}_{p,Y}$, y esto prueba lo que queríamos.

El morfismo $\phi : \mathbb{k}[Y]_{\mathfrak{m}_p} \to \mathcal{O}_{p,Y}$ que obtenemos de esta forma es inyectivo, porque su restricción a $\mathbb{k}[Y]$ lo es. Para ver que es sobreyectivo, consideremos un germen $\langle U, f\rangle_p$ de función regular alrededor de $p$. Hay, en particular, un abierto $V$ de $U$ que contiene a $p$ y funciones polinomiales $g$, $h \in \mathbb{k}[\mathbb{A}^n]$ tales que $h(q) \neq 0$ y $f(q) = g(q)/h(q)$ para todo $q \in V$. Ahora bien, las restricciones $g|_Y$ y $h|_Y$ son elementos de $\Bbbk[Y]$ y la segunda, de hecho, pertenece a $\Bbbk[Y] \setminus \mathfrak{m}_p$, así que la fracción $g|_y/h|_Y$ es un elemento de $\Bbbk[Y]_{\mathfrak{m}_p}$. Como la imagen de esta fracción por $\phi$ es claramente igual al germen $\langle Y, f\rangle_p$, vemos que el morfismo $\phi$ es sobreyectivo. El hecho de que $\phi$ puede verse una igualdad si vemos a su dominio y a su codominio como subálgebras de $K(Y)$ es ahora inmediato. □

**1.11.3.** Usando la descripción de los anillos locales que nos da esta proposición podemos obtener una del anillo de funciones regulares sobre toda la variedad. Para ello necesitamos es siguiente resultado puramente algebraico:

**Lema.** *Sea $A$ un dominio de integridad y sea $K$ su cuerpo de fracciones. Si vemos a cada localización $A_{\mathfrak{m}}$ en un ideal maximal $\mathfrak{m}$ de $A$ como un subanillo de $K$, entonces*

$$\bigcap_{\mathfrak{m}\in\mathsf{maxSpec}\,A} A_{\mathfrak{m}} = A.$$

*Demostración.* Es claro que la intersección que aparece en el enunciado contiene a $A$, así que bastará que probemos la inclusión recíproca. Sea $f$ un elemento de $K$ y supongamos que $f \notin A$. El conjunto $I = \{a \in A : af \in A\}$ es un ideal de $A$ y es propio porque $1 \notin A$: existe entonces un ideal maximal $\mathfrak{m}$ de $A$ tal que $I \subseteq \mathfrak{m}$. Si $f$ perteneciera a la localización $A_{\mathfrak{m}}$, existirían $a \in A$ y $b \in A \setminus \mathfrak{m}$ tales que $f = a/b$ y, por lo tanto, $bf = a \in A$: esto es absurdo, porque en ese caso tendríamos que $b \in I \subseteq \mathfrak{m}$. Vemos así que $f \notin \bigcap_{\mathfrak{m}\in\mathsf{maxSpec}\,A} A_{\mathfrak{m}}$. □

**1.11.4.** Podemos ahora describir completamente las funciones regulares sobre una variedad afín: son simplemente las funciones polinomiales. Observemos que esto no es para nada evidente, ya que una función regular es una función que localmente está dada por un cociente de polinomios — lo que estamos diciendo es que si la variedad es afín, una tal función está de hecho globalmente dada por un polinomio.

**Teorema.** *Sea $Y$ una variedad* afín *en $\mathbb{A}^n$. El morfismo $\Bbbk[Y] \to \mathcal{O}(Y)$ es un isomorfismo y la composición $\Bbbk[Y] \hookrightarrow \mathcal{O}(Y) \hookrightarrow K(Y)$ extiende a un isomorfismo $\mathsf{Frac}(\Bbbk[Y]) \to K(Y)$.*

*Demostración.* Como subálgebras de $K(Y)$, tenemos que $\mathcal{O}(Y)$ está contenido en $\mathcal{O}_{p,Y}$ para todo $p \in Y$, y es esta última álgebra coincide con la localización $\Bbbk[Y]_{\mathfrak{m}_p}$ en el ideal maximal $\mathfrak{m}_p$ de $\Bbbk[Y]$ correspondiente a $p$. Esto significa que tenemos una cadena de inclusiones

$$\Bbbk[Y] \hookrightarrow \mathcal{O}(Y) \hookrightarrow \bigcap_{p\in Y} \mathcal{O}_{p,Y} = \bigcap_{\mathfrak{m}\in\mathsf{maxSpec}\,\Bbbk[Y]} \Bbbk[Y]_{\mathfrak{m}} \hookrightarrow K(Y)$$

de subálgebras de $K(Y)$. Usando el lema anterior, vemos que $\Bbbk[Y] = \mathcal{O}(Y)$ o, lo que es lo mismo, que el morfismo canónico $\Bbbk[Y] \to \mathcal{O}(Y)$ es un isomorfismo.

Que la composición de inclusiones $\Bbbk[Y] \hookrightarrow \mathcal{O}(Y) \hookrightarrow K(Y)$ extiende a un morfismo $\mathsf{Frac}(\Bbbk[Y]) \to K(Y)$ es consecuencia directa de la propiedad universal de la localización que define a $\mathsf{Frac}(\Bbbk[Y])$, ya que $K(Y)$ es un cuerpo, y ese morfismo es inyectivo porque su dominio es un cuerpo. Para ver que es sobreyectivo, consideremos una función racional $\langle U, f\rangle$ sobre $Y$. Si $p$ es un punto de $U$, existe un abierto $V$ de $Y$ que contiene a $p$ y funciones polinomiales $g, h \in \Bbbk[\mathbb{A}^n]$ tales que $h(q) \neq 0$ y $f(q) = g(q)/h(q)$ para todo $q \in V$. Ahora bien, las restricciones $g|_Y$ y $h|_Y$ son elementos de $\Bbbk[Y]$ y la segunda no es nula, así que la fracción $g|_Y/h|_Y$ es un elemento del cuerpo $\mathsf{Frac}(\Bbbk[Y])$ cuya imagen en $K(Y)$ es $\langle U, f\rangle$. $\square$

**1.11.5.** Una primera aplicación de este teorema es el siguiente criterio para decidir de una función con codominio en un espacio afín es un morfismo:

**Proposición.** *Sea $Y$ una variedad quasi-afín y sean $x_1, \dots, x_n$ las funciones coordenadas de $\mathbb{A}^n$. Una función $\phi : Y \to \mathbb{A}^n$ es un morfismo si y solamente si las funciones $x_1 \circ \phi, \dots, x_n \circ \phi : Y \to \Bbbk$ son regulares.*

*Demostración.* La necesidad de la condición es parte de la definición de lo que significa que una función $Y \to \mathbb{A}^n$ sea un morfismo. Veamos la suficiencia.

Sean entonces $\phi : Y \to \mathbb{A}^n$ una función tal que las composiciones $x_1 \circ \phi, \dots, x_n \circ \phi$ son funciones regulares sobre $Y$. Como la función $\phi^* : f \in \Bbbk[\mathbb{A}^n] \mapsto f \circ \phi \in \Bbbk^Y$ es un morfismo de álgebras y manda a las funciones coordenadas $x_1, \dots, x_n$ de $\Bbbk[\mathbb{A}^n]$, que generan a $\Bbbk[\mathbb{A}^n]$ como álgebra, a elementos de $\mathcal{O}(Y)$, vemos que, de hecho, para toda función polinomial $f \in \Bbbk[\mathbb{A}^n]$ la función $\phi^*(f)$ es regular en $Y$.

En particular, si $F$ es un cerrado de $\mathbb{A}^n$, entonces $F = \bigcap_{f \in I(F)} Z(f)$ y, por lo tanto,

$$\phi^{-1}(F) = \bigcap_{f \in I(F)} Z(\phi^*(f)),$$

de manera que $\phi^{-1}(F)$ es un cerrado de $Y$. Esto muestra que $\phi$ es una función continua.

