Álgebras de Lie

Mariano Suárez-Álvarez

12 de abril, 2012

Capítulo I
Álgebras de Lie

§1. Álgebras, subálgebras e ideales

Recordamos las nociones de subálgebras e ideales de un álgebra de Lie, sus propiedades básicas, la construcción de álgebras cocientes y los dos primeros teoremas de isomorfismo, y terminamos con la definición de extensiones de álgebras de Lie.

1.1.1. Sea L un álgebra de Lie. Si S y T son subespacios de L, escribimos $[S,T]$ al subespacio de L generado por el conjunto $\{[x,y] : x \in S, y \in T\}$. Es fácil ver que si S, T, T' son subespacios de L, entonces

$$\begin{aligned}
&[S,T] = [T,S],\\
&[S,T+T'] = [S,T] + [S,T'],\\
&S \subseteq T' \implies [S,T] \subseteq [S,T'].
\end{aligned}$$

1.1.2. Sea L un álgebra de Lie e I un subespacio de L. Decimos que I es una ***subálgebra*** de L, y escribimos $I \leq L$, si $[I,I] \subseteq I$. Por otro lado, decimos que I es un ***ideal*** de L, y escribimos $I \trianglelefteq L$, si $[L,I] \subseteq I$. Se sigue inmediatamente de estas definiciones que todo ideal de L es una subálgebra.

El ***centro*** de L es el conjunto $\mathfrak{Z}(L) = \{x \in L : [x,L] = 0\}$. Es claro que se trata de un ideal de L. Decimos que L es ***abeliana*** si $[L,L] = 0$; en ese caso todo subespacio de L es un ideal y $\mathfrak{Z}(L) = L$.

1.1.3. Proposición. *Sea L un álgebra de Lie.*

(*i*) *La intersección de una familia de subálgebras o ideales de L es una subálgebra o un ideal, respectivamente.*

(*ii*) *Si I es un ideal de L y K una subálgebra, entonces $I+K$ es una subálgebra de L.*

(*iii*) *Si I y J son ideales de L, entonces $I+J$ es un ideal de L.*

(*iv*) *Si $\mathcal{I}$ es una familia de ideales de L, entonces la suma $\sum_{I\in\mathcal{I}} I$ es un ideal de L.*

Demostración. La primera parte es inmediata. Si I y K son un ideal y una subálgebra de L, respectivamente, entonces

$$[I+K, I+K] = [I,I] + [I,K] + [K,I] + [K,K] \subseteq I+K,$$

ya que los tres primeros sumandos están contenidos en I porque I es un ideal y el cuarto está contenido en K porque K es una subálgebra. Esto prueba (*ii*).

Para ver (*iii*), sean I y J dos ideales de L. Entonces $[L, I+J] \subseteq [L,I]+[L,J] \subseteq I+J$, precisamente porque I y J son ideales, y entonces $I+J$ es un ideal de L.

Finalmente, sea $\mathcal{I}$ una familia arbitraria de ideales de L y sea $J = \sum_{I\in\mathcal{I}} I$ su suma. Si $x \in L$ e $y \in J$, entonces existen $n \geq 0$ e ideales $I_1 \dots, I_n \in \mathcal{I}$ tales que $y \in \sum_{i=1}^{n} I_i$ y —como gracias a (*iii*) y a una inducción evidente esta última suma $\sum_{i=1}^{n} I_i$ es un ideal de L— tenemos que

$$[x,y] \in [L, \sum_{i=1}^{n} I_i] \subseteq \sum_{i=1}^{n} I_i \subseteq J.$$

Esto implica que $[L,J] \subseteq J$ y, por lo tanto, que J es un ideal de L. □

1.1.4. Proposición. *Sea L un álgebra de Lie y sea I un ideal de L. Existe una única estructura de álgebra de Lie sobre el espacio vectorial cociente L/I tal que la proyección canónica $\pi : x \in L \mapsto x+I \in L/I$ es un morfismo de álgebras de Lie.*

Siempre que consideremos a un cociente de un álgebra de Lie por uno de sus ideales como álgebra de Lie será con respecto a la estructura que describe esta proposición.

Demostración. Si $x, x', y, y' \in L$ son tales que $x - x \in I$ e $y - y' \in I$, entonces $[x,y]+I = [x',y']+I$, ya que

$$[x,y] - [x',y'] = [x-x', y] + [x', y-y'] \in [I,L] + [L,I] \subseteq I$$

porque I es un ideal. Existe entonces una función $[\![-,-]\!] : L/I \times L/I \to L/I$ tal que para cada $x, y \in L$ vale que $[\![x+I, y+I]\!] = [x,y]+I$. Esta función es anti-simétrica y satisface la condición de Jacobi: si $x, y, z \in L$, entonces

$$[\![x+I, y+I]\!] = [x,y]+I = -[y,x]+I = -([y,x]+I) = -[\![y+I, x+I]\!]$$

y

$$\begin{aligned}[\![x+I, [\![y+I, z+I]\!]]\!] + [\![y+I, [\![z+I, x+I]\!]]\!] + [\![z+I, [\![x+I, y+I]\!]]\!] \\ = [x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] + I = I.\end{aligned}$$

Esto significa que $[\![-,-]\!]$ hace de L/I un álgebra de Lie. Si $\pi : L \to L/I$ es la proyección canónica, entonces para cada $x, y \in L$ tenemos que

$$\pi([x,y]) = [x,y]+I = [\![x+I, y+I]\!] = [\![\pi(x), \pi(y)]\!],$$

así que π es un morfismo de álgebras de Lie. Finalmente, si $[\![-,-]\!]'$ es otra estructura de álgebra de Lie sobre L/I que hace que la proyección canónica π sea un morfismo de álgebras, tenemos que para todo $x, y \in L$ vale que

$$[\![x+I, y+I]\!]' = [\![\pi(x), \pi(y)]\!]' = \pi([x,y]) = [\![\pi(x), \pi(y)]\!] = [\![x+I, y+I]\!],$$

de manera que, de hecho, $[\![-,-]\!]' = [\![-,-]\!]$. $\square$

1.1.5. Proposición. *Sea $f : L \to L'$ un morfismo de álgebras de Lie. El núcleo* $\ker f$ *es un ideal de L, la imagen* $\operatorname{im} f$ *es una subálgebra de L' y la función lineal $\bar{f} : x + \ker f \in L/\ker f \mapsto f(x) \in \operatorname{im} f$ es un isomorfismo de álgebras de Lie.*

Demostración. Si $x \in L$ e $y \in \ker f$, entonces $f([x,y]) = [f(x), f(y)] = [f(x), 0] = 0$, de manera que $[x,y] \in \ker f$: esto nos dice que $[L, \ker f] \subseteq \ker f$ y, en consecuencia, que $\ker f$ es un ideal de L.

Por otro lado, si $u, v \in \operatorname{im} f$, de manera que existen $x, y \in L$ tales que $f(x) = u$ y $f(y) = v$, entonces $[u,v] = [f(x), f(y)] = f([x,y]) \in \operatorname{im} f$: vemos así que $\operatorname{im} f$ es una subálgebra de L'.

Sabemos del álgebra lineal que la función $\bar{f} : L/\ker f \to \operatorname{im} f$ tal que $\bar{f}(x + I) = f(x)$ para todo $x \in L$ es lineal y que se trata de un isomorfismo. Para completar la prueba de la proposición, entonces, basta mostrar que se trata de un morfismo de álgebras de Lie y esto sigue de un cálculo directo: si $x, y \in L$, entonces

$$\begin{aligned}\bar{f}([x+I, y+I]) &= \bar{f}([x,y] + I) = f([x,y]) + I = [f(x), f(y)] + I \\ &= [f(x) + I, f(y) + I] = [\bar{f}(x+I), \bar{f}(y+I)].\end{aligned}$$ $\square$

1.1.6. Proposición. *Sea L un álgebra de Lie. Si I es un ideal de L y K una subálgebra de L, entonces I es un ideal de $I + K$, $I \cap K$ es un ideal de K y la función*

$$x + I \cap K \in \frac{K}{I \cap K} \mapsto x + I \in \frac{I + K}{I}$$

es un isomorfismo de álgebras de Lie.

Demostración. Sean I y K un ideal y una subálgebra de L, respectivamente. Como

$$[I + K, I] \subseteq [L, I] \subseteq I$$

porque I es un ideal de L, vemos que I es un ideal de $I + K$. Por otro lado, $[K, I \cap K] \subseteq [K, K] \subseteq K$, porque $I \cap K \subseteq K$ y K es una subálgebra, y $[K, I \cap K] \subseteq [L, I] \subseteq I$, porque I es un ideal de L, así que, de hecho, $[K, I \cap K] \subseteq I \cap K$, esto es, $I \cap K$ es un ideal de K.

Esto prueba las dos primeras afirmaciones del enunciado. Sabemos del álgebra lineal que hay una función $f : H/I \cap K \to (I + K)/I$ tal que $f(x + I \cap K) = f(x) + I$ para todo $x \in K$ y que se trata de un isomorfismo de espacios vectoriales. Queda solamente entonces mostrar que se trata de un morfismo de álgebras de Lie y eso es inmediato. $\square$

1.1.7. Una *extensión* de álgebras de Lie es una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} K \longrightarrow 0 \tag{1}$$

en la que I, L y K son álgebras de Lie y las funciones lineales f y g son morfismos de álgebras de Lie. Es claro que en esa situación se tiene necesariamente que la imagen de f es un ideal de L.

La extensión es ***central*** si ese ideal $\operatorname{im} f$ está contenido en el centro de L; es ese caso I es un ideal abeliano.

Decimos que un álgebra de Lie L se obtiene por extensión a partir de un álgebra K por otra I si existe una extensión de álgebras de Lie como (1).

§2. Álgebras nilpotentes

Definimos qué es un álgebra nilpotente. Damos el ejemplo del álgebra de matrices estrictamente triangulares superiores y el de las álgebras nilpotentes de endomorfismos de un espacio vectorial asociadas a banderas de subespacios. Mostramos que el centro de un álgebra nilpotente es no trivial y que una extensión central de un álgebra nilpotente es nilpotente. Terminamos mostrando que la clase de álgebras nilpotentes es la más chica cerrada por extensiones centrales que contiene a las abelianas.

1.2.1. Si L es un álgebra de Lie, definimos una sucesión de subespacios $(L^i)_{i\geq 1}$ de L, la ***cadena central descendente***, poniendo $L^1 = L$ y $L^{i+1} = [L^i, L]$ para cada $i \geq 1$.

1.2.2. Proposición. *Sea L un álgebra de Lie. Para todo $i \geq 1$ el subespacio L^i es un ideal de L y la sucesión $(L^i)_{i\geq 1}$ es decreciente, esto es,*

$$L = L^1 \supseteq L^2 \supseteq L^3 \supseteq \cdots$$

Demostración. Es claro que L^1 es un ideal de L. Supongamos ahora que $i \geq 1$ e inductivamente que L^i es un ideal de L. Para ver que $[L, L^{i+1}]$, que es igual a $[L, [L, L^i]]$, está contenido en L^{i+1}, es suficiente que mostremos que si $x, y \in L$ y $z \in L^i$, entonces $[x, [y, z]] \in L^{i+1}$. Pero en ese caso tenemos que

$$[x, [y, z]] = [[x, y], z] + [y, [x, z]] \in [L, L^i] + [L, [L, L^i]] \subseteq L^{i+1} + [L, L^i] = L^{i+1},$$

usando en la primera inclusión que L^i es un ideal de L y en la última igualdad la definición de L^{i+1}. Concluimos así que L^i es un ideal de L para todo $i \geq 1$ y, en particular, que si $i \geq 1$ se tiene que $L^{i+1} = [L, L^i] \subseteq L^i$. La sucesión de ideales $(L^i)_{i\geq 1}$ es por lo tanto decreciente. □

1.2.3. Un álgebra de Lie es ***nilpotente*** si existe $n \geq 0$ tal que $L^{n+1} = 0$ y en ese caso el menor entero n con esa propiedad es el ***índice de nilpotencia*** de L. Un álgebra de Lie es nilpotente de índice 0 si y sólo si es nula, y es nilpotente de índice 1 si y sólo si es abeliana. En general, podemos considerar a la condición de nilpotencia como una forma débil de la de ser abeliana.

1.2.4. Proposición. *Un álgebra de Lie L es nilpotente si y solamente si existe $n \geq 0$ tal que para toda elección de $x_1, \ldots, x_n \in L$ la función lineal $\mathsf{ad}(x_1) \circ \cdots \circ \mathsf{ad}(x_n) : L \to L$ es nula. Cuando ese es el caso, se tiene en particular que para todo $x \in L$ la función lineal $\mathsf{ad}(x) : L \to L$ es nilpotente.*

Demostración. Esto es consecuencia de la observación de que para todo $i \geq 0$ el subespacio L^{i+1} de L es el generado por los elementos de la forma $(\mathsf{ad}(x_1)\circ\cdots\circ\mathsf{ad}(x_k))(y)$ con $x_1, \ldots, x_k, y \in L$. □

1.2.5. El ejemplo más importante de álgebra de Lie nilpotente es el dado por la siguiente proposición:

Proposición. *Sea $n \geq 1$. El conjunto $\mathfrak{n}_n(\Bbbk)$ de las matrices $A \in \mathfrak{gl}_n(\Bbbk)$ que son estrictamente triangulares superiores es una subálgebra nilpotente de $\mathfrak{gl}_n(\Bbbk)$.*

Demostración. Es claro que $\mathfrak{n}_n(\Bbbk)$ es un subespacio de $\mathfrak{gl}_n(\Bbbk)$. Una matriz $A = (a_{i,j})$ de $\mathfrak{gl}_n(\Bbbk)$ es un elemento de $\mathfrak{n}_n(\Bbbk)$ si y solamente si $a_{i,j} = 0$ siempre que $j \leq i + 1$, y cuando ese es el caso tiene sentido considerar el mayor elemento $d(A)$ de $\{1, \dots, n-1\}$ tal que $a_{i,j} = 0$ siempre que $j \leq i + d(A)$. Es claro que $d(A) = n - 1$ si y solamente si $A = 0$, y que para cada $A, B \in \mathfrak{n}_n(\Bbbk)$ se tiene que

$$d(A+B) \geq \min\{d(A), d(B)\}. \tag{2}$$

Por otro lado, afirmamos que

$$\textit{si } A \textit{ y } B \textit{ son elementos de } \mathfrak{n}_n(\Bbbk), \textit{ entonces } d(AB) \geq d(A) + d(B). \tag{3}$$

En efecto, sean $A = (a_{i,j})$ y $B = (b_{i,j})$ dos elementos de $\mathfrak{n}_n(\Bbbk)$ y sean $i, j \in \{1, \dots, n\}$ tales que $j \leq i + d(A) + d(B)$. Para cada $k \in \{1, \dots, n\}$ se tiene que $k \leq i + d(A)$ o que $j \leq k + d(A)$, así que cada sumando en la suma $\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}$ se anula: esto nos dice que la componente (i,j)-ésima del producto AB es nula y, por lo tanto, que $d(AB) \geq d(A) + d(B)$.

Una consecuencia inmediata de (2) y (3) es que

$$\textit{si } A \textit{ y } B \textit{ son elementos de } \mathfrak{n}_n(\Bbbk), \textit{ entonces } d([A,B]) \geq d(A) + d(B). \tag{4}$$

En particular, si A y B son elementos de $\mathfrak{n}_n(\Bbbk)$, esto nos dice que $d([A,B]) \geq 1$, de manera que $[A,B] \in \mathfrak{n}_n(\Bbbk)$: el subespacio $\mathfrak{n}_n(\Bbbk)$ es por lo tanto una subálgebra de $\mathfrak{gl}_n(\Bbbk)$. Por otro lado, tenemos que

$$\textit{si } i \geq 1 \textit{ y } A \in \mathfrak{n}_n(\Bbbk)^i, \textit{ entonces } d(A) \geq i. \tag{5}$$

Probémoslo haciendo inducción sobre i, notando que ya sabemos que es cierto si $i = 1$. Supongamos entonces que $i \geq 1$ y que $d(A) \geq i$ para todo $A \in \mathfrak{n}_n(\Bbbk)^i$. En ese caso, si $A \in \mathfrak{n}_n(\Bbbk)$ y $B \in \mathfrak{n}_n(\Bbbk)^i$, nuestra observación (4) nos dice que $d([A,B]) \geq i + 1$: vemos así que la función d toma valores mayores iguales que $i + 1$ sobre un conjunto generador del espacio $\mathfrak{n}_n(\Bbbk)^{i+1}$ y, en vista de (2), que $d(A) \geq i + 1$ para todo elemento A de $\mathfrak{n}_n(\Bbbk)^{i+1}$.

Se sigue de (5) que $d(A) \geq n$ si $A \in \mathfrak{n}_n(\Bbbk)^n$ y, como observamos al principio, esto implica que el único elemento de $\mathfrak{n}_n(\Bbbk)$ es la matriz nula: concluimos de esta forma que $\mathfrak{n}_n(\Bbbk)^n = 0$ y, en definitiva, que el álgebra de Lie $\mathfrak{n}_n(\Bbbk)$ es nilpotente. □

1.2.6. Podemos generalizar el ejemplo de la Proposición 1.2.5. Si V es un espacio vectorial, una ***bandera*** es una secuencia finita $(V_i)_{i=0}^{m}$ de subespacios de V tal que $0 = V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq \cdots \subsetneq V_m = V$.

Proposición. *Sea V un espacio vectorial no nulo y sea $F = (V_i)_{i=0}^{m}$ una bandera. El conjunto $\mathfrak{n}(F)$ de todas las funciones lineales $f : V \to V$ tales que $f(V_i) \subseteq V_{i-1}$ para cada $i \in \{1, \dots, m\}$ es una subálgebra de Lie nilpotente de $\mathfrak{gl}(V)$.*

Demostración. Es claro que $\mathfrak{n}(F)$ es un subespacio de $\mathfrak{gl}(V)$. Por comodidad, pongamos $V_i = 0$ si i es un entero negativo. Para cada $f \in \mathfrak{n}(F)$ ponemos

$$d(f) = \sup\{d \in \mathbb{N} : f(V_i) \subseteq V_{i-d} \text{ para cada } i \in \{1, \dots, m\}\},$$

haciendo la convención de que $d(f) = \infty$ si $D(f)$ no es acotado; notemos que esto tiene sentido, ya que el conjunto cuyo supremo estamos tomando no es vacío: contiene a 1. Es inmediato verificar que

- para todo $f \in \mathfrak{n}(F)$ se tiene que $d(f) \geq 1$ y que $d(f) \geq m$ si y solamente $f = 0$, y que
- siempre que $f, g \in \mathfrak{n}(F)$ se tiene que $d(f \circ g) \geq d(f) + d(g)$, de manera que en particular $d([f, g]) \geq d(f) + d(g)$.