Sean, por otro lado, $U$ un abierto de $\mathbb{A}^n$, $f \in \mathcal{O}(U)$ una función regular sobre $U$ y $p$ un punto de $\phi^{-1}(U)$. Como $\phi(p) \in U$, existe un entorno abierto $V$ de $p$ en $U$ y funciones polinomiales $g, h \in \Bbbk[\mathbb{A}^n]$ tales que $h(q) \neq 0$ y $f(q) = g(q)/h(q)$ para todo $q \in V$. El conjunto $\phi^{-1}(V)$ es un abierto de $\phi^{-1}(U)$ que contiene a $p$ y las funciones $\phi^*(g)$ y $\phi^*(h)$ son, de acuerdo a lo que ya probamos, funciones regulares sobre $Y$. Es claro que $\phi^*(h)$ no se anula sobre $\phi^{-1}(V)$, así que la función $1/\phi^*(h)$ también es regular sobre $\phi^{-1}(V)$ y, por lo tanto, el producto $\phi^*(g) \cdot 1/\phi^*(h)$ es una función regular sobre $\phi^{-1}(V)$. Como ese producto coincide con $\phi^*(f)$ en ese abierto, vemos de esta forma que esta última es regular en $p$. $\square$

**1.11.6. Proposición.** *Sea $X$ una variedad cuasi-afín y sea $Y$ una variedad afín. La función*

$$\alpha_{X,Y} : \phi \in \mathsf{hom}(X,Y) \longmapsto \phi^* \in \mathsf{hom}(\mathcal{O}(Y), \mathcal{O}(X))$$

*es una biyección.*

Aquí $\mathsf{hom}(X,Y)$ denota el conjunto de morfismos de variedades quasi-afines $X \to Y$, mientras que $\mathsf{hom}(\mathcal{O}(Y), \mathcal{O}(X))$ denota el conjunto de morfismos de álgebras $\mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(X)$. La función $\alpha_{X,Y}$ es la restricción del functor $\mathcal{O}$ de **1.8.3**, así que es natural con respecto a $X$ y a $Y$.

*Demostración.* Supongamos que $Y$ está contenida en $\mathbb{A}^n$. Sean $x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$ las funciones coordenadas de $\mathbb{A}^n$ y sean $y_1, \ldots, y_n$ las correspondientes restricciones a $Y$, que son elementos de $\mathcal{O}(Y)$

Si $\phi$ y $\psi$ son dos elementos distintos de $\mathsf{hom}(X,Y)$, entonces hay un punto $p \in X$ tal que $\phi(p) \neq \psi(p)$ y, como se trata de puntos de $\mathbb{A}^n$, existe $i \in [\![n]\!]$ tal que $x_i(\phi(p)) \neq x_i(\psi(p))$. Esto implica, por supuesto, que $\phi^* \neq \psi^*$, ya que $\phi^*(x_i) \neq \psi^*(x_i)$. La función $\alpha_{X,Y}$ del enunciado es por lo tanto inyectiva.

Veamos ahora que esa función también es sobreyectiva. Sea $h : \mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(X)$ un morfismo de álgebras y para cada $i \in [\![n]\!]$ sea $\xi_i = h(y_i) \in \mathcal{O}(X)$. Podemos definir una función

$$\Phi : p \in X \longmapsto (\xi_1(p), \ldots, \xi_n(p)) \in \mathbb{A}^n.$$

Como para cada $i \in [\![n]\!]$ se tiene que $x_i \circ \Phi = \xi_i \in \mathcal{O}(X)$, la Proposición **1.11.5** nos dice que $\Phi$ es un morfismo de variedades quasi-afines. Sea ahora $f \in I(Y)$ y veamos a $f$ como un polinomio $f(x_1, \ldots, x_n)$ en las funciones coordenadas de $\mathbb{A}^n$. Como $\Phi^* : \mathcal{O}(\mathbb{A}^n) \to \mathcal{O}(X)$ es un morfismo de álgebras y $\Phi^*(x_i) = \xi_i$ para cada $i \in [\![n]\!]$, tenemos que

$$f \circ \Phi = \Phi^*(f) = \Phi^*(f(x_1, \ldots, x_n)) = f(\xi_1, \ldots, \xi_n) = f(h(y_1), \ldots, h(y_n))$$

y, como $h$ es un morfismo de álgebras, esto es

$$= h(f(y_1, \ldots, y_n)) = h(f(x_1, \ldots, x_n)|_Y) = h(0) = 0.$$

Vemos así que la imagen de $\Phi$ está contenida en $Z(I(Y))$, y este cerrado coincide con $Y$ porque $Y$ es una subvariedad *afín*. Esto implica que la correstricción $\phi = \Phi|^Y : X \to Y$

es un morfismo. Ahora bien si $i \in [\![n]\!]$, entonces

$$\alpha_{X,X}(\phi)(y_i) = \alpha_{X,X}(\phi)(x_i|_Y) = \phi^*(x_i) = \Phi^*(x_i) = \xi_i = h(y_i).$$

Como $\alpha_{X,Y}(\phi)$ y $h$ son dos morfismos de álgebras $\mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(X)$ que coinciden en los elementos $y_1, \ldots, y_n$ de su dominio, que lo generan como álgebra, son de hecho iguales. En otras palabras, tenemos que $\alpha_{X,Y}(\phi) = h$: podemos concluir de esta forma que la función $\alpha_{X,Y}$ es sobreyectiva, como queríamos. $\square$

**1.11.7.** Podemos probar ahora el resultado más importante de esta sección. Escribamos $\mathbf{Dom}_{\mathsf{fg}}$ a la categoría de las álgebras conmutativas, finitamente generadas e íntegras.

**Teorema.** *La restricción $\mathcal{O} : \mathbf{Aff} \to \mathbf{Dom}_{\mathsf{fg}}^{\mathsf{op}}$ del functor de 1.8.3 a la categoría de las variedades afines es una equivalencia.*

*Demostración.* Para verificar esto hay que verificar que

- si $X$ e $Y$ son variedades afines, entonces el functor $\mathcal{O}$ induce una biyección natural

  $$\mathsf{hom}(X, Y) \to \mathsf{hom}(\mathcal{O}(Y), \mathcal{O}(X)),$$

- y que el functor es esencialmente sobreyectivo, esto es, que si $A$ es un objeto de $\mathbf{Dom}_{\mathsf{fg}}$ entonces existe una variedad afín $Y$ tal que $\mathcal{O}(Y) \cong A$.

El primer punto es un caso particular de lo que afirma la Proposición 1.11.6. Veamos el segundo.

Sea $A$ un álgebra finitamente generada que es un dominio de integridad, y sean $a_1, \ldots, a_n$ elementos de $A$ que la general como álgebra. Hay un morfismo de álgebras $\phi : \Bbbk[x_1, \ldots, x_n] \to A$ tal que $\phi(x_i) = a_i$ para cada $i \in [\![n]\!]$ y, como su imagen contiene a un conjunto generador de $A$, este morfismo es sobreyectivo. Sea $I$ el núcleo de $\phi$ y sea $Y = Z(I) \subseteq \mathbb{A}^n$. Como $A$ es un dominio de integridad, el ideal $I$ es primo y el cerrado $Y$ de $\mathbb{A}^n$ es irreducible: así, $Y$ es una subvariedad afín de $\mathbb{A}^n$. Por otro lado, sabemos del Teorema 1.11.4 que $\Bbbk[Y] \cong \mathcal{O}(Y)$: como $\Bbbk[Y]$ es isomorfa como álgebra con $\Bbbk[x_1, \ldots, x_n]/I$, que a su vez es isomorfa con $A$, esto prueba lo que queremos. $\square$

## §1.12. Cocientes

**1.12.1.** Sea $\mathbf{C}$ una categoría. Si $G$ es un grupo y $X$ es un objeto de $\mathbf{C}$, una ***acción*** de $G$ sobre $X$ es un morfismo de grupos $m : G \to \mathsf{Aut}_{\mathbf{C}}(X)$; para cada $g \in G$ escribimos $m_g$ en lugar de $m(g)$. Dada una tal acción, decimos que un morfismo $\pi : X \to Y$ de $\mathbf{C}$ es un ***cociente*** de $X$ por $G$ si satisface las siguientes dos condiciones:

($Q_1$) Para todo $g \in G$ se tiene que $\pi \circ m_g = \pi$.

($Q_2$) Cada vez que $f : X \to Z$ es un morfismo tal que $f \circ m_g = f$ para todo $g \in G$ existe un y solo un morfismo $\bar{f} : Y \to Z$ en $\mathbf{C}$ tal que $\bar{f} \circ \pi = f$.

**1.12.2.** Una primera observación que podemos hacer es que todo cociente es un epimorfismo:

**Lema.** *Sea $\mathbf{C}$ una categoría, sea $G$ un grupo, sea $X$ un objeto de $\mathbf{C}$ y supongamos que tenemos una acción $m : G \to \mathsf{Aut}_{\mathbf{C}}(X)$ de $G$ sobre $X$. Si $\pi : X \to Y$ es un cociente de $X$ por $G$, entonces $\pi$ es un epimorfismo de $\mathbf{C}$, esto es, cada vez que $g, h : Y \to Z$ son morfismos de $\mathbf{C}$ tales que $g \circ \pi = h \circ \pi$ se tiene que, de hecho, $g = h$.*

*Demostración.* Supongamos que $\pi : X \to Y$ es un cociente de $X$ por $G$ y consideremos dos morfismos $g, h : Y \to Z$ de $\mathbf{C}$ tales que $g \circ \pi = h \circ \pi$.

Sea $f = g \circ \pi : X \to Z$. Para cada $g \in G$ se tiene que

$$f \circ m_g = g \circ \pi \circ m_g = g \circ \pi = f$$

así que como $\pi$ es un cociente de $X$ por $G$ existe un único morfismo $\bar{f} : Y \to Z$ tal que $\bar{f} \circ \pi = f$. Ahora bien, como las dos composiciones $g \circ \pi$ y $h \circ \pi$ coinciden con $f$, esto nos dice que $g = \bar{f} = h$. Vemos así que $\pi$ es un epimorfismo de $\mathbf{C}$. □

**1.12.3.** Es bien posible que no exista ningún cociente para una acción, pero si existe, es único en el sentido razonable:

**Proposición.** *Sea $\mathbf{C}$ una categoría, sea $G$ un grupo, sea $X$ un objeto de $\mathbf{C}$ y supongamos que tenemos una acción $m : G \to \mathsf{Aut}_{\mathbf{C}}(X)$ de $G$ sobre $X$. Si $\pi : X \to Y$ y $\pi' : X \to Y'$ son dos cocientes de $X$ por $G$, entonces existe un isomorfismo $\phi : Y \to Y'$ y uno solo tal que $\pi' = \phi \circ \pi$.*

*Demostración.* Sean $\pi : X \to Y$ y $\pi' : X \to Y'$ dos cocientes de $X$ por $G$. Como $\pi$ tiene la propiedad ($Q_1$) y $\pi'$ tiene la propiedad ($Q_2$), existe un morfismo $\bar{\pi} : Y' \to Y$ tal que $\bar{\pi} \circ \pi' = \pi$. De manera similar, como $\pi'$ tiene la propiedad ($Q_1$) y $\pi$ la propiedad ($Q_2$), existe un morfismo $\bar{\pi}' : Y \to Y'$ tal que $\bar{\pi}' \circ \pi = \pi'$. Tenemos entonces que

$$\bar{\pi} \circ \bar{\pi}' \circ \pi = \bar{\pi} \circ \pi' = \pi = \mathrm{id}_Y \circ \pi$$

así que $\bar{\pi} \circ \bar{\pi}' = \mathrm{id}_Y$ porque $\pi$ es un epimorfismo. Simétricamente, es

$$\bar{\pi}' \circ \bar{\pi} \circ \pi' = \bar{\pi}' \circ \pi = \pi' = \mathrm{id}_{Y'} \circ \pi'$$

y, por lo tanto, $\bar{\pi}' \circ \bar{\pi} = \mathrm{id}_{Y'}$. Esto nos dice que $\bar{\pi}$ y $\bar{\pi}'$ son isomorfismos inversos. Si tomamos $\phi = \bar{\pi}'$, entonces, vemos que se satisfacen las condiciones del enunciado. □

**1.12.4. Ejemplo.** Consideremos la categoría **Set** de los conjuntos. Sea $X$ un conjunto, sea $G$ un grupo y sea $m : G \to \mathsf{Aut}_{\mathbf{Set}}(X)$ una acción de $G$ sobre $X$. En esta situación concreta, esto significa que para cada $g \in G$ tenemos una biyección $m_g : X \to X$, que $m_1 = id_X$ y que $m_g \circ m_h = m_{gh}$ cada vez que $g$ y $h$ son dos elementos de $G$.

Podemos considerar el subconjunto $R = \{(x, m_g(x)) : x \in X, g \in G\}$ de $X \times X$. Es fácil verificar que se trata de una relación de equivalencia. Si $x \in X$, escribimos $[x]$ a la clase de equivalencia de $x$ con respecto a $R$ y la llamamos la ***órbita*** de $x$ por $G$. Al conjunto cociente $X/R$ lo escribimos $X/G$ y denotamos $\pi : X \to X/G$ a la proyección canónica, de manera que $\pi(x) = [x]$ para todo $x \in X$. Mostremos que esta función $\pi$ es un cociente de $X$ por $G$.

- Si $g \in G$, entonces para todo $x \in X$ se tiene que

  $$\pi(m_g(x)) = [m_g(x)] = [x] = \pi(x),$$

  así que $\pi \circ m_g = \pi$. La función $\pi$ tiene por lo tanto la propiedad $(Q_1)$.
- Supongamos ahora que $f : X \to Y$ es una función tal que $f \circ m_g = f$ para todo $g \in G$ y consideremos el conjunto

  $$\Gamma = \{([x], f(x)) \in X/G \times Y : x \in X\}.$$

  Este conjunto es una relación de $X/G$ a $Y$: veamos que es, de hecho, una función.
  - Si $c \in X/G$, entonces hay un elemento $x \in X$ tal que $c = [x]$ y $(c, f(x)) \in \Gamma$.
  - Por otro lado, si $c \in X/G$ e $y, y' \in Y$ son tales que $(c, y)$, $(c, y') \in \Gamma$, entonces existen $x$ y $x' \in X$ tales que $(c, y) = ([x], f(x))$ y $(c, y') = ([x'], f(x'))$. En particular, $[x] = c = [x']$ y, por lo tanto, existe $g \in G$ tal que $m_g(x) = x'$. Se sigue de esto y de la hipótesis sobre $f$ ti que

    $$y' = f(x') = f(m_g(x)) = f(x) = y.$$

  Esto prueba, como queríamos, que la relación $\Gamma$ es una función $\bar{f} : X/G \to Y$. Si $x \in X$, como el par $([x], f(x))$ está en $\Gamma$, se tiene que $\bar{f}(\pi(x)) = \bar{f}([x]) = f(x)$: esto muestra que $\bar{f} \circ \pi = f$. Vemos así que la proyección $\pi$ tiene la propiedad $(Q_2)$.

Esto muestra que toda acción de un grupo en **Set** admite un cociente, como dijimos. ■

**1.12.5. Ejemplo.** Consideremos ahora la categoría **Fld** de los cuerpos. Sea $G$ un grupo cíclico de orden 2, sea $\gamma$ el generador de $G$ y consideremos la acción de $G$ sobre $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ tal que $m_\gamma : \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \to \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ es el automorfismo de cuerpos tal que $m_\gamma(\sqrt{2}) = -\sqrt{2}$.

Supongamos que $\pi : \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \to F$ es un cociente para esta acción. Se tiene entonces que

$$\pi(\sqrt{2}) = \pi(m_\gamma(\sqrt{2})) = \pi(-\sqrt{2}) = -\pi(\sqrt{2}),$$

de manera que $2\pi(\sqrt{2}) = 0$ en el cuerpo $F$. Como $\pi$ es un morfismo de cuerpos, es inyectivo y, por lo tanto, $\pi(\sqrt{2}) \neq 0$ en $F$. Vemos así que debe ser $2 = 0$ en $F$, esto es, que $F$ debe tener característica 2. Esto es absurdo, ya que no hay ningún morfismo de cuerpos de $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ a un cuerpo de característica 2.

Este ejemplo muestra que no toda acción de un grupo sobre un objeto de una categoría admite un cociente. ■

**1.12.6. Ejemplo.** Consideremos ahora la categoría **Haus** de los espacios topológicos Hausdorff. Sea $X = \mathbb{R}$, sea $G$ un grupo cíclico infinito, sea $\gamma$ un generador de $G$ y sea $m : G \to \mathsf{Aut}_{\mathbf{Haus}}(\mathbb{R})$ la acción de $G$ sobre $\mathbb{R}$ tal que $m_\gamma(t) = 2t$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Sea $Q = \{q\}$ un conjunto con un único elemento y sea $\pi : \mathbb{R} \to Q$ la función constante de valor $q$: afirmamos que $\pi$ es un cociente de $\mathbb{R}$ por $G$ en **Haus**.

Es evidente que $\pi \circ m_g = \pi$ para todo $g \in G$. Supongamos que $f : \mathbb{R} \to Z$ es una función continua con codominio un espacio Hausdorff tal que $f \circ m_g = f$ para todo $g \in G$. Sea $t \in \mathbb{R}$. Para cada $n \in \mathbb{N}_0$ tenemos que $f(t) = f(m_{\gamma^{-n}}(t)) = f(2^{-n}t)$ y como la sucesión $(2^{-n}t)_{n\in\mathbb{N}_0}$ converge a 0 en $\mathbb{R}$, la sucesión $(f(2^{-n}t))_{n\in\mathbb{N}_0}$ converge a $f(0)$ en $X$ y, como $Z$ es Hausdorff, ese es su único límite. Esta última sucesión es constante de valor $f(t)$, así que concluimos que $f(t) = f(0)$, esto es, que la función $f$ es constante de valor $f(0)$. La función $\bar{f} : Q \to Z$ con $\bar{f}(q) = f(0)$ es tal que $\bar{f} \circ \pi = f$, y es claramente la única función $Q \to Z$ con esta propidad. Esto nos dice que $\pi$ es un cociente de $\mathbb{R}$ por $G$.