Esta última observación implica, por un lado, que $\mathfrak{n}(F)$ es una subálgebra de $\mathfrak{gl}(V)$ y, por otro, gracias una inducción evidente, que

- si $n \geq 1$ y $f \in \mathfrak{n}(F)^n$, entonces $d(f) \geq n$.

De todo esto se sigue que $\mathfrak{n}(F)^m = 0$, ya que $d(f) \geq m$ para todo $f \in \mathfrak{n}(F)^m$: vemos así que $\mathfrak{n}(F)$ es un álgebra de Lie nilpotente. □

1.2.7. La siguiente observación es una consecuencia casi inmediata de la definición:

Proposición. *El centro de un álgebra de Lie nilpotente es no trivial.*

Demostración. Sea L un álgebra de Lie nilpotente de índice de nilpotencia n, de manera que $L^n \neq 0$ y $[L, L^n] = L^{n+1} = 0$. Es claro que el centro de L contiene a L^n, así que no es el subespacio nulo. □

1.2.8. Proposición. *Si L es un álgebra de Lie nilpotente e I es un ideal de L, entonces tanto I como el cociente L/I son álgebras de Lie nilpotentes.*

Demostración. Sea $\pi : L \to l/I$ la proyección canónica. Es inmediato verificar inductivamente que $I^i \subseteq L^i$ y que $(L/I)^i = \pi(L^i)$ para todo $i \geq 1$, y la afirmación de la proposición es consecuencia directa de esto. □

1.2.9. No es cierta la implicación recíproca a la de la Proposición 1.2.8. Veamos un ejemplo de esto: sea $\mathfrak{s}$ el álgebra que como espacio vectorial está libremente generado por dos elementos x e y y en la que $[x, y] = x$. El subespacio $I = \langle x \rangle$ es un ideal de $\mathfrak{s}$. Como tanto I como el cociente $\mathfrak{s}/I$ son álgebras de Lie de dimensión 1, ambos son álgebras abelianas y, por lo tanto, nilpotentes. Sin embargo, el álgebra $\mathfrak{s}$ no es nilpotente: en efecto, es inmediato verificar que $\mathfrak{s}^i = I$ para todo $i \geq 2$.

Vale, de todas formas, el siguiente caso particular:

Proposición. *Sea L un álgebra de Lie. Si el cociente $L/\mathfrak{Z}(L)$ es nilpotente, entonces L es nilpotente.*

Demostración. Supongamos que el cociente $L/\mathfrak{Z}(L)$ es nilpotente y sea $\pi : L \to L/\mathfrak{Z}(L)$ la proyección canónica. Para cada $i \geq 0$ se tiene que $(L/\mathfrak{Z}(L))^i = \pi(L^i)$, así que existe $n \geq 0$ tal que $\pi(L^{n+1}) = (L/\mathfrak{Z}(L))^{n+1} = 0$, y esto implica que $L^{n+1} \subseteq \mathfrak{Z}(L)$. Entonces

$$L^{n+1} = [L, L^{n+1}] \subseteq [L, \mathfrak{Z}(L)] = 0$$

y vemos que L misma es nilpotente, como queremos. □

1.2.10. Este resultado nos permite caracterizar la clase de las álgebras nilpotentes en términos de extensiones:

Proposición. *Un álgebra de Lie L de dimensión finita es nilpotente si y solamente si puede obtenerse a partir de álgebras de Lie abelianas por extensiones centrales, esto es, si existen $n \geq 0$, álgebras de Lie $L_0, \ldots, L_n$, ideales centrales $I_1, \ldots, I_n$ de $L_1, \ldots, L_n$, respectivamente, y extensiones centrales de álgebras de Lie*

$$0 \longrightarrow I_i \hookrightarrow L_{i+1} \longrightarrow L_i \longrightarrow 0$$

una para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, de manera tal que L_0 es abeliana y $L_n \cong L$.

Demostración. Sea L un álgebra de Lie de dimensión finita, y supongamos primero que L puede obtenerse a partir de álgebras de Lie abelianas por extensiones centrales, como en el enunciado. Para ver que L es nilpotente bastará que mostremos que cada una de las álgebras $L_0, \ldots, L_n$ es nilpotente, ya que $L \cong L_n$. Que L_0 es nilpotente es claro, ya que es abeliana.

Sea entonces $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ y supongamos inductivamente que L_i es nilpotente. Como el ideal I_{i+1} de L_{i+1} está contenido en $\mathfrak{Z}(L_{i+1})$, el subespacio $\mathfrak{Z}(L_{i+1})/I_{i+1}$ es un ideal de L_{i+1}/I_{i+1} y tenemos un isomorfismo de álgebras de Lie

$$\frac{L_{i+1}}{\mathfrak{Z}(L_{i+1})} \cong \frac{L_{i+1}/I_{i+1}}{\mathfrak{Z}(L_{i+1})/I_{i+1}}$$

y como $L_{i+1}/I_{i+1} \cong L_i$ es nilpotente, esto implica —de acuerdo a la Proposición 1.2.9— que el álgebra L_{i+1} es nilpotente.

Para probar ahora la necesidad de la condición que da la proposición, supongamos que L es nilpotente y hagamos inducción con respecto a la dimensión de L. Si $\dim L = 0$, no hay nada que probar. Supongamos entonces que L es un álgebra de Lie de dimensión finita y positiva. En ese caso sabemos que el centro $\mathfrak{Z}(L)$ de L es no trivial, y tenemos una extensión central

$$0 \longrightarrow \mathfrak{Z}(L) \hookrightarrow L \longrightarrow L/\mathfrak{Z}(L) \longrightarrow 0$$

Como el cociente $L/\mathfrak{Z}(L)$ es nilpotente y tiene dimensión estrictamente menor que la de L, se le aplica la hipótesis inductiva: puede obtenerse a partir de álgebras de Lie abelianas haciendo extensiones centrales. Claramente esto prueba que lo mismo es cierto de L. □

§3. Álgebras solubles

Definimos qué es un álgebra de Lie soluble. Mostramos que un álgebra nilpotente es soluble, que la clase de álgebras solubles es cerrada por subálgebras, cocientes y extensiones, y la caracterizamos en términos de extensiones. Damos el ejemplo de las álgebras de matrices triangulares y de las álgebras de endomorfismos de un espacio vectorial que preservan una bandera completa.

1.3.1. Sea L un álgebra de Lie. Definimos una segunda sucesión $(L^{(n)})_{n\geq 0}$ de subespacios de L, la ***serie derivada*** de L, poniendo $L^{(0)} = L$ y $L^{(i+1)} = [L^{(i)}, L^{(i)}]$ para cada $i \geq 0$.

Proposición. *Sea L un álgebra de Lie. Para todo $i \geq 0$ el subespacio $L^{(i)}$ es una subálgebra de L y el subespacio $L^{(i+1)}$ es un ideal de $L^{(i)}$. La sucesión $(L^{(i)})_{i\geq 0}$ es descendente, esto es,*

$$L = L^{(0)} \supseteq L^{(1)} \supseteq L^{(2)} \supseteq \cdots$$

Demostración. Es evidente que $L^{(1)} = [L, L]$ es un ideal de L, y se sigue de esto inmediatamente que $L^{(i+1)}$ es un ideal de $L^{(i)}$ para todo $i \geq 0$ en vista de la forma en que se construye la serie derivada. De eso se siguen todas las afirmaciones de la proposición. □

1.3.2. Un álgebra de Lie L es ***soluble*** si existe $n \geq 0$ tal que $L^{(n+1)} = 0$ y en ese caso el menor entero n con esta propiedad es la ***longitud soluble*** de L. Por otro lado, L es ***perfecta*** si $[L, L] = L$.

1.3.3. Proposición. *Sea L un álgebra de Lie.*

(*i*) *Si L es soluble y no nula, entonces $L^{(1)}$ es un ideal propio de L.*

(*ii*) *Si L tiene dimensión finita, entonces existe $n_0 \geq 0$ tal que $L^{(n)} = L^{(n_0)}$ para todo $n \geq n_0$ y $L^{(n_0)}$ es un álgebra perfecta.*

Demostración. (*i*) Si $L^{(1)} = L$, entonces claramente $L^{(n)} = L$ para todo $n \geq 0$ y, por lo tanto, la única forma en que L puede ser soluble es que sea nula.

(*ii*) Supongamos que L tiene dimensión finita. Como la serie derivada $(L^{(n)})_{n\geq 0}$ es decreciente, la sucesión de enteros no-negativos $(\dim L^{(n)})_{n\geq 0}$ es decreciente y, por lo tanto, existe $n_0 \geq 0$ tal que $\dim L^{(n)} = \dim L^{(n_0)}$ para todo $n \geq n_0$. Como $L^{(n)} \subseteq L^{(n_0)}$ para todo $n \geq n_0$, esto implica, por supuesto, que de hecho $L^{(n)} = L^{(n_0)}$ para todo $n \geq n_0$. En particular, tenemos que $[L^{(n_0)}, L^{(n_0)}] = L^{(n_0+1)} = L^{(n_0)}$ y $L^{(n_0)}$ es un álgebra perfecta. □

1.3.4. Proposición. *Sea L un álgebra de Lie.*

(*i*) *Para todo n, $m \geq 1$ se tiene que $[L^m, L^n] \subseteq L^{m+n}$.*

(*ii*) *Para todo n, $m \geq 0$ se tiene que $(L^{(m)})^{(n)} = L^{(m+n)}$.*

(*iii*) *Para todo $n \geq 0$ se tiene que $L^{(n)} \subseteq L^{2^n}$.*

(*iv*) *Si L es nilpotente, entonces es soluble.*

Demostración. (*i*) Procedemos por inducción con respecto a n. Cuando $n = 1$, para todo $m \geq 1$ vale $[L^m, L] \subseteq L^{m+1}$ simplemente por la definición de L^{m+1}. Por otro lado, si $n \geq 1$ y suponemos que $[L^m, L^n] \subseteq L^{m+n}$ para todo $m \geq 1$, entonces

$$[L^m, L^{n+1}] = [L^m, [L, L^n]] \subseteq [[L^m, L], L^n] + [L, [L^m, L^n]] \subseteq [L^{m+1}, L^n] + [L, L^{m+n}]$$

$$\subseteq L^{m+n+1} + L^{m+n+1} = L^{m+n+1},$$

y esto completa la inducción.

(*ii*) Cuando $n = 0$, para todo $m \geq 0$ tenemos que $(L^{(m)})^{(0)} = L^{(m)}$ por la forma en que definimos el lado izquierdo de la igualdad. Por otro lado, si $n \geq 0$ y suponemos que $(L^{(m)})^{(n)} = L^{(m+n)}$ para todo $m \geq 0$, entonces

$$(L^{(m)})^{(n+1)} = [(L^{(m)})^{(n)}, (L^{(m)})^{(n)}] = [L^{(m+n)}, L^{(m+n)}] = L^{(m+n+1)}$$

para cada $m \geq 0$. Esto prueba (*ii*).

(*iii*) Como $L^{(0)} = L = L^1 = L^{2^0}$, la inclusión que queremos probar vale si $n = 0$, y si vale para algún entero no-negativo n, entonces como

$$L^{(n+1)} = [L^{(n)}, L^{(n)}] \subseteq [L^{2^n}, L^{2^n}] \subseteq L^{2^n+2^n} = L^{2^{n+1}},$$

usando para la segunda inclusión lo que ya probamos en (*i*).

(*iv*) Si L es nilpotente, de manera que existe $n \geq 1$ tal que $L^{2^n} = 0$, entonces el ideal $L^{(n)}$, que está contenido en L^{2^n} de acuerdo a la parte (*iii*) de la proposición, es nulo: esto nos dice que L es soluble. □

1.3.5. Proposición. *Sea L un álgebra de Lie.*

(*i*) *Si L es soluble, entonces toda subálgebra y todo cociente de L es soluble.*

(*ii*) *Si I es un ideal de L y tanto I como el cociente L/I son álgebras de Lie solubles, entonces L es soluble.*

Demostración. (*i*) Si K es una subálgebra de L, entonces es inmediato verificar que $K^{(n)} \subseteq L^{(n)}$ para todo $n \geq 0$, así que que K es soluble si L lo es. Por otro lado, si I es un ideal de L y $\pi : L \to L/I$ es la proyección canónica al cociente, una inducción evidente muestra que $(L/I)^{(n)} = \pi(L^{(n)})$ para todo $n \geq 1$ y esto implica claramente que si L es soluble, entonces L/I también lo es,

(*ii*) Sea I un ideal de L y supongamos que I y L/I son álgebras de Lie solubles. Existe entonces $m \geq 0$ tal que $\pi(L^{(m)}) = (L/I)^{(m)} = 0$, y esto significa que $L^{(m)}$ está contenido en I. Como I es soluble y $L^{(m)}$ es una subálgebra de I, la primera parte de la proposición nos dice que existe $m \geq 0$ tal que $L^{(m+n)} = (L^{(m)})^{(n)} = 0$. Así, L es un álgebra de Lie soluble, como queríamos probar. □

1.3.6. La clase de las álgebras de Lie solubles admite una descripción similar a la que dimos en la Proposición 1.2.10 para las nilpotentes:

Proposición. *Un álgebra de Lie L de dimensión finita es soluble si y solamente si puede obtenerse a partir de álgebras de Lie abelianas por extensiones, esto es, si existen* $n \geq 0$, *álgebras de Lie* $L_0, \dots, L_n$, *álgebras de Lie abelianas* $A_1, \dots, A_n$ *y extensiones de álgebras de Lie*

$$0 \longrightarrow L_{i-1} \hookrightarrow L_i \longrightarrow A_i \longrightarrow 0$$

una para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, *de manera tal que* L_0 *es abeliana y* $L_n \cong L$.

Demostración. Si L es soluble de longitud soluble n, entonces tenemos extensiones

$$0 \longrightarrow L^{(n-i+1)} \longrightarrow L^{(n-i)} \longrightarrow L^{(n-i)}/L^{(n-i+1)} \longrightarrow 0$$

una para cada $i \in \{0, \dots, n\}$, cada una de ellas con tercer término $L^{(n-i)}/L^{(n-i+1)}$ abeliano. Podemos poner entonces $L_i = L^{(n-i)}$ para cada $i \in \{0, \dots, n\}$ y $A_i = L^{(n-i)}/L^{(n-i+1)}$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, ya que el álgebra $L_0 = L^{(n)}$ es abeliana.

Recíprocamente, si L puede ser obtenida a partir de álgebras abelianas haciendo extensiones como en el enunciado, una inducción evidente a partir de la Proposición 1.3.5*(ii)* muestra que L es un álgebra soluble. □

1.3.7. La siguiente proposición nos da el ejemplo más importante de álgebras de Lie solubles.

Proposición. *El subespacio $\mathfrak{t}_n(\Bbbk)$ de las matrices triangulares superiores de $\mathfrak{gl}_n(\Bbbk)$ es una subálgebra de Lie soluble y su álgebra derivada $\mathfrak{t}_n(\Bbbk)^{(1)}$ es el álgebra $\mathfrak{n}_n(\Bbbk)$ de las matrices estrictamente triangulares superiores.*

Demostración. Sean $A = (a_{i,j})$ y $B = (b_{i,j})$ dos matrices triangulares superiores de $\mathfrak{gl}_n(\Bbbk)$, de manera que $a_{i,j} = b_{i,j} = 0$ siempre que $1 \le i < j \le n$. Si $1 \le i \le j \le n$, el coeficiente (i, j)-ésimo del producto AB es

$$\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j} = \begin{cases} 0, & \text{si } i < j; \\ a_{i,i} b_{i,i}, & \text{si } i = j. \end{cases}$$

y esto implica inmediatamente que la matriz $[A, B] = AB - BA$ es estrictamente triangular superior. Por un lado, esto nos dice que $\mathfrak{t}_n(\Bbbk)$ es una subálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}_n(\Bbbk)$. Por otro, nos dice que su subálgebra derivada $\mathfrak{t}_n(\Bbbk)^{(1)}$ está contenida en el álgebra $\mathfrak{n}_n(\Bbbk)$ de las matrices estrictamente triangulares superiores de la Proposición **1.2.5**. De acuerdo a la Proposición **1.2.8**, esta subálgebra $\mathfrak{t}_n(\Bbbk)^{(1)}$ es por lo tanto nilpotente y, en vista de la Proposición 1.3.4*(iv)*, soluble. Si $n \ge 0$ es tal que $(\mathfrak{t}_n(\Bbbk)^{(1)})^{(n+1)} = 0$, entonces $\mathfrak{t}_n(\Bbbk)^{(n+2)} = 0$: esto nos dice que el álgebra $\mathfrak{t}_n(\Bbbk)$ misma es soluble y prueba la primera afirmación de la proposición.

Veamos la segunda. Ya observamos que el álgebra derivada $\mathfrak{t}_n(\Bbbk)^{(1)}$ está contenida en $\mathfrak{n}_n(\Bbbk)$. Para cada $i, j \in \{1, \dots, n\}$ sea $E_{i,j} \in \mathfrak{gl}_n(\Bbbk)$ la matriz elemental (i, j)-ésima, cuyas entradas son todas nulas salvo precisamente la (i, j)-ésima, que es igual a 1. Si $1 \le i < j \le n$, entonces $E_{i,i}$ y $E_{i,j}$ están en $\mathfrak{t}_n(\Bbbk)$ y $E_{i,j} = [E_{i,i}, E_{i,j}]$ está en $\mathfrak{t}_n(\Bbbk)^{(1)}$: como el conjunto $\{E_{i,j} : 1 \le i < j \le n\}$ genera a $\mathfrak{n}_n(\Bbbk)$ como espacio vectorial, esto muestra que $\mathfrak{n}_n(\Bbbk) \subseteq \mathfrak{t}_n(\Bbbk)^{(1)}$ y completa la prueba. □

1.3.8. Si V es un espacio vectorial de dimensión finita, una bandera $(V_i)_{i=0}^{n}$ en V es ***completa*** si $\dim V_i = i$ para cada $i \in \{0, \dots, n\}$.