Notemos que si consideramos a la acción de $G$ sobre el *conjunto* $\mathbb{R}$ en la categoría de conjuntos **Set** hay también un cociente $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/G$, cuyo codominio es un conjunto no numerable, bien distinto del cociente $Q$ que encontramos en **Haus**. ■

**1.12.7.** Queremos calcular cocientes por acciones de grupos en la categoría **Aff** de las variedades afines. La forma en que encararemos este problema se basará en la equivalencia de categorías que nos da el Teorema 1.11.7 y la siguiente observación:

**Proposición.** *Sean* $\mathbf{C}$ *y* $\mathbf{D}$ *dos categorías y sea* $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ *una equivalencia. Sea* $X$ *un objeto de* $\mathbf{C}$, $G$ *un grupo y* $m : G \to \mathsf{Aut}_{\mathbf{C}}(X)$ *una acción de* $G$ *sobre* $X$.

(*i*) *La función* $m' : g \in G \mapsto F(m_g) \in \mathsf{Aut}_{\mathbf{D}}(F(X))$ *es una acción de* $G$ *sobre* $F(X)$.

(*ii*) *Una morfismo* $\pi : X \to Y$ *de* $\mathbf{C}$ *es un cociente de* $X$ *por* $G$ *para la acción* $m$ *si y solamente si el morfismo* $F(\pi) : F(X) \to F(Y)$ *de* $\mathbf{D}$ *es un cociente de* $F(X)$ *por* $G$ *para la acción* $m'$.

*Demostración.* (*i*) El functor $F$ determina una función

$$f \in \mathsf{hom}_{\mathbf{C}}(X,X) \longmapsto F(f) \in \mathsf{hom}_{\mathbf{D}}(F(X),F(X))$$

que es un morfismo de monoides y que, en particular, se restringe a los grupos de automorfismos para dar un morfismo de grupos

$$f \in \mathsf{Aut}_C(X) \longmapsto F(f) \in \mathsf{Aut}_{\mathbf{D}}(F(X)).$$

La función $m' : G \to \mathsf{Aut}_{\mathbf{D}}(F(X))$ es la composición de la acción $m$ de $G$ sobre $X$ en $\mathbf{C}$ con este morfismo, así que es claramente un morfismo de grupos.

(*ii*) Supongamos primero que $\pi : X \to Y$ es un cociente de $X$ por la acción $m$ de $G$. Si $g \in G$, entonces $\pi \circ m_g = \pi$ y, por lo tanto

$$F(\pi) \circ m'_g = F(\pi) \circ F(m_g) = F(\pi \circ m_g) = F(\pi).$$

Esto nos dice que $F(\pi)$ tiene la propiedad ($Q_1$) con respecto a la acción $m'$ de $G$ sobre $F(X)$. Sea, por otro lado, $f : F(X) \to Z$ un morfismo de $\mathbf{D}$ tal que $f \circ m'_g = f$ para todo $g \in G$. Como $F$ es una equivalencia, existe un objeto $Z'$ y un isomorfismo $\iota : Z \to F(Z')$. Más aún, como el functor $F$ es fielmente pleno, existe un morfismo $f' : X \to Z'$ tal que $F(f') = \iota \circ f$. Si $g \in G$, entonces

$$F(f' \circ m_g) = F(f') \circ F(m_g) = \iota \circ f \circ m'_g = \iota \circ f = F(f')$$

y, como el functor $F$ es fiel, de esto podemos deducir que $f' \circ g = f'$. Como $\pi$ es un cociente de $X$ por $G$, sabemos que existe un morfismo $\bar{f}' : Y \to Z'$ y uno solo tal que $\bar{f}' \circ \pi = f'$ y, en consecuencia, el morfismo $\bar{f} = \iota^{-1} \circ F(\bar{f}') : F(Y) \to Z$ es tal que

$$\bar{f} \circ F(\pi) = \iota^{-1} \circ F(\bar{f}') \circ F(\pi) = \iota^{-1} \circ F(\bar{f}' \circ \pi) = \iota^{-1} \circ F(f') = f.$$

Supongamos que hay otro morfismo $\bar{f}_1 : F(Y) \to Z$ tal que $\bar{f}_1 \circ F(\pi) = f$. Como $F$ es pleno, hay entonces un morfismo $\bar{f}'_1 : Y \to Z'$ tal que $F(\bar{f}'_1) = \iota \circ \bar{f}_1$. Es

$$F(\bar{f}'_1 \circ \pi) = F(\bar{f}'_1) \circ F(\pi) = \iota \circ \bar{f}_1 \circ F(\pi) = \iota \circ f = F(f')$$

y, como $F$ es fiel, $\bar{f}'_1 \circ \pi = f'$. La unicidad en la elección del morfismo $\bar{f}'$ que observamos implica entonces que $\bar{f}'_1 = \bar{f}'$ y, por lo tanto, que

$$\bar{f}_1 = \iota^{-1} \circ F(\bar{f}'_1) = \iota^{-1} \circ F(\bar{f}') = \bar{f}.$$

Con esto queda probado que el morfismo $F(\pi) : F(X) \to F(Y)$ es un cociente de $F(X)$ por la acción $m'_g$ de $G$.

Probemos ahora la implicación recíproca: supongamos que $F(\mathfrak{p})$ es un cociente de $F(X)$ por la acción $m'$ de $G$ y mostremos que entonces $\pi$ es un cociente de $X$ por la acción $m$ de $G$.

Si $g \in G$, entonces

$$F(\pi \circ m_g) = F(\pi) \circ F(m_g) = F(\pi) \circ m'_g = F(\pi),$$

porque $F(\pi)$ tiene la propiedad $(Q_1)$ con respecto a la acción $m'$: como $F$ es fiel, se sigue de esto que $\pi \circ m_g = \pi$, así que $\pi$ tiene esa misma propiedad pero con respecto a la acción $m$.

Sea, en segundo lugar, $f : X \to Z$ un morfismo de $\mathbf{C}$ tal que $f \circ m_g = f$ para todo $g \in G$. Se tiene entonces que

$$F(f) \circ m'_g = F(f) \circ F(m_g) = F(f \circ m_g) = F(f)$$

para todo $g \in G$ y, como $F(\pi)$ es un cociente, existe un morfismo $\overline{F(f)} : F(Y) \to F(Z)$ y uno solo tal que $\overline{F(f)} \circ F(\pi) = F(f)$. Como el functor $F$ es pleno, hay un morfismo $\bar{f} : Y \to Z$ tal que $F(\bar{f}) = \overline{F(f)}$ y

$$F(\bar{f} \circ \pi) = F(\bar{f}) \circ F(\pi) = \overline{F(f)} \circ F(\pi) = F(f).$$

Como $F$ es fiel, esto implica que $\bar{f} \circ \pi = f$. Más aún, si $\bar{f}_1 : Y \to Z$ es otro morfismo de $\mathbf{C}$ tal que $\bar{f}_1 \circ \pi = f$, entonces

$$F(\bar{f}_1) \circ F(\pi) = F(\bar{f}_1 \circ \pi) = F(f) = F(\bar{f} \circ \pi) = F(\bar{f}) \circ F(\pi).$$

Como $F(\pi)$ es un epimorfismo, porque es un cociente, esto nos dice que $F(\bar{f}_1) = F(\bar{f})$ y, como $F$ es fiel, que finalmente $\bar{f}_1 = \bar{f}$. La proposición queda así completamente probada. $\square$

**1.12.8.** Gracias a la Proposición 1.12.7 y la equivalencia $\mathcal{O} : \mathbf{Aff} \to \mathbf{Dom}_{\mathsf{fg}}^{\mathsf{op}}$ que nos da el Teorema 1.11.7, determinar cocientes en $\mathbf{Aff}$ y determinar cocientes en $\mathbf{Dom}_{\mathsf{fg}}^{\mathsf{op}}$ es esencialmente lo mismo. Ahora bien, la categoría $\mathbf{Dom}_{\mathsf{fg}}^{\mathsf{op}}$ es la categoría opuesta de $\mathbf{Dom}_{\mathsf{fg}}$. Mostremos cómo traducir el problema de la existencia de un cociente en la primera de éstas a un problema en la segunda.

**1.12.9.** Empezamos por las siguientes tres observaciones casi inmediatas.

**Lema.** *Sea $m : G \to \mathsf{Aut}_{\mathbf{Dom}_{\mathsf{fg}}^{\mathsf{op}}}(A)$ una acción de un grupo $G$ sobre un objeto $A$ en $\mathbf{Dom}_{\mathsf{fg}}^{\mathsf{op}}$.*

(*i*) *La función*

$$m^{\mathsf{op}} : g \in G \longmapsto m_{g^{-1}} \in \mathsf{Aut}_{\mathbf{Dom}_{\mathsf{fg}}}(A)$$

*es una acción de $G$ sobre $A$ en $\mathbf{Dom}_{\mathsf{fg}}$ y el conjunto*

$$A^G = \{a \in A : m_g^{\mathsf{op}}(a) = a \text{ para todo } g \in G\},$$

*es una subálgebra de $A$.*

(*ii*) *Si $\pi : A \to B$ es un morfismo en $\mathbf{Dom}_{\mathsf{fg}}^{\mathsf{op}}$ y $p : B \to A$ es el morfismo de $\mathbf{Dom}_{\mathsf{fg}}$ que corresponde a $\pi$, entonces el conjunto se tiene que $\pi \circ m_g = \pi$ para todo $g \in G$ si y solamente si $p$ toma valores en $A^G$.*

*Demostración.* La primera parte es consecuencia de un cálculo directo que omitimos. Para ver la segunda, basta observar que si $g \in G$ entonces En efecto, si $g \in G$, entonces

$$\begin{aligned} \pi \circ m_g = \pi \text{ en } \mathbf{Dom}_{\mathsf{fg}}^{\mathsf{op}} &\iff m_{g^{-1}}^{\mathsf{op}} \circ p = p \text{ en } \mathbf{Dom}_{\mathsf{fg}} \\ &\iff m_{g^{-1}}^{\mathsf{op}}(p(b)) = p(b) \text{ para todo } b \in B. \end{aligned}$$ □

**1.12.10.** En segundo lugar, necesitamos la siguiente información puramente categórica:

**Lema.** (*i*) *Sea $\mathbf{C}$ una categoría. Un morfismo $f : X \to Y$ en $\mathbf{C}$ es un epimorfismo (monomorfismo) en $\mathbf{C}$ si y solamente si el correspondiente morfismo $f^{\mathsf{op}} : Y \to X$ es un monomorfismo (epimorfismo, respectivamente) en $\mathbf{C}^{\mathsf{op}}$.*

(*ii*) *Un morfismo $f : A \to B$ en $\mathbf{Dom}_{\mathsf{fg}}$ es un monomorfismo si y solamente si es inyectivo como función.*

*Demostración.* (*i*) Como $(\mathbf{C}^{\mathsf{op}})^{\mathsf{op}}$ es la categoría $\mathbf{C}$, es suficiente mostrar que un morfismo $f : X \to Y$ es un epimorfismo en $\mathbf{C}$ si y solamente si $f^{\mathsf{op}} : Y \to X$ es un monomorfismo en $\mathbf{C}^{\mathsf{op}}$, y esto es inmediato.

(*ii*) Sea $f : A \to B$ un morfismo en $\mathbf{Dom}_{\mathsf{fg}}$ y supongamos primero que es inyectivo. Si $g$, $h : C \to A$ son morfismos de $\mathbf{Dom}_{\mathsf{fg}}$ tales que $f \circ g = f \circ h$, entonces para cada $c \in C$ se tiene que $f(g(c)) = g(h(c))$ y, como $f$ es una función inyectiva, que $g(c) = h(c)$: vemos así que $g = h$.

Supongamos ahora, para probar la recíproca, que $f$ es un monomorfismo y sea $a \in A$ un elemento tal que $f(a) = 0$.

Afirmamos que $a$ tiene que ser algebraico sobre $\Bbbk$. Supongamos que no es ése el caso, y consideremos la subálgebra $C = \Bbbk[a]$ de $B$, que es claramente un objeto de $\mathbf{Dom}_{\mathsf{fg}}$. La hipótesis sobre $a$ implica que hay morfismos de álgebras $g, h : C \to A$ tales que $g(a) = a$ y $h(a) = 0$, y que $a$ esté en el núcleo de $p$ implica que $f \circ g = f \circ h$, ya que ambas composiciones toman el mismo valor en $a$. Como $f$ es un monomorfismo, esto implica que $g = h$ y, por lo tanto, que $a = g(a) = f(a) = 0$, lo que es absurdo si $a$ es trascendente.

Vemos así que $a$ es algebraico sobre $\Bbbk$, como dijimos. Sea $q \in \Bbbk[T]$ el polinomio minimal de $a$ sobre $\Bbbk$. Como $A$ es un dominio de integridad, este polinomio es irreducible y, por lo tanto, la subálgebra $C = \Bbbk[a]$ es un cuerpo. La restricción $p|_C$ tiene que ser por eso inyectiva y, en particular, $a = 0$. □

**1.12.11.** Con todo esto, podemos describir exactamente cuando una acción de un grupo sobre un objeto de $\mathbf{Dom}_{\mathsf{fg}}^{\mathsf{op}}$ admite un cociente:

**Proposición.** *Sea $m : G \to \mathsf{Aut}_{\mathbf{Dom}_{\mathsf{fg}}^{\mathsf{op}}}(A)$ una acción de un grupo $G$ sobre un álgebra $A$ en $\mathbf{Dom}_{\mathsf{fg}}^{\mathsf{op}}$ y sea $m^{\mathsf{op}} : G \to \mathsf{Aut}_{\mathbf{Dom}_{\mathsf{fg}}}(A)$ la correspondiente acción en $\mathbf{Dom}_{\mathsf{fg}}$.*

*(i) Hay un cociente para $m$ si y solamente si la subálgebra de invariantes $A^G$ de $A$ por la acción $m^{\mathsf{op}}$ de $G$ es finitamente generada.*

*(ii) Cuando ése es el caso, y si $\pi : A \to A^G$ es el morfismo de $\mathbf{Dom}_{\mathsf{fg}}^{\mathsf{op}}$ correspondiente al morfismo inclusión $A^G \hookrightarrow A$ en $\mathbf{Dom}_{\mathsf{fg}}$, entonces $\pi$ es un cociente de $A$ por la acción $m$ de $G$.*

*Demostración.* Supongamos primero que $A^G$ es un álgebra finitamente generada, de manera que la inclusión $p : A^G \to A$ es un morfismo de $\mathbf{Dom}_{\mathsf{fg}}$. Mostremos que el correspondiente morfismo $\pi : A \to A^G$ de $\mathbf{Dom}_{\mathsf{fg}}^{\mathsf{op}}$ es un cociente de $A$ por $G$.

Como obviamente $p$ toma valores en $A^G$, nuestra segunda observación de arriba nos dice que $\pi \circ m_g = m_g$ para todo $g \in G$ y, por lo tanto, $\pi$ tiene la propiedad $(Q_1)$. Sea, por otro lado, $\phi : A \to B$ un morfismo de $\mathbf{Dom}_{\mathsf{fg}}^{\mathsf{op}}$ tal que $\phi \circ m_g = \phi$ para todo $g \in G$. El correspondiente morfismo $f : B \to A$ de $\mathbf{Dom}_{\mathsf{fg}}$, entonces, tiene imagen contenida en $A^G$ y, en consecuencia, se factoriza por la inclusión $p$: esto es, existe un morfismo $\bar{f} : B \to A^G$ tal que $p \circ \bar{f} = f$ y, como $p$ es una función inyectiva, uno solo. Si $\bar{\phi} : A^G \to B$ es el morfismo de $\mathbf{Dom}_{\mathsf{fg}}^{\mathsf{op}}$ correspondiente a $\bar{f}$, tenemos entonces que $\bar{\phi} \circ \pi = \phi$ y $\bar{\phi}$ es el único morfismo $A^G \to B$ con esta propiedad. Vemos así que $\pi$ también tiene la propiedad $(Q_2)$.

Esto prueba la suficiencia de la condición de $(i)$. Veamos la necesidad. Supongamos que $\pi : A \to B$ es un cociente de $A$ por $G$ en $\mathbf{Dom}_{\mathsf{fg}}^{\mathsf{op}}$ y sea $p : B \to A$ el correspondiente morfismo de $\mathbf{Dom}_{\mathsf{fg}}$. Como $\pi \circ m_g = \pi$ para todo $g \in G$, tenemos que $p(B) \subseteq A^G$. Como $\pi$ es un cociente en $\mathbf{Dom}_{\mathsf{fg}}^{\mathsf{op}}$, es un epimorfismo en esa categoría y, por lo tanto, el morfismo $p$ de $\mathbf{Dom}_{\mathsf{fg}}$ es un monomorfismo allí: vemos así que $p$ es una función inyectiva. Mostremos ahora finalmente que su imagen es igual a $A^G$.

Sea $a \in A^G$ y consideremos la subálgebra $C = \Bbbk[a]$ de $A$ y el morfismo inclusión $f : C \to A$. Como $a \in A^G$, es inmediato que $f(C) \subseteq A^G$ y esto implica que si $\phi : A \to C$ es el morfismo de $\mathbf{Dom}_{\mathsf{fg}}^{\mathsf{op}}$ correspondiente a $f$ se tiene que $\phi \circ m_g = \phi$ para todo $g \in G$. Como $\pi$ es un cociente, existe un morfismo $\bar{\phi} : B \to C$ en $\mathbf{Dom}_{\mathsf{fg}}^{\mathsf{op}}$ tal que $\bar{\phi} \circ \pi = \phi$, y esto significa que existe un morfismo $\bar{f} : C \to B$ en $\mathbf{Dom}_{\mathsf{fg}}^{\mathsf{op}}$ tal que $p \circ \bar{f} = f$ y, por lo tanto, que $a = f(a) = p(\bar{f}(a)) \in p(B)$.