Corolario. *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita n y sea $\mathcal{F} = (V_i)_{i=0}^{n}$ una bandera completa en V. El conjunto $\mathfrak{t}(\mathcal{F})$ de todas las funciones lineales $f : V \to V$ tales que $f(V_i) \subseteq V_i$ para cada $i \in \{0, \dots, n\}$ es una subálgebra soluble de $\mathfrak{gl}(V)$ y su álgebra derivada $\mathfrak{t}(\mathcal{F})^{(1)}$ es nilpotente.*

Demostración. Hay una base ordenada $\mathscr{B} = (m_1, \dots, m_n)$ tal que para cada $i \in \{0, \dots, n\}$ el conjunto $\{m_1, \dots, m_i\}$ es una base de V_i. La función

$$\phi : f \in \mathfrak{t}(\mathcal{F}) \to \|f\|_{\mathscr{B}} \in \mathfrak{gl}_n(\Bbbk)$$

es un morfismo de álgebras de Lie inyectivo cuya imagen es la subálgebra $\mathfrak{t}_n(\Bbbk)$ de las matrices triangulares superiores: el álgebra $\mathfrak{t}(\mathcal{F})$ es isomorfa a $\mathfrak{t}_n(\Bbbk)$ y, por lo tanto, soluble. De la misma forma, el álgebra derivada $\mathfrak{t}(\mathcal{F})^{(1)}$ es isomorfa al álgebra derivada $\mathfrak{t}_n(\Bbbk)^{(1)}$ y esta última es nilpotente. □

§4. El teorema de Lie

Describimos las representaciones de dimensión 1 de un álgebra de Lie y probamos el teorema de Lie que afirma que las representaciones simples de un álgebra soluble tienen todas dimensión 1. Mostramos que todo módulo de dimensión finita sobre un álgebra de Lie soluble posee un autovector común para todos los elementos del álgebra y una bandera completa de submódulos. Terminamos probando que un álgebra de Lie soluble de dimensión finita posee una bandera completa de ideales y que su álgebra derivada es nilpotente.

1.4.1. Proposición. *Sea L un álgebra de Lie.*

(i) *Si M es un L-módulo de dimensión 1, entonces existe una función lineal $\lambda : L \to \Bbbk$ tal que para cada $x \in L$ y cada $m \in M$ es $x \cdot m = \lambda(x)m$, y λ se anula sobre L^2.*

(ii) *Recíprocamente, si $\lambda : L \to \Bbbk$ es una función lineal que se anula sobre L^2, entonces existe L-módulo M_λ que como espacio vectorial coincide con $\Bbbk$ y tal que $x \cdot m = \lambda(x)m$ para todo $x \in L$ y todo $m \in M_\lambda$.*

(iii) *Sea Λ el subespacio de espacio dual L^* de todas las funciones lineales $L \to \Bbbk$ que se anulan sobre L^2. La familia $\mathcal{M} = (M_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ de L-módulos de dimensión 1 es un sistema completo e irredundante de representantes de las clases de isomorfismo de L-módulos de dimensión 1.*

Motivados por este resultado, llamamos a una función lineal $\lambda : L \to \Bbbk$ que se anula sobre L^2 una ***representación de dimensión* 1**.

Demostración. (i) Sea M un L-módulo de dimensión 1 y sea $\rho : L \to \mathfrak{gl}(M)$ la representación correspondiente. El álgebra $\mathfrak{gl}(M)$ tiene dimensión 1 y está generada como espacio vectorial por id_M, así que existe una función $\lambda : L \to \Bbbk$ tal que $\rho(x) = \lambda(x)\mathrm{id}_M$ para todo $x \in L$. Es inmediato verificar que se trata de una función lineal. Más aún, como ρ es un morfismo de álgebras de Lie y $\mathfrak{gl}(M)$ es un álgebra de Lie abeliana, tenemos que cada vez que $x, y \in L$ es

$$\lambda([x, y])\mathrm{id}_M = \rho([x, y]) = [\rho(x), \rho(y)] = 0,$$

así que λ se anula sobre L^2.

(ii) Sea ahora $\lambda : L \to \Bbbk$ una función lineal tal que $\lambda(L^2) = 0$. Sea M_λ el espacio vectorial $\Bbbk$ y definamos una acción $L \times M_\lambda \to \Lambda$ poniendo $x \cdot m = \lambda(x)m$ cada vez que $x \in L$ y $m \in M$. Esta acción es claramente bilineal y si $x, y \in L$ y $m \in M$ tenemos que

$$x \cdot y \cdot m - y \cdot x \cdot m = \lambda(x)\lambda(y)m - \lambda(y)\lambda(x)m = 0$$

y

$$y[x,y]\cdot m = \lambda([x,y])m = 0,$$

ya que λ se anula sobre L^2. Esto prueba que la acción de L sobre M_λ hace de M_λ un L-módulo.

(*iii*) Tenemos que mostrar que todo L-módulo de dimensión 1 es isomorfo a un miembro de la familia $\mathcal{M}$ y que no hay dos miembros de esta familia que sean isomorfos entre sí.

Sea M un L-módulo de dimensión 1 y sea $\lambda : L \to \Bbbk$ la función lineal tal que $x\cdot m = \lambda(x)m$ para cada $x \in L$ y cada $m \in M$, como en (*i*). Como λ ser anula sobre L^2, de (*ii*) tenemos un L-módulo M_λ. Fijemos un elemento no nulo $m_0 \in M$ y consideremos la función lineal $f : t \in M_\lambda \mapsto tm_0 \in M$, que es evidentemente un isomorfismo de espacios vectoriales. Para cumplir nuestro primer objetivo, alcanza con que mostremos, entonces, que f es un morfismo de L-módulos: esto es inmediato, ya que si $x \in L$ y $m \in M_\lambda$ tenemos que

$$f(x\cdot m) = f(\lambda(x)m) = \lambda(x)f(m) = x\cdot f(m),$$

por la forma en que elegimos a la función λ.

Para terminar, supongamos ahora que λ, $\mu : L \to \Bbbk$ son dos funciones lineales que se anulan sobre L^2 y que hay un isomorfismo de L-módulos $f : M_\lambda \to M_\mu$, y mostremos que necesariamente se tiene que $\lambda = \mu$. En efecto, en ese caso tenemos que para cada $x \in L$ vale que

$$\lambda(x)f(1) = f(\lambda(x)1) = f(x\cdot 1) = x\cdot f(1) = \mu(x)f(1)$$

y, como $f(1)$ es un elemento no nulo de M_μ que $\lambda(x) = \mu(x)$. Así, $\lambda = \mu$, como queríamos. □

1.4.2. El siguiente resultado, que está en la base de la teoría de las álgebras solubles es conocido como el *Teorema de Lie*.

Proposición. *Sea L un álgebra de Lie de dimensión finita soluble. Todo L-módulo simple de dimensión finita tiene dimensión* 1.

Demostración. Sea M un L-módulo simple de dimensión finita. Mostremos que $\dim M = 1$ haciendo inducción sobre la dimensión de L.

Supongamos primero que $\dim L = 1$ y sea x_0 un elemento no nulo de L. Como nuestro cuerpo $\Bbbk$ es algebraicamente cerrado y M tiene dimensión finita y no nula, sabemos que la función lineal $x_M : M \to M$ tiene un autovalor, esto es, que existen un escalar $\lambda \in \Bbbk$ y un vector no nulo $m \in M$ tal que $x\cdot m = \lambda m$. El subespacio $\langle m\rangle$ de M generado por m es un L-submódulo, así que la simplicidad de M implica que $M = \langle m\rangle$ y, en particular, que $\dim M = 1$, como queremos.

Supongamos ahora que $\dim L > 1$. Como L es soluble, la subálgebra derivada $L^{(1)}$ es un subespacio propio, y podemos encontrar un subespacio $K \subseteq L$ y un vector no nulo $x_0 \in L$ tales que $K \supseteq L^{(1)}$ y $L = K \oplus \langle x_0\rangle$. El subespacio K es un ideal de L, ya que

$$[L,K] \subseteq [L,L] = L^{(1)} \subseteq K.$$

Como M es un L-módulo, restringiendo la acción de L podemos considerarlo como un K-módulo y, como M tiene dimensión finita, sabemos que existe un K-submódulo simple S en M. Ahora bien, K es una subálgebra propia de L, así que es soluble y tiene dimensión estrictamente menor que la de L: la hipótesis inductiva nos dice entonces que S tiene dimensión 1 y, de acuerdo a la Proposición 1.4.1*(i)*, que hay una función lineal $\lambda : K \to \Bbbk$ tal que para cada $x \in K$ y cada $m \in S$ es $x \cdot m = \lambda(x)m$. Sabemos que λ se anula sobre $[K, K]$. Supongamos por un momento que, de hecho,

$$\textit{la función } \lambda \textit{ se anula sobre todo el subespacio } [L, K] \tag{6}$$

y consideremos el conjunto

$$T = \{m \in M : y \cdot m = \lambda(y)m \text{ para todo } y \in K\}.$$

Es fácil ver que se trata de un subespacio de M y es, de hecho, un L-submódulo. Para verlo, sean $x \in L$ y $m \in T$ y mostremos que $x \cdot m \in T$. Como $L = K \oplus \langle x_0 \rangle$, es suficiente considerar separadamente por un lado el caso en que $x \in K$ y por otro aquél en el que $x = x_0$. En el primero es inmediato que $x \cdot m$ está en T por la forma misma en que definimos este subespacio. Supongamos entonces que $x = x_0$. Si $y \in K$, entonces

$$y \cdot x \cdot m = y \cdot x_0 \cdot m = x_0 \cdot y \cdot m - [x_0, y] \cdot m = \lambda(y)x_0 \cdot m - \lambda([x_0, y])m = \lambda(y)x \cdot m,$$

porque $[x_0, y] \in [L, K]$ y estamos asumiendo que (6) vale: esto nos dice que $x \cdot m \in T$.

Como T contiene a S, se trata de un L-submódulo no nulo de M y, como M es simple, debe ser $T = M$. Como M tiene dimensión finita, existen un escalar $\mu \in \Bbbk$ y un elemento no nulo $m_0 \in M$ tales que $x_0 \cdot m = \mu m_0$, y entonces $\langle m_0 \rangle$ es un L-submódulo de M: si $x \in L$, existen $a \in \Bbbk$ e $y \in K$ tales que $x = ax_0 + y$, y

$$x \cdot m_0 = ax_0 \cdot m + y \cdot m = (a\mu + \lambda(y))m_0 \in \langle m_0 \rangle.$$

Como M es simple, debe ser $M = \langle m_0 \rangle$ y, en particular, $\dim M = 1$, como queremos.

Nos queda solamente probar la afirmación (6). Como $[L, K] = [K, K] + [x_0, K]$ y sabemos que λ se anula sobre $[K, K]$, es suficiente que probemos que $\lambda([x_0, y]) = 0$ para todo $y \in K$.

Pongamos $m_0 = m$ y $m_{i+1} = x_0 \cdot m_i$ para cada $i \geq 0$. La sucesión de elementos $(m_i)_{i\geq 0}$ toma valores en M, que tiene dimensión finita, así que sabemos que existe $d \geq 0$ tal que los vectores $m_0, \ldots, m_d$ son linealmente independientes y $m_{d+1} \in \langle m_0, \ldots, m_d \rangle$. Afirmamos que para cada $i \in \{0, \ldots, d\}$ se tiene que

$$\textit{para todo } y \in K \textit{ es } y \cdot m_i \equiv \lambda(y)m_i \mod \langle m_0, \ldots, m_{i-1} \rangle. \tag{7}$$

Esto es claro si $i = 0$, ya que en ese caso, de hecho, tenemos que $y \cdot m_0 = y \cdot m = \lambda(y)m = \lambda(y)m_0$ para todo $y \in K$. Por otro lado, supongamos que $i \in \{0, \ldots, d-1\}$ y que ya sabemos que (7) vale. Si $y \in K$, entonces

$$y \cdot m_{i+1} = y \cdot x_0 \cdot m_i = x_0 \cdot y \cdot m_i - [x_0, y] \cdot m_i.$$

Como $[x_0, y] \in K$ porque K es un ideal, la hipótesis inductiva implica que existen elementos u y v en $\langle m_0, \dots, m_{i-1} \rangle$ tales que

$$y \cdot m_i = \lambda(y) m_i + u, \qquad [x_0, y] \cdot m_i = \lambda([x_0, y]) m_i + v$$

y, por lo tanto, que

$$y \cdot m_{i+1} = \lambda(y) x_0 \cdot m_i + x_0 \cdot u - \lambda([x_0, y]) m_i + v \equiv \lambda(y) m_{i+1} \mod \langle m_0, \dots, m_i \rangle,$$

ya que $x_0 \cdot u \in x_0 \cdot \langle m_0, \dots, m_{i-1} \rangle \subseteq \langle m_0, \dots, m_i \rangle$. Esto prueba nuestra afirmación (7).

El subespacio $\langle m_0, \dots, m_d \rangle$ es invariante por la acción de x_0 por la forma en que fue construido, y se sigue inmediatamente de (7) que es un K-submódulo de M, así que se trata, de hecho, de un L-submódulo. Como M es simple, tiene que coincidir con M y, en particular, esto nos dice que M tiene dimensión $d+1$ y que $\mathscr{B} = (m_0, \dots, m_d)$ es una base ordenada de M. La afirmación (7) nos dice que si $y \in K$, entonces la matriz de la función lineal $y_M : M \to M$ con respecto a la base $\mathscr{B}$ es triangular superior y que todas las componentes de su diagonal son iguales a $\lambda(y)$ y esto implica, por supuesto, que

$$\operatorname{tr} y_M = (d+1)\lambda(y).$$

Ahora bien, si $y \in K$, entonces sabemos que $[x_0, y]$ está en K, porque K es un ideal, y entonces

$$(d+1)\lambda([x_0, y]) = \operatorname{tr}[x_0, y]_M = \operatorname{tr}\big((x_0)_M \circ y_M - y_M \circ (x_0)_M\big) = 0$$

y, como el cuerpo $\Bbbk$ tiene característica nula, podemos concluir que $\lambda([x_0, y]) = 0$. Esto implica que λ se anula sobre $[x_0, K]$, que es lo que queríamos. □

1.4.3. Corolario. *Sea L un álgebra de Lie soluble de dimensión finita. Si M es un L-módulo de dimensión finita, entonces los elementos de L tienen un autovector común en M, esto es, existe un vector no nulo $m_0 \in M$ y una función $\lambda : L \to \Bbbk$ tal que para todo $x \in L$ es $x \cdot m_0 = \lambda(x) m_0$. Esta función λ es lineal y se anula sobre L^2.*

Demostración. Como M tiene dimensión finita, sabemos que contiene un submódulo simple S y de acuerdo a la Proposición **1.4.2** es $\dim S = 1$. La Proposición 1.4.1*(i)* nos dice además que existe una función lineal $\lambda : L \to \Bbbk$ tal que $\lambda(L^2) = 0$ y $x \cdot m = \lambda(x) m$ para todo $m \in S$. Para probar el corolario, entonces basta elegir un elemento no nulo m_0 cualquiera en S. □

1.4.4. Corolario. *Sea L un álgebra de Lie soluble de dimensión finita. Si M es un L-módulo de dimensión finita, entonces existe una cadena creciente de submódulos de M*

$$0 = M_0 \subseteq M_1 \subseteq \cdots \subseteq M_n = M$$

con $\dim M_i = i$ para cada $i \in \{0, \dots, n\}$ y existe una base ordenada $\mathscr{B}$ de M tal que para cada $x \in L$ la matriz de la función lineal $x_M : M \to M$ con respecto a $\mathscr{B}$ es triangular superior.

Demostración. Sea M un L-módulo de dimensión finita y sea $n = \dim M$. Si $n = 1$, entonces las dos afirmaciones del enunciado son evidentes: basta poner $M_0 = 0$, $M_1 = M$ y elegir como $\mathscr{B}$ a cualquier base ordenada de M.

Supongamos entonces que $n > 1$ y sea $N \subsetneq M$ un submódulo propio de M de dimensión máxima. Los submódulos del cociente M/N están en correspondencia biyectiva con los submódulos de M que contienen a N, y la elección de N implica entonces que M/N es simple. De acuerdo a la Proposición 1.4.2, es $\dim M/N = 1$, así que $\dim N = n - 1$. Inductivamente sabemos que existe una cadena creciente de submódulos de N

$$0 = N_0 \subseteq N_1 \subseteq \cdots \subseteq N_{n-1} = N$$

con $\dim N_i = i$ para cada $i \in \{1, \dots, n-1\}$, y una base ordenada $\mathscr{B} = (m_1, \dots, m_{n-1})$ de N tal que para todo $x \in L$ la matriz de $x_N : N \to N$ con respecto a N es triangular superior. Es inmediato ahora que poniendo $M_i = N_i$ para cada $i \in \{0, \dots, n-1\}$ y $M_n = M$ obtenemos una cadena creciente de submódulos de M

$$0 = M_0 \subseteq M_1 \subseteq \cdots \subseteq M_n = M$$

con $\dim M_i = i$ para cada $i \in \{0, \dots, n\}$. Por otro lado, su m_n es un elemento cualquiera de $M \setminus N$, entonces $\mathscr{B} = (m_1, \dots, m_n)$ es una base ordenada de M y si $x \in L$, entonces la matriz de $x_M : M \to M$ con respecto a $\mathscr{B}$ es una matriz triangular por bloques

$$\|x_M\|_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} \|x_N\|_{\mathscr{B}'} & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

que es triangular superior porque $\|x_N\|_{\mathscr{B}'}$ lo es. □

1.4.5. Corolario. *Un álgebra de Lie L de dimensión finita soluble posee una bandera completa de ideales y una base ordenada $\mathscr{B}$ tal que para todo $x \in L$ la matriz $\|\mathrm{ad}(x)\|_{\mathscr{B}}$ de $\mathrm{ad}(x) : L \to L$ con respecto a $\mathscr{B}$ es triangular superior. El álgebra derivada $L^{(1)}$ es nilpotente.*

Demostración. Veamos a L como un L-módulo vía la representación adjunta $\mathrm{ad} : L \to \mathfrak{gl}(L)$. La primera afirmación es consecuencia inmediata del Corolario 1.4.4, ya que los submódulos de la representación adjunta son precisamente los ideales de L.

Sea $\mathcal{F} = (I_i)_{i=0}^{n}$ la bandera completa de ideales que nos da ese corolario. Es claro que la representación adjunta $\mathrm{ad} : L \to \mathfrak{gl}(L)$ toma valores en la subálgebra soluble $\mathfrak{t}(\mathcal{F})$ de $\mathfrak{gl}(L)$ que estudiamos en 1.3.8. Se sigue de esto que la restricción de $\mathrm{ad}|_{L^{(1)}} : L^{(1)} \to \mathfrak{gl}(L)$ toma valores en el álgebra nilpotente $\mathfrak{n}(\mathcal{F}) = \mathfrak{t}(\mathcal{F})^{(1)}$ y, en particular, que su imagen es nilpotente. Como el núcleo de la restricción $\mathrm{ad}|_{L^{(1)}}$ es el centro $\mathfrak{z}(L^{(1)})$, esto nos dice que el cociente $L^{(1)}/\mathfrak{z}(L^{(1)})$ es nilpotente y, gracias a la Proposición 1.2.9, podemos concluir que $L^{(1)}$ es un álgebra nilpotente. □

1.4.6. Corolario. *Un álgebra de Lie de dimensión finita es soluble si y sólo si su álgebra derivada es nilpotente.*

Demostración. La necesidad de la condición es parte de lo que afirma el Corolario 1.4.5. Por otro lado, si L es un álgebra de Lie de dimensión finita tal que el álgebra derivada $L^{(1)}$ es nilpotente, tenemos una extensión de álgebras de Lie

$$0 \longrightarrow L^{(1)} \longrightarrow L \longrightarrow L/L^{(1)} \longrightarrow 0$$

y entonces la Proposición 1.3.5*(ii)* nos dice que L es soluble. □

§5. El teorema de Engel

Probamos el teorema de Engel que afirma que un álgebra de Lie es nilpotente si y sólo si su representación adjunta toma valores nilpotentes, y que un álgebra soluble posee un único ideal nilpotente maximal.

1.5.1. Lema. *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita. Si $x \in \mathfrak{gl}(V)$ es nilpotente, entonces $\mathsf{ad}(x) : \mathfrak{gl}(V) \to \mathfrak{gl}(V)$ es nilpotente.*

Demostración. Para cada $y \in \mathfrak{gl}(V)$ sean $l_y, r_y : \mathfrak{gl}(V) \to \mathfrak{gl}(V)$ las funciones lineales tales que $l_y(z) = yz$ y $l_y(z) = zy$ para cada $z \in \mathfrak{gl}(V)$. Es fácil ver que si y y z son elementos de $\mathfrak{gl}(V)$ entonces l_y y r_z conmutan, y que para todo $i \geq 0$ vale que $(l_y)^i = l_{y^i}$ y $(r_y)^i = r_{i^i}$.

Sea $x \in \mathfrak{gl}(V)$ un endomorfismo nilpotente de V y sea $m \geq 0$ tal que $x^m = 0$. Como las funciones l_x y r_x conmutan y $\mathsf{ad}(x) = l_x - r_x$, la fórmula de Newton nos dice que

$$\mathsf{ad}(x)^{2m} = (l_x - r_x)^{2m} = \sum_{i=0}^{2m} (-1)^i \binom{2m}{i} l_x^{2m-i} r_x^i = \sum_{i=0}^{2m} (-1)^i \binom{2m}{i} l_{x^{2m-i}} r_{x^i}$$

y esto es 0 porque en cada sumando alguno de los factores $l_{x^{2m-i}}$ o r_{x^i} se anula. Esto prueba, por supuesto, que $\mathsf{ad}(x)$ es nilpotente. □

1.5.2. Proposición. *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y no nula. Si L es una subálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}(V)$ cuyos elementos son nilpotentes, entonces L es nilpotente, $V^L \neq 0$ y existe una base ordenada $\mathscr{B}$ de V tal que para cada $x \in L$ la matriz $\|x\|_{\mathscr{B}}$ de x con respecto a $\mathscr{B}$ es estrictamente triangular superior.*

Demostración. La proposición afirma algo del par (V, L) formado por un espacio vectorial de dimensión finita y no nula V y una subálgebra L de $\mathfrak{gl}(V)$ cuyos elementos son todos nilpotentes. Para probarla procederemos inductivamente: fijamos un tal par (V, L) y suponemos que la proposición es cierta para todo par (V', L') que tiene o bien $\dim V' < \dim V$ o bien $\dim L' < \dim L$. Observemos que si $\dim V = 1$ o si $\dim L = 0$ todas las afirmaciones de la proposición son inmediatas, así que nuestra inducción está bien fundada.

Sea K una subálgebra propia maximal de L. Restringiendo a K la representación adjunta $\mathsf{ad} : L \to \mathfrak{gl}(L)$ podemos ver a L como un K-módulo, y en ese caso K es un K-submódulo de L. El cociente L/K es por lo tanto un K-módulo. Sea $\rho : K \to \mathfrak{gl}(L/K)$ la representación correspondiente, de manera que $\rho(x)(y+K) = [x,y]+K$ para cada $x \in K$ y cada $y \in L$. Como todos los elementos de L son endomorfismos nilpotentes de V, el Lema 1.5.1 nos dice que si $x \in K$ entonces $\mathrm{ad}(x) : L \to L$ es nilpotente y, por lo tanto, que también lo es $\rho(x)$. Así, la subálgebra $\rho(K)$ de $\mathfrak{gl}(L/K)$ tiene todos sus elementos nilpotentes. Como tiene dimensión estrictamente menor que la de L, la hipótesis inductiva aplicada al par $(L/K, \rho(K))$ nos dice que $(L/K)^{\rho(K)} \neq 0$, esto es, que existe $x_0 \in L \setminus K$ tal que $\rho(x)(x_0+K) = K$ para todo $x \in K$ o, equivalentemente, tal que

$$[x, x_0] \in K \text{ para todo } x \in K. \tag{8}$$

Sea $K' = K + \langle x_0 \rangle$. Como $x_0 \notin K$, el subespacio K' de L contiene propiamente a K. Por otro lado, como K es una subálgebra de L y vale (8), es inmediato ver que K' es una subálgebra de L. La maximalidad con la que elegimos a K implica entonces que $K' = L$. Vemos así que K tiene codimensión 1 en L y, en vista de (8), que es un ideal de L.

Como K es una subálgebra de $\mathfrak{gl}(V)$ de dimensión estrictamente menor que la de L y todos sus elementos son nilpotentes, la hipótesis inductiva aplicada al par (V, K) nos dice que $V^K \neq 0$. Si $v \in V^K$, entonces para cada $x \in K$ se tiene que

$$x \cdot x_0 \cdot v = x_0 \cdot x \cdot v + [x, x_0] \cdot v = 0,$$

ya que $[x, x_0] \in K$. Esto nos dice que $x_0 \cdot v \in V^K$ y, por lo que x_0 se restringe a un endomorfismo $V^K \to V^K$. Ahora bien, x_0 es nilpotente, así que esa restricción es nilpotente y, como $V^K \neq 0$, existe un vector no nulo $v_1 \in V^K$ tal que $x_0 \cdot v_1 = 0$. Esto implica, claramente, que $x \cdot v_1 = 0$ para todo $x \in L$ y, en definitiva, que $V^L \neq 0$.

Más aún, el subespacio $\langle v_1 \rangle$ es un L-submódulo de V y la representación $\zeta : L \to \mathfrak{gl}(V/\langle v_1 \rangle)$ de L sobre el L-módulo cociente $V/\langle v_1 \rangle$ es tal que todo elemento de $\zeta(L)$ es nilpotente. Aplicando la hipótesis inductiva al par $(\zeta(L), V/\langle v_1 \rangle$ implica que existe una base ordenada $\mathscr{B}' = (w_1, \dots, w_r)$ de $V/\langle v_1 \rangle$ tal que para todo $x \in L$ la matriz $\|\zeta(x)\|_{\mathscr{B}'}$ es estrictamente triangular superior. Para cada $i \in \{1, \dots, r\}$ podemos elegir un elemento $v_{i+1} \in V$ tal que $w_i = v_{i+1} + \langle v_1 \rangle$, y es fácil ver que de esta forma obtenemos una base ordenada $\mathscr{B} = (v_1, \dots, v_{r+1})$ de V tal que para cada $x \in L$ la matriz $\|x\|_{\mathscr{B}}$ es estrictamente triangular superior. En otras palabras, el morfismo de álgebras de Lie $x \in L \mapsto \|x\|_{\mathscr{B}} \in \mathfrak{gl}_{r+1}(\Bbbk)$ tiene imagen en la subálgebra $\mathfrak{n}_{r+1}(\Bbbk)$ de la Proposición 1.2.5. Como ese morfismo es inyectivo, vemos que L es isomorfa a una subálgebra de $\mathfrak{n}_{r+1}(\Bbbk)$ y, como está última es nilpotente, que L es nilpotente. Esto completa la inducción. □

1.5.3. La consecuencia más importante de la Proposición 1.5.2 es el siguiente teorema de Engel:

Proposición. *Un álgebra de Lie de dimensión finita L es nilpotente si y solamente si para todo $x \in L$ la función lineal $\mathrm{ad}(x) : L \to L$ es nilpotente.*

Demostración. Si L es nilpotente y n es su índice de nilpotencia, entonces para todo $x \in L$ tenemos que $\mathrm{ad}(x)^n(y) \in L^{n+1} = 0$ para todo $y \in L$, y esto nos dice que $\mathrm{ad}(x)$ es nilpotente.

Para probar la recíproca, supongamos que vale la condición del enunciado y que entonces la representación adjunta $\mathrm{ad} : L \to \mathfrak{gl}(L)$ toma valores que son endomorfismos nilpotentes de L.

De la Proposición 1.5.2 se sigue entonces que el álgebra imagen $\mathsf{ad}(L)$ es nilpotente. Como el núcleo de la representación adjunta es precisamente el centro de L, vemos así que el cociente $L/Z(L))$ es nilpotente y, en vista de la Proposición 1.2.9, podemos concluir que L misma es nilpotente, como queremos. □

1.5.4. Proposición. *Sea L un álgebra de Lie de dimensión finita soluble. Hay en L un único ideal maximal nilpotente N. Un elemento $x \in L$ pertenece a N si y sólo si $\mathsf{ad}(x) : L \to L$ es nilpotente.*

Demostración. Sea $n = \dim L$. Del Corolario 1.4.5 sabemos que existe una base ordenada $\mathscr{B}$ de L tal que el morfismo de álgebras de Lie $f : x \in L \mapsto \|\mathsf{ad}(x)\|_{\mathscr{B}} \in \mathfrak{gl}_n(\Bbbk)$ toma valores en la subálgebra $\mathfrak{t}_n(\Bbbk)$ de las matrices triangulares superiores.

Si $x \in L$, entonces $\mathsf{ad}(x)$ es nilpotente si y solamente si la matriz $\|\mathsf{ad}(x)\|_{\mathscr{B}}$ es nilpotente y, como se trata de una matriz triangular superior, esto ocurre si y solamente si es estrictamente triangular superior. Esto significa que el conjunto N de los elementos $x \in L$ tales que $\mathsf{ad}(x)$ es nilpotente coincide con la preimagen del ideal $\mathfrak{n}_n(\Bbbk)$ de $\mathfrak{t}_n(\Bbbk)$ por f: vemos así que N es un ideal de L. En particular, para cada $x \in N$ se tiene que $\mathsf{ad}_N(x) = \mathsf{ad}_L(x)|_N$ y, por lo tanto $\mathsf{ad}_N(x)$ es nilpotente. De acuerdo a la Proposición 1.5.3, esto implica que N es nilpotente.

Sea I un ideal nilpotente de L. Sea $x \in I$. Como I es un ideal, tenemos que

$$\mathsf{ad}_L(x)(L) = [x, L] \subseteq I$$

y de esto se deduce, gracias a una inducción inmediata, que para todo $i \geq 0$ es

$$\mathsf{ad}_L(x)^{i+1}(L) \subseteq \mathsf{ad}_I(x)^i(I). \tag{9}$$

Como I es nilpotente, de la Proposición 1.5.3 sabemos que existe $n \geq 0$ tal $\mathsf{ad}_I(x)^n = 0$ y entonces de (9) vemos que $\mathsf{ad}_L(x)^{n+1} = 0$: esto nos dice que $x \in N$ y muestra que, de hecho, I está contenido en N. Concluimos de esta forma que N es el único ideal nilpotente maximal de L. □

§6. El radical soluble y el radical nilpotente

Probamos que un álgebra de Lie de dimensión finita posee un único ideal soluble maximal y un único ideal nilpotente maximal.

1.6.1. Lema. *Sea L un álgebra de Lie. Si I y J son ideales solubles de L, entonces el ideal suma $I + J$ también lo es.*

Demostración. Sabemos de la Proposición 1.1.3*(iii)* que $I + J$ es un ideal de L, así que resta que mostremos que es soluble. La Proposición 1.1.6 nos dice que $I \cap J$ es un ideal de I y que hay un isomorfismo de álgebras de Lie $I/I \cap J \cong (I + J)/I$. Como I es soluble, el cociente $I/I \cap J$ es soluble, y entonces $(I + J)/J$ es soluble. Como además J es soluble, podemos concluir usando la Proposición 1.3.5*(ii)* que $I + J$ es soluble, como queremos. □

1.6.2. Proposición. *Sea L un álgebra de Lie de dimensión finita. Existe un único ideal soluble maximal R en L y el álgebra cociente L/R no posee ideales solubles no nulos.*

Llamamos al ideal R el ***radical soluble*** de L y lo escribimos $\operatorname{rad} L$.

Demostración. Sea $\mathcal{I}$ el conjunto de todos los ideales solubles de L y consideremos el subespacio $R = \sum_{I \in \mathcal{I}} I$. De acuerdo a la Proposición 1.1.3*(iv)*, se trata de un ideal de L y claramente contiene a todos los ideales solubles de L, así que para ver la primera afirmación de la proposición es suficiente con que mostremos que R es un ideal soluble. Ahora bien, como L tiene dimensión finita, existen $n \geq 0$ e ideales $I_1, \dots, I_n \in \mathcal{I}$ tales que $R = \sum_{i=1}^{n} I_i$. Una inducción evidente usando el Lema **1.6.1** muestra que R es soluble, como queremos.

Para ver la segunda afirmación de la proposición, supongamos que J es un ideal soluble del cociente L/R. Existe entonces un ideal $\tilde{J}$ de L que contiene a R y tal que $J = \tilde{J}/R$ y, como tanto R como J son solubles, la Proposición 1.3.5*(ii)* nos dice que $\tilde{J}$ es soluble. Ahora bien: R es el único ideal soluble maximal, así que esto implica que $R \supseteq \tilde{J}$. Así, $\tilde{J}$ es de hecho igual a R y, por lo tanto $J = \tilde{J}/R$ es el ideal nulo de L/R. □

1.6.3. Una ***derivación*** de un álgebra de Lie L es una función lineal $D : L \to L$ tal que

$$D([x, y]) = [D(x), y] + [x, D(y)]$$

para todo $x, y \in L$.

1.6.4. Lema. *Sea L un álgebra de Lie de dimensión finita soluble y sea N su ideal maximal nilpotente. Si $D : L \to L$ es una derivación de L, entonces $D(L) \subseteq N$.*

Demostración. Sea $D : L \to L$ una derivación de L. Sea $K = L \oplus \Bbbk$ y consideremos la función bilineal $[\![-,-]\!] : K \times K \to K$ tal que

$$[\![(x, a), (y, b)]\!] = ([x, y] + aD(y) - bD(x), 0). \tag{10}$$

Un cálculo directo muestra que $[\![-,-]\!]$ hace de K un álgebra de Lie; la anti-simetría es evidente y la condición de Jacobi vale precisamente porque D es una derivación de L. El subespacio L de K es un ideal de K, y la estructura de álgebra de Lie que L adquiere en tanto subálgebra de K coincide con su estructura original. Esto nos permite identificar a L con ese ideal de K. Si, por otro lado, escribimos δ al elemento $(0, 1)$ de K, entonces para todo $x \in L$ se tiene que $[\delta, x] = D(x)$.

La fórmula (10) hace evidente que $K^{(1)} \subseteq L$, así que $K^{(n+1)} \subseteq L^{(n)}$ para todo $n \geq 0$ y, como L es soluble, K también lo es. Sean N_L y N_K los ideales nilpotentes maximales de L y de K, respectivamente, y sea $x \in L$. Es

$$D(x) = [\delta, x] \in K^{(1)}$$

y, de acuerdo al Corolario **1.4.6**, el ideal $K^{(1)}$ de K es nilpotente, así que está contenido en N_K: esto nos dice que $\operatorname{ad}_K(D(x)) : K \to K$ es una función lineal nilpotente. Como L es un ideal de K, podemos restringir esta función a L para obtener una función también nilpotente $\operatorname{ad}_K(D(x))|_L : L \to L$. Como ésta última coincide con $\operatorname{ad}_L(D(x))$, la descripción de N_L dada el la Proposición **1.5.4** implica que $D(x) \in N_L$. Esto es lo que afirma la proposición. □

1.6.5. Proposición. *Sea L un álgebra de Lie de dimensión finita. Existe un único ideal nilpotente maximal N el L. Este ideal está contenido en* $\operatorname{rad} L$ *y* $[L, \operatorname{rad} L] \subseteq N$.

Llamamos a este ideal nilpotente maximal el ***radical nilpotente*** de L o su ***nilradical***, y lo escribimos $\operatorname{nil} L$.

Demostración. El radical soluble $\operatorname{rad} L$ de L es soluble, así que la Proposición 1.5.4 nos dice que existe un único ideal nilpotente maximal N en $\operatorname{rad} L$. Si $x \in L$, entonces la función $\operatorname{ad}(x) : L \to L$ es una derivación de L y, como $\operatorname{rad} L$ es un ideal de L, se restringe a una función $\operatorname{ad}(x)|_{\operatorname{rad} L} : \operatorname{rad} L \to \operatorname{rad} L$, que también es una derivación. En vista del Lema 1.6.4, tenemos que $\operatorname{ad}(x)|_{\operatorname{rad} L}(\operatorname{rad} L) \subseteq N$. Esto implica que $[x, N] \subseteq [x, \operatorname{rad} L] \subseteq N$, lo que muestra que N es un ideal en L y no sólo en $\operatorname{rad} L$, y, más generalmente, que $[L, \operatorname{rad} L] \subseteq N$

Sea I un ideal nilpotente de L. Como I es, en particular, soluble, está contenido en $\operatorname{rad} L$. Como es un ideal de $\operatorname{rad} L$ y es nilpotente, está contenido en N. Esto prueba que N es el único ideal nilpotente maximal de L. □

§7. Subálgebras de Cartan

Probamos que toda álgebra de Lie de dimensión finita posee una subálgebra de Cartan.

1.7.1. Lema. *Sea L un álgebra de Lie y sea K una subálgebra de L. El conjunto*

$$\mathfrak{N}(K) = \{x \in L : [x, K] \subseteq K\}$$

es una subálgebra de L y es la única maximal entre las que contienen a K como un ideal.

Llamamos a $\mathfrak{N}(K)$ la ***subálgebra normalizante*** de K en L. Si es necesario, escribimos $\mathfrak{N}_L(K)$ para explicitar a L.