La conclusión de todo esto es que $p$ se correstringe a un isomorfismo $B \to A^G$ y, en particular, que el álgebra $A^G$ es finitamente generada. Esto prueba la afirmación (*i*) de la proposición. La segunda es consecuencia de la forma en que probamos la suficiencia. □

**1.12.12.** Volviendo a las variedades afines, tenemos:

**Proposición.** *Sea $X$ una variedad afín, sea $G$ un grupo y sea $m : G \to \mathsf{Aut}_{\mathbf{Aff}}(X)$ una acción de $G$ sobre $X$ en la categoría* **Aff**. *Existe un cociente de $X$ por $G$ si y solamente la subálgebra $\mathcal{O}(X)^G$ es finitamente generada. Cuando ese es el caso, y si $Y$ es una variedad afín tal que $\mathcal{O}(Y) \cong B$ y $\pi : X \to Y$ es el morfismo de* **Aff** *correspondiente a la composición $\mathcal{O}(Y) \cong B \hookrightarrow \mathcal{O}(X)$, entonces $\pi$ es un cociente de $X$ por $G$.*

*Demostración.* Esto es la combinación de las Proposiciones 1.12.7 y 1.12.11. □

**1.12.13. Ejemplo.** Veamos un ejemplo de esto. Fijemos $n \in \mathbb{N}$, sea $G$ un grupo cíclico de orden $n$, sea $\gamma$ un generador de $G$ y sea $\omega \in \mathbb{C}$ una raíz $n$-ésima primitiva de la unidad. Hay una acción $m : G \to \mathsf{Aut}_{\mathbf{Aff}}(\mathbb{A}^2)$ tal que $m_\gamma$ es el morfismo

$$m_\gamma : (p_1, p_2) \in \mathbb{A}^2 \mapsto (\omega^{-1} p_1, \omega p_2) \in \mathbb{A}^2.$$

Si identificamos $\mathcal{O}(\mathbb{A}^2)$ con el anillo de polinomios $\Bbbk[x_1, x_2]$, entonces la correspondiente acción $m^* : G \to \mathsf{Aut}_{\mathbf{Dom}_{\mathsf{fg}}}(\mathcal{O}(\mathbb{A}^2))$ es tal que el morfismo $m^*_\gamma : \mathcal{O}(\mathbb{A}^2) \to \mathcal{O}(\mathbb{A}^2)$ tiene

$$m^*_\gamma(x_1) = \omega x_1, \qquad m^*_\gamma(x_2) = \omega^{-1} x_2.$$

Determinemos la subálgebra $\mathcal{O}(\mathbb{A}^2)^G$ de invariantes bajo esta acción. Como $G$ está generado por $\gamma$, es inmediato que en este caso es

$$\mathcal{O}(\mathbb{A}^2)^G = \{f \in \mathcal{O}(\mathbb{A}^2) : m^*_\gamma(f) = f\}.$$

Supongamos que $f = \sum_{i,j} a_{i,j} x_1^i x_2^j$ es un elemento de $\mathcal{O}(\mathbb{A}^2)$, de manera que

$$m^*_\gamma(f) = \sum_{i,j} a_{i,j} \omega^{i-j} x_1^i x_2^j.$$

Es claro entonces que $m_\gamma^*(f) = f$ si para cada elección de índices $i$ y $j$ se tiene que

$$a_{i,j} \neq 0 \implies i \equiv j \mod n.$$

A partir de esta observación es fácil verificar que la subálgebra $\mathcal{O}(\mathbb{A}^2)^n$ tiene como base como espacio vectorial al conjunto

$$\{x_1^i x_2^j : i, j \in \mathbb{N}_0, i \equiv j \mod n\}$$

y que está generada como álgebra por sus tres elementos

$$x_1^n, \qquad x_1 x_2, \qquad x_2^n. \tag{8}$$

En particular, esta álgebra $\mathcal{O}(\mathbb{A}^2)^G$ es finitamente generada: la Proposición **1.12.12** nos dice que existe un cociente de $\mathbb{A}^2$ por $G$ en **Aff**.

Consideremos el álgebra de polinomios $\Bbbk[y_1, y_2, y_3]$ y el morfismo de álgebras $\phi : \Bbbk[y_1, y_2, y_3] \to \mathcal{O}(\mathbb{A}^2)^G$ tal que

$$\phi(y_1) = x_1^n, \qquad \phi(y_2) = x_1 x_2, \qquad \phi(y_3) = x_x^2.$$

Como los tres elementos de (8) generan $\mathcal{O}(\mathbb{A}^2)^G$, este morfismo $\phi$ es sobreyectivo. El elemento $h = y_1 y_3 - y_2^n$ pertenece al ideal $I = \ker \phi$. Mostremos que, de hecho, $I = (h)$.

Sea $f$ un elemento de $I$. Como $y_2^n \equiv y_1 y_2 \mod I$, todo monomio $y_1^i y_2^j y_3^k$ del álgebra $\Bbbk[y_1, y_2, y_3]$ es congruente módulo $I$ con otro en el que $y_2$ aparece con potencia menor que $n$. Podemos escribir a $f$ entonces en la forma

$$f = \sum_{\substack{i,k \geq 0 \\ 0 \leq j < n}} a_{i,j,k} y_1^i y_2^j y_3^k + u \tag{9}$$

con $u \in (h)$ y, por supuesto, la suma finita. La imagen de $f$ por $\phi$ es entonces

$$\phi(f) = \sum_{\substack{i,k \geq 0 \\ 0 \leq j < n}} a_{i,j,k} x_1^{ni+j} x_2^{nk+j} = 0. \tag{10}$$

Es inmediato verificar que

> *si $i, j, k', k' \geq 0$ y $0 \leq j, j' < n$ son tales que $(ni + j, nk + j) = (ni' + j', nk' + j')$, entonces $i = i'$, $j = j'$ y $k = k'$,*

y esto implica que en la suma de (10) los sumandos son múltiplos de monomios distintos dos a dos y, en consecuencia, que cada uno de los coeficientes debe anularse. Volviendo a la igualdad (9), vemos que $f \in (h)$ y, en definitiva, $I = (h)$, como queríamos.

El morfismo $f$ induce, por lo tanto, un isomorfismo

$$\bar{\phi} : \frac{\Bbbk[y_1, y_2, y_3]}{(y_1 y_3 - y_2^n)} \to \mathcal{O}(\mathbb{A}^2)^G.$$

Es inmediato, entonces, que $\mathcal{O}(\mathbb{A}^2)^G$ es un álgebra isomorfa a $\mathcal{O}(Y)$, con $Y$ la variedad afín $Y = Z(y_1 y_3 - y_2^n) \subseteq \mathbb{A}^3$. Más aún, la composición

$$\frac{\Bbbk[y_1, y_2, y_3]}{(y_1 y_3 - y_2^n)} \xrightarrow{\bar{\phi}} \mathcal{O}(\mathbb{A}^2)^G \hookrightarrow \mathcal{O}(\mathbb{A}^2)$$

se corresponde con el morfismo

$$\pi : (p_1, p_2) \in \mathbb{A}^2 \longmapsto (p_1^n, p_1 p_2, p_2^n) \in Y,$$

que es, por lo tanto, un cociente de $\mathbb{A}^2$ por $G$ en **Aff**. ■

**1.12.14. Ejemplo.** Sea $n \in \mathbb{N}$ y consideremos el grupo simétrico $S_n$ de grado $n$, esto es, el grupo de todas las permutaciones del conjunto $[\![n]\!] = \{1, \dots, n\}$. Hay una acción $m : S_n \to \mathsf{Aut}_{\mathbf{Aff}}(\mathbb{A}^n)$ que para cada $\sigma \in S_n$ tiene

$$m_\sigma : (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{A}^n \longmapsto (p_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, p_{\sigma^{-1}(n)}) \in \mathbb{A}^n.$$

La correspondiente acción $m^* : S_n \to \mathsf{Aut}_{\mathbf{Dom_{fg}}}(\mathcal{O}(\mathbb{A}^n))$ de $S_n$ sobre el álgebra $\mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$, a la que identificamos con $\Bbbk[x_1, \dots, x_n]$, tiene para cada $\sigma \in S_n$ al morfismo

$$m_\sigma^* : \mathcal{O}(\mathbb{A}^n) \to \mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$$

tal que $m_\sigma^*(x_i) = x_{\sigma(i)}$ para cada $i \in [\![n]\!]$. La subálgebra $\mathcal{O}(\mathbb{A}^n)^{S_n}$ es, por lo tanto, la de los polinomios simétricos de $\Bbbk[x_1, \dots, x_n]$. El llamado *Teorema Fundamental de las Funciones Simétricas* nos dice que esta subálgebra está generada como álgebra por los $n$ polinomios simétricos elementales

$$s_1, \quad s_2, \quad , \dots, \quad s_n$$

definidos, para cada $k \in [\![n]\!]$, por

$$s_k = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} x_{i_1} \cdots x_{i_k}.$$