Demostración. Que $\mathfrak{N}(K)$ es un subespacio de L es inmediato. Si x, $y \in \mathfrak{N}(K)$, entonces para cada $z \in K$ tenemos que

$$[[x, y], z] = [[x, z], y] + [x, [y, z]] \in K,$$

ya que $[x, z]$ e $[y, z]$ están en K, y entonces $[x, y] \in \mathfrak{N}(K)$: esto muestra que $\mathfrak{N}(K)$ es una subálgebra de L. De su definición misma es claro que contiene a K y que K es uno de sus ideales. Si N es otra subálgebra de L que contiene a K como ideal, entonces para todo $x \in N$ se tiene que $[x, K] \subseteq K$, de manera que $x \in \mathfrak{N}(K)$: vemos así que $N \subseteq \mathfrak{N}(K)$ y, en consecuencia, que $\mathfrak{N}(K)$ es la única subálgebra maximal con la propiedad de contener a K como ideal. □

1.7.2. Si L es un álgebra de Lie, una ***subálgebra de Cartan*** de L es una subálgebra nilpotente $\mathfrak{h}$ de L tal que $\mathfrak{N}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$. La descripción de la estructura de las álgebras de Lie se basa en un estudio detallado de sus subálgebras de Cartan, como veremos más adelante. Nuestro objetivo inmediato es mostrar que toda álgebra de Lie de dimensión finita contiene alguna.

1.7.3. Lema. *Sea L un álgebra de Lie y sea $D : L \to L$ una derivación de L. Para cada $n \geq 0$ y cada x, $y \in L$ se tiene que*

$$f^n([x, y]) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} [f^i(x), f^{n-1}(y)].$$

Demostración. Eso puede probarse sin ninguna dificultad haciendo inducción en n. □

1.7.4. Si L es un álgebra de Lie y $x \in L$, para cada $\lambda \in \Bbbk$ consideramos el subespacio L_λ^x de L de los autovectores generalizados que tiene a λ por autovalor, esto es,

$$L_\lambda^x = \{y \in L : \text{existe } n \geq 0 \text{ tal que } (\mathsf{ad}(x) - \lambda \mathsf{id}_L)^n(y) = 0\}.$$

Sabemos del álgebra lineal que si L tiene dimensión finita entonces hay una descomposición en suma directa

$$L = \bigoplus_{\lambda \in \Bbbk} L_\lambda^x,$$

que para cada $\lambda \in \Bbbk$ el subespacio L_λ^x es $\mathsf{ad}(x)$-invariante y que la restricción $\mathsf{ad}(x)|_{L_\lambda^x}$ tiene a λ como único autovalor.

1.7.5. Proposición. *Sea L un álgebra de Lie de dimensión finita. Si $x \in L$ es un elemento tal que la dimensión de L_0^x es mínima posible, entonces el subespacio L_0^x es una subálgebra de Cartan de L. En particular, L posee subálgebras de Cartan.*

Decimos que un elemento x de L tal que el subespacio $L_{x,0}$ tiene dimensión mínima es ***regular***. Si L no es nula, entonces 0 no es un elemento regular de L.

Demostración. Podemos suponer que L no es nula, ya que en caso contrario no hay nada que probar. Sea x un elemento regular de L y sea $\mathfrak{h} = L_0^x$. Como $\mathsf{ad}(x)(x) = 0$, tenemos que $x \in L_0^x$ y, entonces, que $L_0^x \neq 0$. Tenemos que mostrar que $\mathfrak{h}$ es una subálgebra de Cartan de L.

Si y, $z \in \mathfrak{h}$ y m, $n \geq 0$ son tales que $\mathsf{ad}(x)^m(y) = \mathsf{ad}(x)^n(z) = 0$, entonces el Lema 1.7.3 y el hecho de que la función $\mathsf{ad}(x) : L \to L$ es una derivación de L implican que

$$\mathsf{ad}(x)^{m+n}([y, z]) = \sum_{i=0}^{m+n} \binom{m+n}{i} [\mathsf{ad}(x)^i(y), \mathsf{ad}(x)^{n+m-i}(z)].$$

Esta suma se anula y, de hecho, cada uno de sus términos se anula separadamente: si $0 \leq i \leq n$, entonces $\mathsf{ad}(x)^{n+m-i}(z) = 0$ y si $n \leq i \leq m + n$, entonces $\mathsf{ad}(x)^i(y) = 0$. Esto nos dice que $[y, z] \in \mathfrak{h}$ y, en definitiva, que $\mathfrak{h}$ es una subálgebra de L. Esto implica que $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{N}(\mathfrak{h})$. Por otro lado, si $y \in \mathfrak{N}(\mathfrak{h})$, entonces $[x, y] \in \mathfrak{h}$ y por lo tanto existe $n \geq 0$ tal que $\mathsf{ad}(x)^{n+1}(y) = \mathsf{ad}(x)^n([x, y]) = 0$. La definición de $\mathfrak{h}$, entonces, nos dice que $y \in \mathfrak{h}$. Así, es $\mathfrak{N}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$. Para terminar, tenemos que mostrar que $\mathfrak{h}$ es nilpotente y, en vista de la Proposición 1.5.3, basta mostrar que para cada $y \in \mathfrak{h}$ la función lineal $\mathsf{ad}_{\mathfrak{h}}(y) : \mathfrak{h} \to \mathfrak{h}$ es nilpotente.

Sea $\ell = \dim \mathfrak{h}$ y sea $\mathscr{B} = (h_1, \dots, h_n)$ una base ordenada de L tal que $\mathscr{B}' = (h_1, \dots, h_\ell)$ es una base ordenada de $\mathfrak{h}$. Existen escalares $\gamma_{i,j}^k \in \Bbbk$, uno para cada elección de i, j y k en $\{1, \dots, n\}$, tales que $[h_i, h_j] = \sum_{k=1}^n \gamma_{i,j}^k h_k$ para cada $i, j \in \{1, \dots, n\}$, y que $\mathfrak{h}$ sea una subálgebra de L implica que

$$\gamma_{i,j}^k = 0 \text{ siempre que } 1 \leq i, j \leq \ell \text{ y } \ell + 1 \leq k \leq n. \tag{11}$$

Consideremos la función

$$y : (\lambda_1, \dots, \lambda_\ell) \in \Bbbk^\ell \mapsto \lambda_1 h_1 + \dots + \lambda_\ell h_\ell \in \mathfrak{h}.$$

Para cada $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_\ell) \in \Bbbk^\ell$ y cada $j \in \{1, \dots, n\}$, es

$$\mathsf{ad}(y(\lambda))(h_j) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{r=1}^\ell \lambda_r \gamma_{r,j}^i \right) h_i. \tag{12}$$

Sea R el anillo $\Bbbk[X_1, \dots, X_\ell]$, para cada $i, j \in \{1, \dots, n\}$ sea $f_{i,j} = \sum_{r=1}^\ell \gamma_{r,j}^i X_r \in R$, y consideremos la matriz $A = (f_{i,j}) \in M_n(R)$. De acuerdo a (11), tenemos que

$$f_{i,j} = 0 \text{ si } 1 \leq j \leq \ell < i \leq n,$$

así que A es una matriz triangular superior por bloques,

$$A = \begin{pmatrix} f_{1,1} & \cdots & f_{1,\ell} & f_{1,\ell+1} & \cdots & f_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{\ell,1} & \cdots & f_{\ell,\ell} & f_{\ell,\ell+1} & \cdots & f_{\ell,n} \\ 0 & \cdots & 0 & f_{\ell+1,\ell+1} & \cdots & f_{\ell+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & f_{n,\ell+1} & \cdots & f_{n,n} \end{pmatrix},$$

y se sigue de (12) que para cada $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_\ell) \in \Bbbk^\ell$ la matriz de $\mathsf{ad}_L(y(\lambda)) : L \to L$ con respecto a $\mathscr{B}$ es la matriz triangular superior por bloques

$$\|\mathsf{ad}_L(y(\lambda))\|_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} f_{1,1}(\lambda) & \cdots & f_{1,\ell}(\lambda) & f_{1,\ell+1}(\lambda) & \cdots & f_{1,n}(\lambda) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{\ell,1}(\lambda) & \cdots & f_{\ell,\ell}(\lambda) & f_{\ell,\ell+1}(\lambda) & \cdots & f_{\ell,n}(\lambda) \\ 0 & \cdots & 0 & f_{\ell+1,\ell+1}(\lambda) & \cdots & f_{\ell+1,n}(\lambda) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & f_{n,\ell+1}(\lambda) & \cdots & f_{n,n}(\lambda) \end{pmatrix}$$

cuyas componentes son el resultado de evaluar las de la matriz A en $X_1 = \lambda_1, \dots, X_\ell = \lambda_\ell$.

HACER □

1.7.6. Proposición. *Sea L un álgebra de Lie nilpotente. Si K es una subálgebra propia de L, entonces K está propiamente contenida en la subálgebra normalizante $\mathfrak{N}(K)$.*

Demostración. Sea K una subálgebra propia de L. Sea $n \geq 1$ el índice de nilpotencia de L, de manera que $L^{n+1} = 0$ y $L^n \neq 0$. Claramente hay un menor entero no-negativo m tal que $L^m \nsubseteq K$ y es $m \leq n$. Como $[L^m, K] \subseteq [L^m, L] = L^{m+1}$ y este último ideal de L está contenido en K por la forma en que elegimos a m, vemos que $L^m \subseteq \mathfrak{N}(K)$. Como L^m no está contenido en K, esto muestra que $\mathfrak{N}(K)$ contiene propiamente a K, como queremos. □

1.7.7. Corolario. *Una subálgebra de Cartan de un álgebra de Lie de dimensión finita es una subálgebra nilpotente maximal.*

Demostración. Sea L un álgebra de Lie de dimensión finita y sea K una subálgebra nilpotente de L que no es maximal entre las subálgebras nilpotentes, de manera que existe una subálgebra K' en L que es nilpotente y que contiene propiamente a K. De acuerdo a la Proposición 1.7.6, entonces, el normalizador $\mathfrak{N}_{K'}(K)$ de K en K' es estrictamente más grande que K y, como está contenido en $\mathfrak{N}_L(K)$, vemos que K no coincide con su normalizador: K no es, por lo tanto, una subálgebra de Cartan de L. □

1.7.8. La implicación recíproca a la del Corolario 1.7.7 es falsa. Exhibamos un ejemplo de esto. Sea $n \geq 1$, sea $I \in \mathfrak{gl}_n(\Bbbk)$ la matriz identidad y consideremos el subespacio $L = \mathfrak{n}_n(\Bbbk) + \Bbbk I$ de $\mathfrak{gl}_n(\Bbbk)$, que es una subálgebra de $\mathfrak{gl}_n(\Bbbk)$. Como I es central en $\mathfrak{gl}_n(\Bbbk)$, es inmediato que $L^i = \mathfrak{n}_n(\Bbbk)^i$ para cada $i \geq 2$ y, entonces, que L es nilpotente.

Afirmamos que $\mathfrak{N}(L) = \mathfrak{t}_n(\Bbbk)$, la subálgebra de $\mathfrak{gl}_n(\Bbbk)$ de las matrices triangulares superiores. En efecto, como $\mathfrak{t}_n(\Bbbk)$ contiene a L, tenemos que

$$[\mathfrak{t}_n(\Bbbk), L] \subseteq [\mathfrak{t}_n(\Bbbk), \mathfrak{t}_n(\Bbbk)] = \mathfrak{n}_n(\Bbbk) \subseteq L$$

y, por lo tanto, que $\mathfrak{t}_n(\Bbbk) \subseteq \mathfrak{N}(L)$. Supongamos, por otro lado, que $A = (a_{i,j}) \in \mathfrak{gl}_n(\Bbbk)$ está en $\mathfrak{N}(L)$. Si $1 \leq r < s \leq n$, la matriz elemental $E_{r,s}$ está en L y entonces $[A, E_{r,s}]$ pertenece a L. Esto nos dice que siempre que $1 \leq l < k \leq n$ es

$$0 = [A, E_{r,s}]_{k,l} = \delta_{s,l} a_{k,r} - \delta_{r,k} a_{s,l}.$$

Primero, observemos que L no es una subálgebra de Cartan de $\mathfrak{gl}_n(\Bbbk)$. En efecto, su normalizador $\mathfrak{N}(L)$ contiene a la subálgebra $\mathfrak{t}_n(\Bbbk)$ de las matrices triangulares superiores, que contiene a su vez estrictamente a L. Para verlo, basta observar que $\mathfrak{t}_n(\Bbbk)$ contiene a L y que entonces

$$[\mathfrak{t}_n(\Bbbk), L] \subseteq [\mathfrak{t}_n(\Bbbk), \mathfrak{t}_n(\Bbbk)] = \mathfrak{n}_n(\Bbbk) \subseteq L.$$

Resta que mostremos, para nuestro ejemplo, que L es una subálgebra nilpotente maximal de $\mathfrak{gl}_n(\Bbbk)$. Supongamos, por el contrario, que existe una subálgebra nilpotente H de $\mathfrak{gl}(\Bbbk)$ que contiene propiamente a L. HACER

§8. La descomposición de Cartan de un álgebra de Lie

Describimos la descomposición de Cartan de un álgebra de Lie como suma directa de espacios de peso con respecto a una subálgebra de Cartan.

1.8.1. Lema. *Sea L un álgebra de Lie y sea M un L-módulo. Si x, $y \in L$, $m \in M$ y α, $\beta \in \Bbbk$, entonces*

$$\left(y_M - (\alpha+\beta)\mathsf{id}_M\right)^n (x \cdot m) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \left(\mathsf{ad}(y) - \alpha\,\mathsf{id}_L\right)^i (x) \cdot \left(y_M - \beta\,\mathsf{id}_M\right)^{n-i}(m).$$

para todo $n \geq 0$.

Demostración. **Hacer** □

1.8.2. Proposición. *Sea L un álgebra de Lie nilpotente de dimensión finita y sea M un L-módulo. Si $y \in L$ y $\lambda \in \Bbbk$, entonces el autoespacio generalizado de la función lineal $y_M : M \to M$ correspondiente a λ,*

$$V_\lambda^y = \{m \in M : \textit{existe } n \in \mathbb{N}_0 \textit{ tal que } (y_M - \lambda\,\mathsf{id}_M)^n(m) = 0\},$$

es un L-submódulo de M.

Demostración. Sean $y \in L$ y $\lambda \in \Bbbk$ y sean $x \in L$ y $m \in V_\lambda^y$. De acuerdo a la Proposición 1.5.3, existe $r \in \mathbb{N}_0$ tal que $\mathsf{ad}(y)^n(x) = 0$. Por otro lado, de la definición de V_λ^y sabemos que existe $s \in \mathbb{N}_0$ tal que $(y_M - \lambda\,\mathsf{id}_M)^s(m) = 0$. En vista del Lema 1.8.1 tenemos que

$$\left(y_M - \lambda\,\mathsf{id}_M\right)^{r+s}(x \cdot m) = \sum_{i=0}^{r+s} \binom{r+s}{i} \mathsf{ad}(y)^i(x) \cdot \left(y_M - \lambda\,\mathsf{id}_M\right)^{r+s-i}(m)$$

y esta suma se anula: si $i \in \{0, \dots, r+s\}$, entonces o bien $i \geq r$ y $(\mathsf{ad}(y)^i(x) = 0$, o bien $r+s-i \geq s$ y $(y_M - \lambda\,\mathsf{id}_M)^{r+s-i})(m) = 0$. Esto muestra que $x \cdot m \in V_\lambda^y$ y, en definitiva, que V_λ^y es un L-submódulo de M. □

1.8.3. Si L es un álgebra de Lie, decimos que uno L-módulo M es ***descomponible*** si posee submódulos propios M' y M'' tales que $M = M' \oplus M''$, y que es ***indescomponible*** en caso contrario.

Proposición. *Sea L un álgebra de Lie. Si M es un L-módulo de dimensión finita, entonces existe $n \in \mathbb{N}_0$ y submódulos indescomponibles $M_1, \dots, M_n$ de M tales que $M = \bigoplus_{i=1}^n M_i$.*

Demostración. Sea M un L-módulo de dimensión finita y procedamos haciendo inducción sobre la dimensión de M. Si $\dim M = 0$, podemos tomar $n = 0$. Si, en cambio, $\dim M > 0$, hay dos posibilidades. O bien M es indescomponible, y en ese caso podemos tomar $n = 1$ y $M_1 = M$, o bien M es descomponible, y existen submódulos propios M' y M'' de M tales que $M = M' \oplus M''$. Como tanto M' como M'' tienen dimensión estrictamente menor a la de M, inductivamente sabemos que existen $r, s \in \mathbb{N}_0$, y submódulos indescomponibles $M'_1, \dots, M'_r$ de M y $M''_1, \dots, M''_s$ de M'' tales que $M' = \bigoplus_{i=1}^r M'_i$ y $M'' = \bigoplus_{i=1}^n M''_i$. Podemos poner en este caso, entonces, $n = r+s$, $M_i = M'_i$ si $i \in \{1, \dots, r\}$ y $M_i = M''_{i-r}$ si $i \in \{r+1, \dots, n\}$, para tener obtener una descomposición $M = \bigoplus_{i=1}^n M_i$ de M como suma directa de submódulos indescomponibles. □

1.8.4. Proposición. *Sea L un álgebra de Lie nilpotente de dimensión finita. Si M es un L-módulo de dimensión finita indescomponible, entonces existe una función lineal $\lambda : L \to \Bbbk$ que se anula sobre L^2 y una base ordenada $\mathscr{B}$ de M tal que para todo $x \in L$ la matriz de x_M con respecto a $\mathscr{B}$ es triangular superior de la forma*

$$\|x_M\|_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} \lambda(x) & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda(x) & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda(x) \end{pmatrix}$$

Demostración. Sea M un L-módulo de dimensión finita. Si $x \in L$, entonces tenemos una descomposición de M como suma directa de autoespacios generalizados

$$M = \bigoplus_{\mu \in \Bbbk} M_\mu^x$$

con respecto a la función lineal $x_M : M \to M$. La Proposición 1.8.2 nos dice que cada uno de los subespacios que aparecen en esta descomposición es un L-submódulo de M: como M es indescomponible, vemos que exactamente uno de ellos es no nulo, esto es, que existe un escalar $\lambda(x) \in \Bbbk$ tal que $M = M^x_{\lambda(x)}$ y, entonces, que $\lambda(x)$ es el único autovalor de x_M.

Como el álgebra L es nilpotente, es soluble y el Corolario 1.4.4 nos dice que existe una base ordenada $\mathscr{B} = (m_1, \dots, m_n)$ de M tal que para todo $x \in L$ la matriz $\|x_M\|_{\mathscr{B}}$ es triangular superior y —como el único autovalor de x_M es $\lambda(x)$— esa matriz tiene todas sus componentes diagonales iguales a $\lambda(x)$. En particular, esto nos dice que $x \cdot m_1 = \lambda(x)m_1$ para todo $x \in L$, es decir, que el subespacio $\langle m_1 \rangle$ de M es un submódulo. La Proposición 1.4.1*(i)* implica entonces que la función λ es lineal y que se anula sobre L^2. Todas las afirmaciones de la proposición quedan así probadas. □

1.8.5. Proposición. *Sea L un álgebra de Lie nilpotente de dimensión finita y sea M un L-módulo de dimensión finita. Para cada $\lambda \in (L/L^2)^*$ el conjunto*

$$M_\lambda = \{m \in M : \textit{para cada } x \in L \textit{ existe } n \in \mathbb{N}_0 \textit{ tal que } (x_M - \lambda(x)\mathrm{id}_M)^n(m) = 0\}$$

es un L-submódulo de M y

$$M = \bigoplus_{\lambda \in (L/L^2)^*} M_\lambda.$$

Demostración. Como M tiene dimensión finita, la Proposición 1.8.3 nos dice que existen $n \geq 0$ y submódulos indescomponibles $M_1, \dots, M_n$ de M tales que $M = \bigoplus_{i=1}^n M_i$. De acuerdo a la Proposición 1.8.4, existen $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in (L/L^2)^*$ tales $M_i \subseteq M_{\lambda_i}$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$. Sean $\mu_1, \dots, \mu_r$ los elementos del conjunto $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ y para cada $j \in \{1, \dots, r\}$ sea

$$W_j = \bigoplus_{\substack{i \in \{1,\dots,n\} \\ \lambda_i = \mu_j}} M_i.$$

Claramente $M = \bigoplus_{j=1}^{r} W_j$ y $W_j \subseteq M_{\mu_j}$ para cada $j \in \{1, \dots, r\}$. Para probar la proposición bastará que mostremos que, de hecho, $W_j = M_{\mu_j}$ para cada $j \in \{1, \dots, r\}$.

Supongamos, por el contrario, que por ejemplo $W_1 \subsetneq M_{\mu_1}$, de manera que existe $m \in M_{\mu_1} \setminus W_1$. Como $M = \bigoplus_{j=1}^{r} W_j$, existen $m_1, \dots, m_r$ en $W_1, \dots, W_r$, respectivamente, tales que $m = m_1 + \cdots + m_r$, y entonces el elemento $m' = m - m_1$ está, por un lado, en M_{μ_1} y, por otro, es igual a

$$m_2 + \cdots + m_r \in W_2 \oplus \cdots \oplus W_r.$$

Las $r-1$ funciones lineales $\mu_1 - \mu_2, \dots, \mu_1 - \mu_r : L \to \Bbbk$ son todas no nulas: como nuestro cuerpo $\Bbbk$ es infinito, esto implica que existe $x \in L$ tal que ninguna de ellas se anula en x, es decir, tal que $\mu_1(x) \neq \mu_j(x)$ para cada $j \in \{2, \dots, r\}$. Ahora bien:

- que m' pertenezca a M_{μ_1} implica que existe $n(x) \in \mathbb{N}_0$ tal que
$$(x_M - \mu_1(x)\mathrm{id}_M)^{n(x)}(m') = 0 \tag{13}$$
- y, por otro lado, si $j \in \{2, \dots, r\}$, entonces que m_j esté en W_j significa que existe $n_j(x) \in \mathbb{N}_0$ tal que
$$(x_M - \mu_j(x)\mathrm{id}_M)^{n_j(x)}(m_j) = 0,$$
y se sigue de esto que
$$\left(\prod_{j=2}^{r}(x_M - \mu_j(x)\mathrm{id}_M)^{n_j(x)}\right)(m') = 0. \tag{14}$$

La forma que elegimos x implica que los polinomios

$$f(X) = (X - \mu_1(x))^{n(x)}, \qquad g(X) = \prod_{j=2}^{r}(X - \mu_j(x)\mathrm{id}_M)^{n_j(x)}$$

son coprimos en $\Bbbk[X]$, así que existen $a, b \in \Bbbk[X]$ tales que $a(X)f(X) + b(x)g(X) = 1$. Evaluando está igualdad en la función lineal x_M vemos que

$$\mathrm{id}_M = a(x_M)(x_M - \mu_1(x)\mathrm{id}_M)^{n(x)} + b(x_M)\prod_{j=2}^{r}(x_M - \mu_j(x)\mathrm{id}_M)^{n_j(x)}$$

y evaluando a su vez esta ambos miembros de esta igualdad en m', y recordando (13) y (14), vemos que $m' = 0$, es decir, que $m = m_1$: esto contradice nuestra hipótesis y esta contradicción prueba la proposición. □

1.8.6. Si L es un álgebra de Lie nilpotente de dimensión finita y M es un L-módulo de dimensión finita, la Proposición 1.8.5 nos da una descomposición de M como suma directa de submódulos

$$M = \bigoplus_{\lambda \in (L/L^2)^*} M_\lambda.$$

Si $\lambda \in (L/L^2)^*$ es tal que $M_\lambda \neq 0$, decimos que λ es un ***peso*** de M y llamamos al submódulo M_λ el ***espacio de peso*** correspondiente a λ.

1.8.7. El caso más importante de esto es el siguiente: sea L un álgebra de Lie de dimensión finita y sea $\mathfrak{h}$ una subálgebra de Cartan de L. Si vemos a L como un $\mathfrak{h}$-módulo restringiendo la representación adjunta $\mathsf{ad}_L : L \to \mathfrak{gl}(L)$ a $\mathfrak{h}$, tenemos una descomposición de L como suma directa de espacios de peso para $\mathfrak{h}$,

$$L = \bigoplus_{\lambda \in (\mathfrak{h}/\mathfrak{h}^2)^*} L_\lambda.$$

Una ***raíz*** de L con respecto a $\mathfrak{h}$ es un peso no nulo $\lambda \in (\mathfrak{h}/\mathfrak{h}^2)^*$ de L. Escribimos Φ al conjunto de raíces de L con respecto a $\mathfrak{h}$. La descomposición de L como suma directa de espacios de peso puede escribirse en la forma

$$L = L_0 \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} L_\alpha.$$

1.8.8. Proposición. *Sea L un álgebra de Lie de dimensión finita y sea $\mathfrak{h}$ una subálgebra de Cartan de L.*

(*i*) *El espacio de peso L_0 correspondiente al elemento nulo de $(\mathfrak{h}/\mathfrak{h}^2)^*$ coincide con $\mathfrak{h}$.*

(*ii*) *Si λ, $\mu \in (\mathfrak{h}/\mathfrak{h}^2)^*$, entonces $[L_\lambda, L_\mu] \subseteq L_{\lambda+\mu}$.*

Demostración. (*i*) Como $\mathfrak{h}$ es nilpotente, para cada $x \in L$ se tiene que para cada $y \in L$ existe $n \in \mathbb{N}_0$ con $\mathsf{ad}(x)^n(y) = 0$, de manera que $x \in L_0$: vemos así que $\mathfrak{h} \subseteq L_0$. Supongamos, para llegar a un absurdo, que esta inclusión es estricta. El cociente $L_0/\mathfrak{h}$ es entonces un $\mathfrak{h}$-módulo no nulo y si $\rho : \mathfrak{h} \to \mathfrak{gl}(L_0/\mathfrak{h})$ es la correspondiente representación de $\mathfrak{h}$, entonces todos los elementos de $\rho(\mathfrak{h})$ son nilpotentes. La Proposición 1.5.2 nos dice que el subespacio invariante $(L_0/\mathfrak{h})^{\rho(\mathfrak{h})}$ es no nulo. Esto significa que existe un elemento $x \in L_0 \setminus \mathfrak{h}$ tal que $[y, x] \in \mathfrak{h}$ para todo $y \in \mathfrak{h}$, es decir, tal que $x \in \mathfrak{N}_L(\mathfrak{h})$: esto es imposible, porque $\mathfrak{h}$ coincide con su normalizador, y esta contradicción es la que buscábamos.

(*ii*) Sean λ, $\mu \in (L/L^2)^*$, sean $x \in L_\lambda$ e $y \in L_\mu$. Si $z \in \mathfrak{h}$, existen r, $s \in \mathbb{N}_0$ tales que $(\mathsf{ad}(z) - \lambda(z)\mathsf{id}_L)^r(x) = 0$ y $(\mathsf{ad}(z) - \mu(z)\mathsf{id}_L)^s(y) = 0$ y entonces, de acuerdo al Lema 1.8.1, tenemos que

$$\begin{aligned}(\mathsf{ad}(z) - (\lambda(z) + \mu(z))\mathsf{id}_L)^{r+s}([x, y]) \\ = \sum_{i=0}^{r+s} \binom{r+s}{i} \big[(\mathsf{ad}(z) - \lambda(z)\mathsf{id}_L)^i(x), (\mathsf{ad}(z) - \mu(z)\mathsf{id}_L)^{r+s-i}(y)\big].\end{aligned}$$

Si $i \in \{0, \dots, r+1\}$, entonces o bien $i \geq r$ y $(\mathsf{ad}(z) - \lambda(z)\mathsf{id}_L)^i(x) = 0$, o bien $r + s - i \geq s$ y $(\mathsf{ad}(z) - \mu(z)\mathsf{id}_L)^{r+s-i}(y) = 0$: esto muestra que la suma se anula y que, en definitiva, $[x, y] \in L_{\lambda+\mu}$, que es lo que queremos. □

1.8.9. Proposición. *Sea L un álgebra de Lie de dimensión finita, sea $\mathfrak{h}$ una subálgebra de Cartan de L y sea Φ el conjunto de las raíces de L con respecto a $\mathfrak{h}$. Si α y β son dos elementos de Φ, entonces existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $\beta = r\alpha$ sobre el subespacio $[L_\alpha, L_{-\alpha}]$ de $\mathfrak{h}$.*

Demostración. Podemos suponer que $-\alpha \in \Phi$, ya que si no es ése el caso, entonces $L_{-\alpha} = 0$ y no hay nada que probar. Como el conjunto de raíces ϕ es finito y contiene a β, existen enteros $p, q \in \mathbb{N}_0$ tales que

- cada uno de las formas lineales $i\alpha + \beta$ con $i \in \{-p, \dots, q\}$ está en Φ, y
- las formas lineales $-(p+1)\alpha + \beta$ y $(q+1)\alpha + \beta$ no están en Φ.

Si $-(p+1)\alpha+\beta = 0$ o $(q+1)\alpha+\beta = 0$, podemos tomar $r = (p+1)$ o $r = -(q+1)$, respectivamente, para que se cumpla la conclusión del enunciado. Supongamos entonces que esas dos formas lineales no son nulas. Observemos que los espacios de peso $L_{-(p+1)\alpha+\beta}$ y $L_{(q+1)\alpha+\beta}$ de L son, en consecuencia, nulos.

Consideremos en L el subespacio

$$M = \bigoplus_{-p \le i \le q} L_{i\alpha+\beta}.$$

Sean $y \in L_\alpha$ y $z \in L_{-\alpha}$, y pongamos $x = [y, z]$. Como $\mathsf{ad}(y)(L_\lambda) \subseteq L_{\alpha+\lambda}$ para todo $\lambda \in (\mathfrak{h}/\mathfrak{h}^2)^*$ y $L_{(q+1)\alpha+\beta} = 0$, tenemos que $\mathsf{ad}(y)(M) \subseteq M$; de la misma forma, $\mathsf{ad}(z)(M) \subseteq M$ y, por lo tanto,

$$\mathsf{ad}(x)(M) = (\mathsf{ad}(y) \circ \mathsf{ad}(z) - \mathsf{ad}(z) \circ \mathsf{ad}(y))(M) \subseteq M.$$

La traza de $\mathsf{ad}(x)|_M : M \to M$ es nula, ya que $\mathsf{ad}(x)|_M = [\mathsf{ad}(y)|_M, \mathsf{ad}(z)|_M]$. Calculémosla de otra manera. Como $x \in \mathfrak{h}$, $\mathsf{ad}(x)(L_{i\alpha+\beta} \subseteq L_{i\alpha+\beta}$ para cada $i \in \{-p, \dots, q\}$, así que

$$\operatorname{tr} \mathsf{ad}(x)|_M = \sum_{i=-p}^{q} \operatorname{tr} \mathsf{ad}(x)|_{L_{i\alpha+\beta}}.$$

Por otro lado, como $x \in \mathfrak{h}$ y $L_{i\alpha+\beta}$ es el espacio de peso de L con respecto a $\mathfrak{h}$ de peso $i\alpha + \beta$, el único autovalor de $\mathsf{ad}(x)|_{L_{i\alpha+\beta}}$ es $i\alpha(x) + \beta(x)$, y entonces

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} \mathsf{ad}(x)|_M &= \sum_{i=-p}^{q} \dim L_{i\alpha+\beta} \cdot (i\alpha(x) + \beta(x)) \\ &= \left(\sum_{i=-1}^{p} i \dim L_{i\alpha+\beta} \right) \alpha(x) + \left(\sum_{i=1}^{p} \dim L_{i\alpha+\beta} \right) \beta(x). \end{aligned}$$

Podemos considerar el número racional

$$r = \frac{\sum_{i=-1}^{p} i \dim L_{i\alpha+\beta}}{\sum_{i=1}^{p} \dim L_{i\alpha+\beta}},$$

ya que el denominador no se anula, y observar que lo que hemos hecho nos dice que

$$\beta(x) = r\alpha(x)$$

para todo elemento x de $[L_\alpha, L_{-\alpha}]$ que es de la forma $[y, z]$ con $y \in L_\alpha$ y $z \in L_{-\alpha}$. Como el número r es independiente de la elección de r, vemos que, de hecho, $\beta = r\alpha$ sobre todo el subespacio $[L_\alpha, L_{-\alpha}]$, como queremos. □

§9. La forma de Killing

Presentamos la forma de Killing de un álgebra de Lie y probamos sus propiedades básicas.

1.9.1. Si L es un álgebra de Lie y M es un L-módulo de dimensión finita, y $\rho : L \to \mathfrak{gl}(M)$ es representación de L correspondiente a M, entonces la ***forma bilineal asociada a M*** es la función bilineal $B_M : L \times L \to \Bbbk$ tal que

$$B_M(x, y) = \operatorname{tr}\big(\rho(x) \circ \rho(y)\big)$$

para cada $x, y \in L$. Si el álgebra de Lie L tiene dimensión finita y M es la representación adjunta de L, llamamos a la forma B_L la ***forma de Killing*** de L.

Proposición. *Sea L un álgebra de Lie y sea M un L-módulo de dimensión finita. La forma bilineal $B_M : L \times L \to \Bbbk$ asociada a M es simétrica e invariante, en el sentido de que cada vez que x, y, z son elementos de L se tiene que*

$$B_L([x, y], z) = B_L(x, [y, z]).$$

Demostración. Sea $\rho : L \to \mathfrak{gl}(M)$ la representación de L correspondiente al L-módulo M. Si x e y son elementos de L, entonces la simetría de la traza implica que

$$B_M(x, y) = \operatorname{tr}\big(\rho(x) \circ \rho(y)\big) = \operatorname{tr}\big(\rho(y) \circ \rho(x)\big) = B_M(y, x),$$

así que la forma B_M es simétrica. Por otro lado, si x, y, $z \in L$, se tiene que para todo $m \in M$ se tiene que

$$[x, y] \cdot z \cdot m = x \cdot y \cdot z \cdot m - y \cdot x \cdot z \cdot m, \qquad x \cdot [y, z] \cdot m = x \cdot y \cdot z \cdot m - x \cdot z \cdot y \cdot m,$$

de manera que

$$[x, y] \cdot z \cdot m - x \cdot [y, z] \cdot m = x \cdot z \cdot y \cdot m - y \cdot x \cdot z \cdot m$$

y, por lo tanto,

$$\rho([x, y]) \circ \rho(z) - \rho(x) \circ \rho([y, z]) = \rho(x) \circ \rho(z) \circ \rho(y) - \rho(y) \circ \rho(x) \circ \rho(z).$$

Tomando trazas en esta igualdad vemos que

$$B_M([x, y], z) - B_M(x, [y, z]) = \operatorname{tr}\big(\rho(x) \circ \rho(z) \circ \rho(y)\big) - \operatorname{tr}\big(\rho(y) \circ \rho(x) \circ \rho(z)\big) = 0,$$

otra vez por la simetría de la traza. Esto prueba la invariancia de B_M. □

1.9.2. Si L es un álgebra de Lie, $B : L \times L \to \Bbbk$ es una forma bilineal e I es un subespacio de L, el ***subespacio ortogonal*** a I con respecto a B es el subconjunto

$$I^\perp = \{x \in L : B(x, y) = 0 \text{ para todo } y \in I\},$$

que es, en efecto, un subespacio de L.