Ese teorema afirma además que estos $n$ polinomios simétricos son algebraicamente independientes sobre $\Bbbk$ de manera que el morfismo de álgebras

$$p : \Bbbk[y_1, \dots, y_n] \to \Bbbk[s_1, \dots, s_n] = \mathcal{O}(\mathbb{A}^n)^{S_n}$$

tal que $p(y_i) = s_i$ para cada $i \in [\![n]\!]$ es un isomorfismo. Ahora bien, como $\mathcal{O}(\mathbb{A}^n)^{S_n}$ es finitamente generada, la Proposición 1.12.12 nos dice que hay un cociente de $\mathbb{A}^n$ por $S_n$ en **Aff**. Más aún, como el morfismo de álgebras $p$ es un isomorfismo, que el correspondiente morfismo de variedades $\pi : \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^n$ de **Aff**, que tiene

$$\pi(p_1, \dots, p_n) = (s_1(p_1, \dots, p_n), \dots, s_n(p_1, \dots, p_n))$$

para cada $(p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{A}^n$, es un cociente $\mathbb{A}^n$ por $S_n$ en **Aff**. Notemos que el cociente de $\mathbb{A}^n$ por esta acción de $S_n$ es de vuelta $\mathbb{A}^n$: esto es algo muy excepcional — esto es un caso particular del celebrado teorema de Chevalley–Shephard–Todd.

■

**1.12.15. Ejemplo.** Sea $\Bbbk^\times$ ahora el grupo multiplicativo del cuerpo $\Bbbk$, fijemos $n \in \mathbb{N}$ y consideremos la acción $m : \Bbbk^\times \to \mathsf{Aut}_{\mathbf{Aff}}(\mathbb{A}^n)$ de $G$ sobre $\mathbb{A}^n$ que para cada $\lambda \in \Bbbk^\times$ tiene

$$m_\lambda : (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{A}^n \longmapsto (\lambda p_1, \dots, \lambda p_n) \in \mathbb{A}^n.$$

La correspondiente acción $m^* : \Bbbk^\times \to \mathsf{Aut}_{\mathbf{Dom_{fg}}}(\mathcal{O}(\mathbb{A}^n))$ de $\Bbbk^\times$ sobre el álgebra $\mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$, tiene, para cada $\lambda \in \Bbbk^\times$, el morfismo $m^*_\lambda : \mathcal{O}(\mathbb{A}^n) \to \mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$ tal que $m^*_\lambda(x_i) = \lambda^{-1}x_i$ para cada $i \in [\![n]\!]$.

Sea $f$ un elemento de $\mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$. Existen $d \in \mathbb{N}_0$ polinomios *homogéneos* $f_0, \dots, f_d$ de grados $0, \dots, d$, respectivamente, tales que $f = f_0 + \cdots + f_d$, y entonces para cada $\lambda \in \Bbbk^\times$ tenemos que

$$m^*_\lambda(f) = f_0 + \lambda^{-1}f_1 + \lambda^{-2}f_2 + \cdots + \lambda^{-d}f_d.$$

Se sigue de esto que $f$ pertenece a la subálgebra de invariantes $\mathcal{O}(\mathbb{A}^n)^{\Bbbk^\times}$ si y solamente si

$$f_0 + f_1 + f_2 + \cdots + f_d = f_0 + \lambda^{-1}f_1 + \lambda^{-2}f_2 + \cdots + \lambda^{-d}f_d$$

para todo $\lambda \in \Bbbk^\times$ y, como dos polinomios son iguales si y solamente si tienen componentes homogéneas correspondientes iguales, esto ocurre si y solamente si

$$f_i = \lambda^{-i}f_i \text{ para cada } i \in \{0, \dots, d\} \text{ y cada } \lambda \in \Bbbk^\times.$$

Como $\Bbbk^\times$ tiene más que un elemento, esto implica inmediatamente que $f$ pertenece a $\mathcal{O}(\mathbb{A}^n)^{\Bbbk^\times}$ si y solamente si $f \in \Bbbk$, esto es, que

$$\mathcal{O}(\mathbb{A}^n)^{\Bbbk^\times} = \Bbbk.$$

Esta subálgebra de invariantes es evidentemente finitamente generada, así que hay un cociente de $\mathbb{A}^n$ por esta acción de $\Bbbk^\times$ en **Aff**. Más aún, si $\pi : \mathbb{A}^n \to X$ es un tal cociente, tenemos que $\mathcal{O}(X) \cong \Bbbk$ y, por supuesto, esto implica que $X$ tiene exactamente un punto. ■

**1.12.16.** En los tres ejemplos que acabamos de ver, tenemos una acción de un grupo $G$ sobre una variedad afín $X$ y la subálgebra de invariantes $\mathcal{O}(X)^G$ de $\mathcal{O}(X)$ es finitamente generada: eso implica, de acuerdo a la Proposición 1.12.12, que existe un cociente $\pi : X \to Y$ de $X$ por $Y$ y que el morfismo de $\mathbf{Dom}_{\mathsf{fg}}$ correspondiente a $\pi$ es la composición $\mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(X)^G \to \mathcal{O}(Y)$ de un isomorfismo $\mathcal{O}(Y) \cong \mathcal{O}(X)^G$ con la inclusión $\mathcal{O}(X)^G \to \mathcal{O}(X)$.

Esto podría motivar la idea optimista de que *siempre*, en esa situación, la subálgebra de invariantes $\mathcal{O}(X)^G$ es finitamente generada. Esto no es cierto. Masayoshi Nagata, en su trabajo [Nag1960] sobre el 14º problema de Hilbert —que, en particular, resolvió este problema— exhibió un ejemplo de una acción de un grupo $G$ sobre una variedad afín $X$ tal que el álgebra $\mathcal{O}(X)^G$ no es finitamente generada. En su ejemplo, la variedad $X$ es $\mathbb{A}^{32}$, el espacio afín de dimensión 32 sobre un cuerpo $\Bbbk$ adecuadamente elegido, pero hoy hay ejemplos de esto mucho más chicos.

El problema de encontrar condiciones sobre el grupo $G$, la variedad $X$ y la acción de $G$ sobre $X$ que garanticen que la subálgebra de invariantes $\mathcal{O}(X)^G$ sea finitamente generada ha sido central en geometría, teoría de invariantes y teoría de representaciones a lo largo de más de un siglo y el inmenso cuerpo de teoría construido alrededor de él es sin duda uno de los más bellos de la matemática.

Terminaremos esta sección dando un ejemplo de un resultado general en esta dirección, interesante e sí mismo y de enorme importancia histórica. El Teorema **??** que probaremos abajo fue probado por David Hilbert y es la motivación original para su teorema que afirma que los anillos de polinomios con coeficientes en un cuerpo son noetherianos.

**1.12.17.** Fijemos $n \in \mathbb{N}$ y un subgrupo $G$ de $\mathsf{GL}_n(\Bbbk)$, y consideremos la acción natural

$$m : G \to \mathsf{Aut}_{\mathbf{Aff}}(\mathbb{A}^n)$$

de $G$ sobre el espacio afín $\mathbb{A}^n$: si $g = (g_{i,j})$ es un elemento de $G$, entonces el morfismo $m_g$ es

$$m_g : (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{A}^n \longmapsto \left( \sum_{j=1}^{n} g_{j,1} p_i, \dots, \sum_{j=1}^{n} g_{j,n} p_i \right) \in \mathbb{A}^n.$$

La acción inducida $m^* : G \to \mathsf{Aut}_{\mathbf{Dom}_{\mathsf{fg}}}(\mathcal{O}(\mathbb{A}^n))$ es tal que si $g \in G$, $g^{-1} = (g^{i,j})$ y $k \in [\![n]\!]$, entonces

$$m_g^*(x_k) = \sum_{j=1}^{n} g^{j,k} x_j.$$

**1.12.18.** Si $R$ es un anillo y $S$ un subanillo de $R$, una función $\rho : R \to S$ es un ***operador de Reynolds*** si es $S$-lineal y $\rho(s) = s$ para todo $s \in S$. Una situación importante en la que existen operadores de Reynolds es la siguiente:

**Lema.** *Sea $G$ un grupo, sea $R$ un anillo y supongamos que $G$ actúa sobre $R$. Si $G$ es finito y su orden $|G|$ es inversible en $R$, entonces la función $\rho : R \to R^G$ que para cada $r \in R$ tiene*

$$\rho(r) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} m_g(r)$$

*es un operador de Reynolds.*

*Demostración.* Si $r \in R$ y $s \in R^G$, entonces $m_g(s) = s$ para todo $g \in G$ y, por lo tanto,

$$\begin{aligned}\rho(sr) &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} m_g(sr) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} m_g(s) m_g(r) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} s m_g(r) \\ &= s \cdot \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} m_g(r) = s \cdot \rho(r),\end{aligned}$$

así que $\rho$ es $S$-lineal. Por otro lado, si $s \in R^G$, entonces

$$\rho(s) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} m_g(s) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} s = s.$$

Esto prueba el lema. $\square$

**1.12.19.** Cuando hay un operador de Reynolds para una inclusión de anillos $S \subseteq R$, podemos transferir información de un anillo al otro. Un ejemplo de eso que nos interesa es:

**Proposición.** *Sea $R$ un anillo, $S$ un subanillo de $R$ y $\rho : R \to S$ un operador de Reynolds.*
(*i*) *Si $I$ es un ideal de $S$, entonces $RI \cap S = I$.*
(*ii*) *Si $R$ es noetheriano, entonces $S$ también lo es.*

Recordemos que $RI$ denota el ideal de $R$ generado por los productos $ri$ con $r \in R$ e $i \in I$.