1.9.3. Proposición. *Sea L un álgebra de Lie y sea $B : L \times L \to \Bbbk$ una forma bilineal simétrica e invariante. Si I es un ideal de L, entonces también lo es el subespacio $I^\perp$.*

Demostración. Sea I un ideal de L. Si $x \in L$ e $y \in I^\perp$, entonces

$$B([y,x],z) = B(y,[x,z]) = 0$$

para todo $z \in I$, ya que en ese caso $[x,z] \in I$: vemos así que $[y,x] \in I^\perp$ y, por lo tanto, que $[I^\perp, L] \subseteq I^\perp$, esto es, que $I^\perp$ es un ideal. □

1.9.4. Lema. *Sea L un álgebra de Lie de dimensión finita, sea $B_L : L \times L \to \Bbbk$ la forma de Killing de L y sea I un ideal de L. La restricción de la forma B_L a I coincide con la forma de Killing B_I de I.*

Demostración. Sean $n = \dim L$ y $m = \dim I$, y sea $\mathscr{B} = (x_1, \dots, x_n)$ una base ordenada de L tal que $\mathscr{B}' = (x_1, \dots, x_m)$ es una base ordenada de I. Si $x \in I$, entonces precisamente porque I es un ideal la matriz de $\mathrm{ad}_L(x)$ con respecto a la base $\mathscr{B}$ es una matriz triangular superior por bloques, de la forma

$$\|\mathrm{ad}_L(x)\|_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} \|\mathrm{ad}_I(x)\|_{\mathscr{B}'} & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si $y \in I$ es otro elemento de I, se sigue inmediatamente de esto que

$$\|\mathrm{ad}_L(x) \circ \mathrm{ad}_L(y)\|_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} \|\mathrm{ad}_I(x) \circ \mathrm{ad}_I(y)\|_{\mathscr{B}'} & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y, por lo tanto, $B_L(x,y) = B_I(x,y)$. □

§10. Álgebras semisimples

1.10.1. Un álgebra de Lie de dimensión finita es ***semisimple*** si su radical soluble es nulo.

Proposición. *Un álgebra de Lie de dimensión finita es semisimple si y solamente si no posee ideales abelianos no nulos.*

Demostración. Sea L un álgebra de Lie de dimensión finita. Si L posee un ideal abeliano no nulo, éste está contenido en el radical $\mathrm{rad}\, L$ y, por lo tanto, éste último no es nulo: vemos así que la condición es necesaria. Recíprocamente, supongamos que L es no es semisimple y sea $R = \mathrm{rad}\, L$ su radical. Como R es soluble y no nulo, existe $n \in \mathbb{N}_0$ tal que $R^{(n+1)} = 0$ y $R^{(n)} \neq 0$, y entonces el subespacio $R^{(n)}$ de L es un ideal abeliano no nulo. □

1.10.2. Un álgebra de Lie es ***simple*** si no es abeliana y no posee ideales propios no nulos.

Proposición. *Un álgebra de Lie de dimensión finita simple es semisimple.*

Demostración. En efecto, un álgebra de Lie de dimensión finita simple no posee ideales propios no nulos, así que no posee, en particular, ideales propios abelianos no nulos y, como no es abeliana, no es un ideal abeliano de sí misma. □

1.10.3. Proposición. *Sea L un álgebra de Lie y sea M un L-módulo de dimensión finita fiel. Si la forma bilineal $B_M : L \times L \to \Bbbk$ asociada a M es idénticamente nula, entonces L es soluble.*

Demostración. Sea $\rho : L \to \mathfrak{gl}(M)$ la representación de L correspondiente a M. Como M es un L-módulo fiel, el morfismo ρ es inyectivo y por lo tanto L tiene dimensión finita. Probemos la proposición haciendo inducción sobre la dimensión de L, observando que cuando L es nula el resultado es evidente.

Podemos suponer que L es pertfecta: si ese no es el caso, entonces L^2 es una subálgebra propia de L, así que es soluble y, por lo tanto, L misma es soluble, de manera que no hay nada que probar.

Sea H una subálgebra propia de L de dimensión máxima. Como H tiene dimensión menor que la de L, es soluble. El espacio cociente L/H es un H-módulo de manera natural y no es nulo: contiene entonces un H-submódulo simple V. Ahora bien, como H es soluble, este módulo simple tiene dimensión 1, de manera que existe $x_0 \in L$ tal que la clase $x_0 + H$ genera a V como espacio vectorial, y hay una función lineal $\lambda : H \to \Bbbk$ que se anula sobre H^2 tal que $y \cdot v = \lambda(y)v$ para todo $y \in H$ y todo $v \in V$: esto significa que

$$[y, x_0] - \lambda(y)x_0 \in H \text{ para todo } y \in H. \tag{15}$$

El subespacio $\langle x_0 \rangle + H$ es por lo tanto una subálgebra de L y, como contiene a H propiamente y H fue elegida de dimensión maximal entre las subálgebras propias de L, tiene que coincidir con L. Así, tenemos que $L = \langle x_0 \rangle \oplus H$. Observemos que la función λ no es identicamente nula: si lo fuera, podríamos deducir de (15) que $L^2 \subseteq H$, contradiciendo nuestra hipótesis de que L es perfecta.

Sea W un L-módulo de dimensión finita simple. Como no es nulo, contiene un H-submódulo simple W_0 y éste tiene dimensión 1 porque H es soluble: sea $w_0 \in W_0 \setminus 0$ y sea $\mu : H \to \Bbbk$ la función lineal tal que

$$y \cdot w_0 = \mu(y)w_0$$

para todo $y \in H$.

Para cada $i \geq 0$ pongamos $w_{i+1} = x_0 \cdot w_i$ y escribamos $W_{-1} = 0$ y W_i al subespacio $\langle w_0, \ldots, w_i \rangle$ de W. Afirmamos que para cada $i \in \mathbb{N}_0$ el subespacio W_i es, de hecho, un H-submódulo de W. Sabemos que esto es cierto si $i = 0$, y si suponemos que W_i es un H-submódulo de W, entonces para cada $y \in H$ se tiene que

$$\begin{aligned} y \cdot w_{i+1} &= y \cdot x_0 \cdot w_i = x_0 \cdot y \cdot w_i + [y, x_0] \cdot w_i \\ &= x_0 \cdot (y \cdot w_i + \lambda(y)w_i) + ([y, x_0] - \lambda(y)x_0) \cdot w_i \\ &\in x_0 \cdot W_i + H \cdot W_i \subseteq W_{i+1}, \end{aligned}$$

de manera que W_{i+1} es un H-submódulo de W. Nuestra afirmación se sigue así inductivamente.

Sea q el mayor elemento de $\mathbb{N}_0$ tal que los vectores $w_0, \ldots, w_q$ son linealmente independientes; observemos que existe un tal mayor elemento porque W tiene dimensión finita y $w_0 \neq 0$. La elección de q implica que $x_0 \cdot W_q \subseteq W_q$ y sabemos que $H \cdot W_q \subseteq W_q$, así que W_q es un L-submódulo de W: como W es simple, tiene que ser $W = W_q$ y $\mathscr{B} = (w_0, \dots, w_q)$ es una base ordenada de W. Mostremos que para cada $i \in \{0, \dots, q\}$ y cada $y \in H$ se tiene que

$$y \cdot w_i \equiv (\mu(y) + i\lambda(y))w_i \mod W_{i-1}. \tag{16}$$

Esto es cierto cuando $i = 0$ precisamente por la elección de la función μ. Si suponemos que vale cuando i es igual a $j \in \{0, \dots, q-1\}$, entonces $u = y \cdot w_j - (\mu(y) + j\lambda(y))w_j$ es un elemento de W_{j-1} y

$$\begin{aligned} y \cdot w_{j+1} &= y \cdot x_0 \cdot w_j \\ &= x_0 \cdot y \cdot w_j + [y, x_0] \cdot w_j \\ &= (\mu(y) + j\lambda(y))\, x_0 \cdot w_j + x_0 \cdot u + \lambda(y) x_0 \cdot w_j + ([y, x_0] - \lambda(y)x_0) \cdot w_j \\ &\equiv (\mu(y) + (j+1)\lambda(y))w_{j+1} \mod W_j, \end{aligned}$$

así que en ese caso la congruencia que queremos también vale cuando i es $j+1$.

De (16) deducimos inmediatamente que para todo $y \in H$ se tiene que

$$\operatorname{tr} y_W = \sum_{i=0}^{q} (\mu(y) + i\lambda(y)) = (q+1)\mu(y) + \tfrac{1}{2}q(q+1)\lambda(y).$$

Como L es perfecta, para todo $y \in H$ sabemos que $\operatorname{tr} y_M = 0$, y entonces la fórmula que acabamos de obtener para esta traza nos dice que

$$\mu(y) = -\tfrac{1}{2}q\lambda(y).$$

Usando esto en (16), concluimos que para todo $y \in H$ es

$$y \cdot w_i \equiv (i - \tfrac{1}{2}q)\lambda(y))w_i \mod W_{i-1},$$

y de esto, a su vez, que

$$\operatorname{tr}(y_W \circ y_W) = \sum_{i=0}^{q} (i - \tfrac{1}{2}q)^2 \lambda(y)^2.$$

Sea ahora $0 = M_0 \subseteq M_1 \subseteq \cdots \subseteq M_\ell = M$ una serie de composición para el L-módulo M y para cada $j \in \{1, \dots, \ell\}$ sea $q_j = \dim M_j/M_{j-1} - 1$. Si $y \in H$, entonces

$$B_M(y, y) = \operatorname{tr}(y_M \circ y_M) = \sum_{j=1}^{\ell} \operatorname{tr}(y_{M_j/M_{j-1}} \circ y_{M_j/M_{j-1}}) = \sum_{j=1}^{\ell} \sum_{i=0}^{q_j} (i - \tfrac{1}{2}q_j)^2 \lambda(y)^2.$$

Como estamos suponiendo que B_M es idénticamente nula y sabemos que existe $y \in H$ tal que $\lambda(y) \neq 0$, esto nos dice que

$$\sum_{j=1}^{\ell} \sum_{i=0}^{q_j} (i - \tfrac{1}{2}q_j)^2 = 0$$

y, por lo tanto, que $q_j = 0$ para cada $j \in \{1, \dots, \ell\}$, es decir, que cada uno de los L-módulos simples M_j/M_{j-1} tiene dimensión 1. Vemos así que la subálgebra $\rho(L)$ de $\mathfrak{gl}(M)$ preserva la bandera completa de subespacios de M dada por $\mathcal{F} = (M_i)_{i=0}^{\ell}$: está contenida, por lo tanto, en el álgebra $\mathfrak{t}(\mathcal{F})$ y es, en consecuencia, soluble. Como el álgebra $\rho(L)$ es isomorfa a L, ya que el L-módulo M es fiel, esto prueba que L es soluble. La proposición queda así demostrada. □

1.10.4. Una consecuencia inmediata de la Proposición 1.10.3 es el siguiente criterio:

Proposición. *Un álgebra de Lie de dimensión finita cuya forma de Killing es nula es soluble.*

Demostración. Sea $\mathsf{ad} : L \to \mathfrak{gl}(L)$ la representación adjunta y sea $\mathsf{ad}(L)$ su imagen. Si vemos a L como un módulo sobre $\mathsf{ad}(L)$, entonces es fiel y la correspondiente forma bilineal $B_L : \mathsf{ad}(L) \times \mathsf{ad}(L) \to \Bbbk$ se anula idénticamente, porque la forma de Killing de L lo hace. La Proposición 1.10.3 nos permite entonces concluir que $\mathsf{ad}(L)$ es un álgebra soluble. Como hay una extensión central de álgebras de Lie

$$0 \longrightarrow \mathfrak{z}(L) \longrightarrow L \longrightarrow \mathsf{ad}(L) \longrightarrow 0$$

y $\mathfrak{z}(L)$ y $\mathsf{ad}(L)$ son solubles, la Proposición 1.3.5*(ii)* nos dice que el álgebra L es soluble, como queremos. □

1.10.5. Proposición. *Un álgebra de Lie de dimensión finita es semisimple si y solamente si su forma de Killing es no degenerada.*

Demostración. Sea L un álgebra de Lie y sea $B_L : L \times L \to \Bbbk$ su forma de Killing. Supongamos primero que B_L es degenerada, de manera que el subespacio $L^\perp$, que es un ideal de L, es no nulo. Como la forma de Killing $B_{L^\perp}$ de $L^\perp$ es la restricción de B_L a $L^\perp$, es claro que $B_{L^\perp}$ es idénticamente nula. De acuerdo a la Proposición 1.10.4, entonces, $L^\perp$ es soluble y, por lo tanto, el radical soluble de L es no nulo: así, L no es semisimple.

Supongamos ahora que L no es semisimple, de manera que, de acuerdo a la Proposición 1.10.1, existe un ideal no nulo y abeliano I en L. Sean $n = \dim L$, $m = \dim I$ y $\mathscr{B} = (x_1, \dots, x_n)$ una base ordenada de L tal que $(x_1, \dots, x_m)$ es una base ordenada de I. Si $x \in I$ e $y \in L$, entonces las matrices de $\mathsf{ad}_L(x)$ y de $\mathsf{ad}_L(y)$ con respecto a la base $\mathscr{B}$ son de la forma

$$\|\mathsf{ad}_L(x)\|_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 0 & A \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \|\mathsf{ad}_L(y)\|_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ 0 & B_3 \end{pmatrix},$$

con $B_1 \in M_m(\Bbbk)$, A, $B_2 \in M_{m,n-m}(\Bbbk)$ y $B_3 \in M_{n-m}(\Bbbk)$, y se sigue de esto que

$$B_L(x, y) = \operatorname{tr} \mathsf{ad}_L(x) \circ \mathsf{ad}_L(y) = \operatorname{tr} \begin{pmatrix} 0 & AB_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Vemos así que $I \subseteq L^\perp$ y que, por lo tanto, la forma B_L es degenerada. □

1.10.6. Proposición. *Sea L un álgebra de Lie semisimple de dimensión finita. Si I es un ideal de L e $I^\perp$ es el ideal de L ortogonal a I con respecto a la forma de Killing de L, entonces $L = I \oplus I^\perp$ y todo ideal de I o de $I^\perp$ es un ideal de L. En particular, todo ideal de L es semisimple.*

Demostración. Sea $B_L : L \times L \to \Bbbk$ la forma de Killing de L y sea I un ideal de L. Sea $(x_1, \ldots, x_n)$ una base ordenada de I y para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ consideremos la función $\phi_i : y \in L \mapsto B_L(x_i, y) \in \Bbbk$. Las n funciones $\phi_1, \ldots, \phi_n$ que así obtenemos son linealmente independientes: en efecto, si $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \Bbbk$ son tales que $\sum_{i=1}^n \lambda_i \phi_i = 0$, entonces para todo $y \in L$ se tiene que

$$B_L(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i, y) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \phi_i(y) = 0$$

y, como B_L es no degenerada, debe ser $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = 0$, de manera que $\lambda_i = 0$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Como $I^\perp = \bigcap_{i=1}^n \ker \phi_i$, esta independencia lineal implica que $\dim I^\perp = \dim L - \dim I$, esto es, que $\dim I + \dim I^\perp = \dim L$. Por otro lado, la intersección $I \cap I^\perp$ es un ideal de L, así que su forma de Killing $B_{I \cap I^\perp}$ es la restricción de la de L a $I \cap I^\perp$: es claro que entonces $B_{I \cap I^\perp}$ es idénticamente nula y, de acuerdo a la Proposición 1.10.4, que $I \cap I^\perp$ es un ideal soluble de L. Como L es semisimple, vemos así que $I \cap I^\perp = 0$ y podemos concluir que, de hecho, $L = I \oplus I^\perp$.

Para probar la segunda afirmación del enunciado, sea J un ideal de I: como $L = I + I^\perp$, es $[L, J] = [I, J] + [I^\perp, J]$. Como $J \subseteq I$, el segundo sumando se anula, y el primero está contenido en J porque J es un ideal de I. Esto muestra que J es un ideal de L, como queremos. El caso en el que J es un ideal de $I^\perp$ se prueba de la misma forma. □

1.10.7. Proposición. *Un álgebra de Lie de dimensión finita es semisimple si y solamente si es suma directa de ideales simples no abelianos.*

Demostración. Sea L un álgebra de Lie de dimensión finita y sea $B_L : L \times L \to \Bbbk$ la forma de Killing de L. Basta considerar el caso en que L no es nula.

Supongamos primero que L es semisimple. Si L es simple, entonces no es abeliana y, por supuesto, es suma directa de ideales simples no abelianos, así que podemos suponer que no lo es: existe entonces un ideal I de L no nulo y propio de dimensión mínima.

El ideal I es simple: la Proposición 1.10.6 nos dice que todo ideal de I es un ideal de L, así que esto es consecuencia de la minimalidad con la que elegimos a I. Por otro lado, el ideal $I^\perp$ es semisimple: esa misma proposición nos dice que el radical de $I^\perp$ es un ideal soluble de R, así que es nulo. Como $I^\perp$ tiene dimensión estrictamente menor que la de L, podemos suponer inductivamente que $I^\perp$ es suma directa de ideales simples no abelianos, esto es, que existen ideales simples no abelianos $I_1, \ldots, I_m$ en $I^\perp$ tales que $I^\perp = I_1 \oplus \cdots \oplus I_m$. Otra vez, la Proposición 1.10.6 nos dice que $I_1, \ldots, I_m$ son ideales de L y, como claramente $L = I \oplus I_1 \oplus \cdots \oplus I_m$, vemos que L es suma directa de ideales simples no abelianos, como queremos. Esto prueba que la condición del enunciado es necesaria.

Veamos ahora que es suficiente. Supongamos para ello hay en L ideales simples no abelianos $I_1, \ldots, I_r$ tales que $L = I_1 \oplus \cdots \oplus I_r$ y mostremos que la forma de Killing $B_L : L \times L \to \Bbbk$ es no degenerada: la conclusión deseada seguirá entonces de la Proposición 1.10.5. Sea x un elemento no nulo de L y sean $x_1, \dots, x_r$ elementos de $I_1, \dots, I_r$, respectivamente, tales que $x = x_1 + \cdots + x_r$. Como x no es nulo, existe $i \in \{1, \dots, r\}$ tal que $x_i \neq 0$. La forma de Killing de I_i es la restricción de la de L a I y es no degenerada, porque, de acuerdo a la Proposición 1.10.2, I_i es un álgebra de Lie semisimple. Existe entonces $y \in I_i$ tal que $B_L(x_i, y) = 0$.

Sea $j \in \{1, \dots, r\} \setminus \{i\}$. Para cada $u \in L$, se tiene que $[y, u] \in I_i$ así que

$$[x_j, [y, u]] \in [I_j, I_i] \subseteq I_j \cap I_i = 0.$$

Esto muestra que $\mathsf{ad}_L(x_j) \circ \mathsf{ad}_L(y) = 0$ y, en consecuencia, que $B_L(x_j, y) = 0$. Usando esto, vemos que

$$B_L(x, y) = \sum_{k=1}^{n} B_L(x_k, y) = B_L(x_i, y) \neq 0$$

y, como queríamos, que la forma de Killing B_L es no degenerada. □

1.10.8. Proposición. *Un álgebra de Lie semisimple de dimensión finita es perfecta.*

Demostración. Sea L un álgebra de Lie semisimple de dimensión finita y sea $B_L : L \times L \to \Bbbk$ su forma de Killing; bastará que consideremos el caso en que L no es nula, ya que si lo es la afirmación es trivial. Supongamos que L no es perfecta, de manera que el ideal L^2 es propio. Según la Proposición 1.10.6, tenemos una descomposición $L = L^2 \oplus (L^2)^\perp$ de L como suma directa de ideales y como L^2 es un ideal propio, $(L^2)^\perp$ es un ideal propio y no nulo. Es además abeliano: $[(L^2)^\perp, (L^2)^\perp]$ está contenido en $(L^2)^\perp$, porque éste es un ideal y, al mismo tiempo, en L^2. Esto es absurdo, en vista de la Proposición 1.10.1. □

§11. Álgebras de dimensiones pequeñas

Damos la clasificación a menos de isomorfismo de las álgebras de Lie de dimensión a lo sumo 3.