*Demostración.* (*i*) Es claro que $I \subseteq RI \cap S$. Supongamos, por otro lado, que $x \in RI \cap S$, de manera que $x \in S$ y hay $r_1, \dots, r_n \in R$, $s_1, \dots, s_n \in I$ tales que $x = \sum_{i=1}^m r_i s_i$. Como $\rho$ es un operador de Reynolds, tenemos que

$$x = \rho(x) = \sum_{i=1}^n \rho(r_i s_i) = \sum_{i=1}^n s_i \rho(r_i) \in I.$$

($ii$) Supongamos que $R$ es noetheriano y sea $I_1 \subseteq I_2 \subseteq I_3 \subseteq \cdots$ una cadena creciente de ideales de $I$. Es claro que $RI_1 \subseteq RI_2 \subseteq RI_3 \subseteq \cdots$ es una cadena creciente de ideales de $R$, así que la hipótesis sobre $R$ implica que existe $t \in \mathbb{N}_0$ tal que $RI_t = RI_{t+i}$ para todo $i \geq 0$ y, por lo tanto, de acuerdo a la primera parte, tenemos que

$$I_t = RI_t \cap S = RI_{t+i} \cap S = I_{t+i}$$

para cada $i \geq 0$. Así, el anillo $S$ es noetheriano. □

**1.12.20.** Podemos ahora probar el teorema que buscamos:

**Teorema.** *Sea $G$ un subgrupo de $\mathsf{GL}_n(\Bbbk)$ y consideremos la acción natural de $G$ sobre el álgebra $R = \Bbbk[x_1, \dots, x_n]$ descripta en 1.12.17. Si existe un operador de Reynolds $\rho : R \to R^G$, entonces el álgebra $R^G$ es finitamente generada.*

*Demostración.* Para cada $d \in \mathbb{N}_0$ sea $R_d$ el subespacio de $R$ generado por los polinomios homogéneos de grado $d$. Tenemos que

$$R = \bigoplus_{d \geq 0} R_d \tag{11}$$

y es claro que $R_0 = \Bbbk$, $R_1$ es el subespacio generado por las variables $x_1, \dots, x_n$ y para cada $d \geq 1$ el subespacio $R_d$ coincide con $(R_1)^d$, el subespacio de $R$ generado por todos los productos de $d$ elementos de $R_1$.

Si $g \in G$, entonces la forma de la acción de $G$ sobre $R$ implica inmediatamente que $m_g(R_1) = R_1$ y entonces, como la acción es por automorfismos de álgebras, que para cada $d \geq 0$ es

$$m_g(R_d) = m_g((R_1)^d) = (m_g(R_1))^d = (R_1)^1 = R_d.$$

Vemos de esta forma que la acción de $G$ sobre $R$ preserva la descomposición en suma directa (11) y, como consecuencia de esto, que

$$R^G = \bigoplus_{d \geq 0} R_d^G,$$

con $R_d^G = \{r \in R_d : m_g(r) = 0 \text{ para cada } g \in G\}$.

Consideremos el subespacio $R_+^G = \bigoplus_{d>0} R_d^G$ de $R^G$. Se trata claramente de un ideal. Como el álgebra $R$ es noetheriana y hay por hipótesis un operador de Reynolds $\rho : R \to R^G$, la Proposición 1.12.19 nos dice que la subálgebra $R^G$ es noetheriana: en particular, el ideal $R_+^G$ es finitamente generado.

TERMINAR □

**1.12.21. Corolario.** *Sea $G$ un subgrupo de $\mathsf{GL}_n(\Bbbk)$ y consideremos la acción natural de $G$ sobre el álgebra $R = \Bbbk[x_1, \dots, x_n]$ descripta en 1.12.17. Si $G$ es finito y su orden $|G|$ es inversible en $\Bbbk$, entonces el álgebra de invariantes $R^G$ es finitamente generada.*

*Demostración.* TERMINAR □

## §1.13. Normalización

**1.13.1. Lema.** *Sea $K$ un cuerpo infinito. Si $f \in K[x_1, \dots, x_d]$ es un polinomio no nulo de grado $N$, entonces existen escalares $a_1, \dots, a_{d-1}$ y $b$ en $K$ tales que el polinomio*

$$bf(x_1 + a_1x_d, \dots, x_{d-1} + a_{d-1}x_d, x_d),$$

*visto como elemento de $K[x_1, \dots, x_{d-1}][x_1]$, es mónico de grado $d$.*

*Demostración.* Podemos escribir

$$f(x_1, \dots, x_d) = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^d \\ |\alpha| \leq N}} c_\alpha x^\alpha.$$

Si $a_1, \dots, a_{d-1} \in K$, entonces expandiendo las potencias gracias al la fórmula de Newton vemos inmediatamente que

$$\begin{aligned} &f(x_1 + a_1x_d, \dots, x_{d-1} + a_{d-1}x_d, x_d) \\ &\qquad = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^d \\ |\alpha| \leq N}} c_\alpha (x_1 + a_1x_d)^{\alpha_1} \cdots (x_{d-1} + a_{d-1}x_d)^{\alpha_{d-1}} x_d^{\alpha_d} \\ &\qquad = \left( \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^d \\ |\alpha| = N}} c_\alpha a_1^{\alpha_1} \cdots a_{d-1}^{\alpha_{d-1}} \right) x_d^N + g, \end{aligned}$$

con $g$ un elemento de $K[x_1, \dots, x_{d-1}][x_d]$ de grado *menor* que $N$.

Ahora bien, como $f$ tiene grado $N$ y no es nulo, el polinomio

$$f_N = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^d \\ |\alpha| = N}} c_\alpha x^\alpha$$

no es nulo. Existe entonces, porque el cuerpo $K$ es infinito, un punto $(b_1, \dots, b_d) \in \Bbbk^d$ tal que $f_N(b_1, \dots, b_d) \neq 0$. Si $b_d \neq 0$, entonces como $f_N$ es homogéneo de grado $N$

tenemos que

$$f_N\left(\frac{b_1}{b_d},\dots,\frac{b_{d-1}}{b_d},1\right) \geq 0$$

$\square$

**1.13.2. Proposición.** *Sea $A$ un álgebra finitamente generada. Existen $d \geq 0$ y elementos $y_1, \dots, y_d$ de $A$ algebraicamente independientes tales que $A$ es entera sobre su subálgebra $\Bbbk[y_1,\dots,y_n]$.*

*Demostración.* Existen subconjuntos finitos $S$ de $A$ tales que $A$ es entera sobre su subálgebra $[S]$; por ejemplo, cualquier conjunto finito $S$ que genere a $A$ como álgebra tiene esa propiedad. Elijamos un tal conjunto $S$ de cardinal mínimo, sea $d$ ese cardinal y sean $y_1, \dots, y_d$ los elementos de $S$. Para probar la proposición es suficiente que mostremos que estos $d$ elementos de $A$ son algebraicamente independientes.

Para ello, supongamos que, por el contrario, esos elementos son algebraicamente dependientes, y sea $f \in \Bbbk[X_1,\dots,X_d]$ un polinomio tal que $f(y_1,\dots,y_d) = 0$ en $A$. $\square$

**1.13.3. Proposición.** *Sea $A$ un álgebra íntegra y finitamente generada, sea $K$ el cuerpo de fracciones de $A$. Si $L/K$ es una extensión finita de cuerpos y $B$ es la clausura íntegra de $A$ en $L$, entonces $B$ es un $A$-módulo finitamente generado.*

# Referencias

[Nag1960] Masayoshi Nagata, *On the fourteenth problem of Hilbert*, Proc. Internat. Congress Math. 1958, Cambridge Univ. Press, New York, 1960, pp. 459–462. MR0116056