1.11.1. Proposición. *Si L es un álgebra de Lie de dimensión 2, entonces posee una base (x, y) tal que está en alguno de los siguientes casos:*

L	$[x, y]$	$\dim L^2$	
$\mathfrak{a}_2$	0	0	*abeliana*
$\mathfrak{aff}_2$	x	1	*soluble no nilpotente*

Demostración. Sea L un álgebra de dimensión 2. Si es abeliana, claramente es $L \cong \mathfrak{a}_2$. Supongamos que no lo es, de manera que existe $x \in L^2 \setminus 0$ y podemos elegir $y \in L$ tal que (x, y) es una base de L. Como $\dim L = 2$, la subálgebra derivada L^2 está generada como espacio vectorial por $[x, y]$, y entonces existe $\alpha \in \Bbbk \setminus 0$ tal que $[x, y] = \alpha x$. Si ponemos $y' = \frac{1}{\alpha} y$, entonces (x, y') es una base de L y $[x, y'] = x$. Esto muestra que L es isomorfa al álgebra $\mathfrak{aff}_2$ descripta en el enunciado. □

1.11.2. Proposición. *Si L es un álgebra de Lie de dimensión 3 que no es semisimple, entonces posee una base (x, y, z) tal que está en alguno de los siguientes casos:*

L	$[x,y]$	$[x,z]$	$[y,z]$	$\dim L^2$	
$\mathfrak{a}_3$	0	0	0	0	*abeliana*
$\mathfrak{heis}$	z	0	0	1	*nilpotente no abeliana*
$\mathfrak{aff}_2 \times \Bbbk$	0	z	0	1	*soluble no nilpotente*
$\mathfrak{L}(\mu), \mu \neq 0$	y	μz	0	2	*soluble no nilpotente*
$\mathfrak{L}$	y	$y+z$	0	2	*soluble no nilpotente*

Demostración. Sea L un álgebra de Lie de dimensión 3 y, para empezar, supongamos que L no es semisimple. Su radical $\operatorname{rad} L$ es entonces un ideal no nulo y soluble y el cociente $L/\operatorname{rad} L$ es un álgebra de Lie de dimensión a lo sumo 2, así que también es soluble: vemos así que L es necesariamente soluble. En particular, el álgebra derivada L^2 es un ideal propio de L y hay tres posibilidades para la dimensión de L^2.

- Si el álgebra derivada L^2 es nula, entonces L es abeliana y L es isomorfa al álgebra $\mathfrak{a}_3$ del enunciado.
- Supongamos que $\dim L^2 = 1$ y sea z un elemento no nulo de L^2.
  - Consideremos primero el caso en el que z es central en L y sean x e y en L tales que (x, y, z) es una base de L. Que z sea central y genere L^2 implica entonces que hay un escalar $\alpha \in \Bbbk$ tal que $[x, y] = \alpha z$ y $[x, z] = [y, z] = 0$. Como $L^2 \neq 0$, debe ser $\alpha \neq 0$ y entonces poniendo $z' = \alpha z$ tenemos una base (x, y, z') tal que $[x, y] = z$ y $[x, z] = [y, z] = 0$. El álgebra L es por lo tanto isomorfa al álgebra $\mathfrak{heis}$.
  - Consideremos ahora el caso en el que z no es central. Como la función $\operatorname{ad}(z) : L \to L$ es no nula, tiene imagen contenida en el subespacio generado por z y contiene a z en su núcleo, existen elementos x e y en L tales que (x, y, z) es una base de L y $[x, z] = z$ e $[y, z] = 0$. Además, como x genera a L^2, existe $\alpha \in \Bbbk$ tal que $[x, y] = \alpha z$. Si ponemos $y' = y - \alpha z$, entonces (x, y', z) es otra base de L y $[x, y'] = 0$, $[x, z] = z$ e $[y, z] = 0$. En este caso L es isomorfa al álgebra $\mathfrak{aff}_2 \times \Bbbk$ del enunciado.
- Supongamos finalmente que $\dim L^2 = 2$. Como L es soluble, sabemos que L^2 es nilpotente y, como tiene dimensión 2, es necesariamente abeliana. Sea $x \in L \setminus L^2$. Considerando la forma normal de Jordan de la función $\operatorname{ad}(x) : L^2 \to L^2$, vemos que existe una base (y, z) de L^2 tal que
  - o bien hay escalares $\alpha, \beta \in \Bbbk$ tales que $[x, y] = \alpha x$, $[x, z] = \beta y$ e $[y, z] = 0$,
  - o bien hay un escalar $\alpha \in \Bbbk$ tal que $[x, y] = \alpha y$, $[x, z] = y + \alpha z$ e $[y, z] = 0$.

  En el primer caso, tiene que ser $\alpha\beta \neq 0$, ya que $\dim L^2 = 2$, y entonces poniendo $y' = \frac{1}{\alpha}$ y $\mu = \beta/\alpha$, que es no nulo, vemos que (x, y', z) es una base de L tal que $[x, y] = y$, $[x, z] = \mu z$ e $[y, z] = 0$. Vemos así que $L \cong \mathfrak{L}(\mu)$. En el segundo caso, por su parte, tiene que ser $\alpha \neq 0$ porque $\dim L^2 = 2$, y si $x = \frac{1}{\alpha} x$ e $y' = \frac{1}{\alpha} y$, entonces (x', y', z) es una base de L tal que $[x', y'] = y'$, $[x', z] = y' + z$ e $[y', z] = 0$. En este caso es $L \cong \mathfrak{L}$.

Esto completa la prueba de la proposición. □

1.11.3. Proposición. *Si L es un álgebra de Lie de dimensión 3 que es semisimple, entonces L posee una base (x, y, z) tal que*

$$[x, y] = -2x, \qquad [x, z] = y, \qquad [y, z] = -2z$$

y es por lo tanto isomorfa a $\mathfrak{sl}_2$.

Demostración. Sea L un álgebra de Lie de dimensión 2 semisimple y sea H una subálgebra de Cartan de L. Como L no es nilpotente, H es una subálgebra propia de L y tiene, por lo tanto, dimensión menor que 3: como no hay álgebras nilpotentes no abelianas de dimensión menor que 3, vemos que H es necesariamente abeliana.

Sea Φ el conjunto de raíces de L, de manera que $L = H \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} L_\alpha$ con $L_\alpha \neq 0$ para cada $\alpha \in \Phi$. Como L es perfecta, tenemos que

$$L = [L, L] = [H, H] + \sum_{\alpha \in \Phi} [H, L_\alpha] + \sum_{\alpha, \beta \in \Phi} [L_\alpha, L_\beta].$$

Es $[H, H] = 0$ y $[H, L_\alpha] \subseteq L_\alpha$ para cada $\alpha \in \Phi$: esto implica que existen $\alpha, \beta \in \Phi$ tales que el subespacio $[L_\alpha, L_\beta]$ es no nulo y está contenido en H. Esto sólo es posible si $\beta = -\alpha$. Como cada uno de los subespacios H, L_α, $L_{-\alpha}$ tienen dimensión positiva y $\dim L = 3$, vemos así que, de hecho,

$$L = H \oplus L_\alpha \oplus L_{-\alpha},$$

que cada uno de los sumandos tiene dimensión 1 y que $H = [L_\alpha, L_{-\alpha}]$. Sean $x \in L_\alpha \setminus 0$ e $y \in L_{-\alpha} \setminus 0$. Como L_α y $L_{-\alpha}$ tienen dimensión 1, el elemento $z = [x, y]$ genera a $[L_\alpha, L_{-\alpha}]$, así que tiene que ser no nulo. Como x es está en L_α y este espacio tiene dimensión 1, debemos tener que $[z, x] = \alpha(z)x$ y, de manera similar, $[z, y] = -\alpha(z)y$. Como α es una raíz de L con respecto a H y H tiene dimensión 1, tiene que ser $\alpha(z) \neq 0$. Si ponemos $u = \sqrt{2/\alpha(z)}$, $x' = ux$, $y' = uy$ y $z' = 2/\alpha(z)z$, entonces (x', y', z') es una base de L y $[x', y'] = -2x'$, $[x', z'] = y'$ e $[y', z'] = -2z'$. □

1.11.4. La clasificación de las álgebras de Lie de dimensión 3 que resulta de las Proposiciones 1.11.2 y 1.11.3 fue hecha originalmente, con métodos bien distintos, por Luigi Bianchi en el artículo [Bia1898], aunque en el caso en el que el cuerpo $\Bbbk$ es el de los números reales.

Capítulo II
Cohomología

§1. Construcción

Construimos la cohomología de un álgebra de Lie.

2.1.1. Fijemos un álgebra de Lie L y un L-módulo M. Para cada $p \geq 0$ escribimos $L^{\times p}$ al producto cartesiano $L \times \cdots \times L$ con p factores y $C^p(L, M)$ al espacio vectorial de todas las funciones $L^{\times p} \to M$ que son p-multilineales y alternantes. Observemos que $L^{\times 0} = \Bbbk$, de acuerdo a las convenciones usuales, y que entonces $C^0(L, M)$ se identifica de manera canónica con M.

2.1.2. Lema. *Sea $p \geq 0$. Hay una acción $L \times C^p(L, M) \to C^p(L, M)$ de L sobre el espacio vectorial $C^p(L, M)$ que hace de éste un L-módulo tal que si $y \in L$ y $f \in C^p(L, M)$ entonces el elemento $y \cdot f$ está dado por*

$$(y \cdot f)(x_1, \dots, x_p) = y \cdot f(x_1, \dots, x_p) - \sum_{i=1}^{p} f(x_1, \dots, [y, x_i], \dots, x_p)$$

para cada elección de $x_1, \dots, x_p \in L$.

Demostración. Para ver que hay una tal acción, tenemos que mostrar que si $y \in L$ y $f \in C^p(L, M)$, entonces la función $y \cdot f : L^{\times p} \to M$ definida en el enunciado es un elemento de $C^p(L, M)$. Es claro de la fórmula que la define que se trata de una función p-multilineal. Por otro lado, si $x_1, \dots, x_p \in L$ y $k \in \{1, \dots, p-1\}$ son tales que $x_k = x_{k+1}$, entonces $f(x_1, \dots, x_p) = 0$ y $f(x_1, \dots, [y, x_i], \dots, y_p) = 0$ siempre que $i \notin \{k, k+1\}$, así que

$$(y \cdot f)(x_1, \dots, x_p) = -f(x_1, \dots, [y, x_k], x_{k+1}, \dots, x_p) - f(x_1, \dots, x_k, [y, x_{k+1}], \dots, x_p)$$

y esto se anula ya que f es anti-simétrica. Vemos así que la función $y \cdot f$ pertenece a $C^p(L, M)$, como queremos.

Ahora bien, si $y, z \in L$, $f \in C^p(L, M)$ y $x_1, \dots, x_p \in L$, tenemos que

$$(y \cdot z \cdot f)(x_1, \dots, x_p)$$

$$
\begin{aligned}
&= y\cdot(z\cdot f)(x_1,\dots,x_p) - \sum_{i=1}^{p}(z\cdot f)(x_1,\dots,[y,x_i],\dots,x_p)\\
&= y\cdot z\cdot f(x_1,\dots,x_p) - \sum_{i=1}^{p} y\cdot f(x_1,\dots,[z,x_i],\dots,x_p)\\
&\quad - \sum_{i=1}^{p} z\cdot f(x_1,\dots,[y,x_i],\dots,x_p) + \sum_{1\le i<j\le p} f(x_1,\dots,[z,x_i],\dots,[y,x_j],\dots,x_p)\\
&\quad + \sum_{1\le i<j\le p} f(x_1,\dots,[y,x_i],\dots,[z,x_j],\dots,x_p) + \sum_{i=1}^{p} f(x_1,\dots,[z,[y,x_i]],\dots,x_p)
\end{aligned}
$$

y entonces, como los términos del segundo al quinto en esta última expresión dependen simétricamente de y y de z y f es multilineal, esto nos dice que

$$
\begin{aligned}
&(y\cdot z\cdot f - z\cdot y\cdot f)(x_1,\dots,x_p)\\
&\quad= y\cdot z\cdot f(x_1,\dots,x_p) - z\cdot y\cdot f(x_1,\dots,x_p)\\
&\qquad\qquad + \sum_{i=1}^{p} f(x_1,\dots,[z,[y,x_i]]-[y,[z,x_i]],\dots,x_p)\\
&\quad= [y,z]\cdot f(x_1,\dots,x_p) - \sum_{i=1}^{p} f(x_1,\dots,[[y,z],x_i],\dots,x_p)\\
&\quad= ([y,z]\cdot f)(x_1,\dots,x_p).
\end{aligned}
$$

Vemos así que $y\cdot z\cdot f - z\cdot y\cdot f = [y,z]\cdot f$ y, en definitiva, que $C^p(L,M)$ es un L-módulo. □

2.1.3. Si $p\ge 1$, $y\in L$ y $f\in C^p(L,M)$, definimos una función $f\llcorner y : L^{\times(p-1)}\to M$ poniendo, para cada $x_1,\dots,x_{p-1}\in L$,

$$(f\llcorner y)(x_1,\dots,x_{p-1}) = f(x_1,\dots,x_{p-1},y).$$

Es claro que $f\llcorner y$ es $(p-1)$-multilineal y alternante, así que se trata de un elemento de $C^{p-1}(L,M)$. Una observación inmediata que usaremos varias veces en lo que sigue es:

> *si $p\ge 1$ y f, $g\in C^p(L,M)$ son tales que para cada $y\in L$ se tiene que $f\llcorner y = g\llcorner y$, entonces $f=g$.*

Por otro lado, esta operación $\llcorner$ interactúa con las estructuras de L-módulos involucradas de la siguiente manera:

Proposición. *Si $p\ge 1$, y, $z\in L$ y $f\in C^p(L,M)$, entonces*

$$y\cdot(f\llcorner z) = (y\cdot f)\llcorner z + f\llcorner[y,z].$$

Demostración. En efecto, si $p\ge 1$, y, $z\in L$ y $f\in C^p(L,M)$, cada vez que $x_1,\dots,x_{p-1}\in L$ se tiene que

$$\big((y\cdot f)\llcorner z\big)(x_1,\dots,x_{p-1}) + \big(f\llcorner[y,z]\big)(x_1,\dots,x_{p-1})$$

$$
\begin{aligned}
&= (y \cdot f)(x_1, \dots, x_{p-1}, z) + f(x_1, \dots, x_{p-1}, [y, z]) \\
&= y \cdot f(x_1, \dots, x_{p-1}, z) - \sum_{i=1}^{p-1} f(x_1, \dots, [y, x_i], \dots, x_{p-1}, z) \\
&= y \cdot (f \llcorner z)(x_1, \dots, x_{p-1}) - \sum_{i=1}^{p-1} (f \llcorner z)(x_1, \dots, [y, x_i], \dots, x_{p-1}) \\
&= \big(y \cdot (f \llcorner z)\big)(x_1, \dots, x_{p-1}),
\end{aligned}
$$

de manera que vale la igualdad que afirma la proposición. □

2.1.4. Proposición. *Para cada $p \geq 0$ hay un morfismo de L-módulos $d^p : C^p(L, M) \to C^{p+1}(L, M)$ tal que cada vez que $x_1, \dots, x_{p+1} \in L$ y $f \in C^p(L, M)$ se tiene que*

$$
\begin{aligned}
(d^p f)(x_1, \dots, x_{p+1}) = \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{i+1} x_i \cdot f(x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_{p+1}) \\
+ \sum_{1 \leq i < j \leq p+1} (-1)^{i+j} f([x_i, x_j], x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_{p+1}).
\end{aligned}
$$

Para cada $p \geq 0$, cada $f \in C^{p+1}(L, M)$ y cada $y \in L$ se tiene que

$$
d^{p+1} f \llcorner y = d^p(f \llcorner y) + (-1)^{p+1} y \cdot f. \tag{1}
$$

Cuando necesitemos explicitar el módulo M del que estamos hablando escribiremos d^p_M en lugar de simplemente d^p.

Demostración. Sea $f \in C^p(L, M)$ y definamos una función $d^p f : L^{\times(p+1)} \to M$ como en el enunciado de la proposición. Es claro que $d^p f$ es una función $(p+1)$-multilineal. Mostraremos que además es alternante, de manera que se trata de un elemento de $C^{p+1}(L, M)$. Hecho esto, habremos probado que tenemos una función $d^p : C^p(L, M) \to C^{p+1}(L, M)$, y que ésta es lineal es consecuencia inmediata de la forma de la fórmula que la define.

Sea entonces $x_1, \dots, x_{p+1} \in L$, sea $k \in \{1, \dots, p\}$, supongamos que $x_k = x_{k+1}$ y mostremos que $(d^p f)(x_1, \dots, x_{p+1}) = 0$: esto es suficiente para concluir que $d^p f$ es alternante. Como f es alternante, tenemos que $f(x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_{p+1}) = 0$ si $1 \leq i < k$ o si $k+1 < i \leq p+1$, ya que dos de los argumentos son iguales, y entonces

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{i+1} x_i \cdot f(x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_{p+1}) \\
&\quad = (-1)^{k+1} x_k \cdot f(x_1, \dots, \hat{x}_k, x_{k+1}, \dots, x_{p+1}) + (-1)^k x_{k+1} \cdot f(x_1, \dots, x_k, \hat{x}_{k+1}, \dots, x_{p+1}) \\
&\quad = 0.
\end{aligned}
$$

De manera similar, es $f([x_i, x_j], x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_{p+1}) = 0$ si $i, j \in \{1, \dots, n\}$ son tales que $i < j$ y $\{i, j\} \cap \{k, k+1\} = \varnothing$, y entonces

$$
\sum_{1 \leq i < j \leq p+1} (-1)^{i+j} f([x_i, x_j], x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_{p+1})
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{j=k+2}^{p+1}(-1)^{k+j} f([x_k, x_j], x_1, \dots, \hat{x}_k, x_{k+1}, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_{p+1}) \\
&\quad + \sum_{j=k+2}^{p+1}(-1)^{k+1+j} f([x_{k+1}, x_j], x_1, \dots, x_k, \hat{x}_{k+1}, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_{p+1}) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{k-1}(-1)^{i+k} f([x_i, x_k], x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, \hat{x}_k, x_{k+1}, \dots, x_{p+1}) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{k-1}(-1)^{i+k+1} f([x_i, x_{k+1}], x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_k, \hat{x}_{k+1}, \dots, x_{p+1}) \\
&\quad + (-1)^{k+k+1} f([x_k, x_{k+1}], x_1, \dots, \hat{x}_k, \dots, \hat{x}_{k+1}, \dots, x_{p+1}).
\end{aligned}
$$

La primera y la segunda de las sumas que aparecen en el lado derecho de esta igualdad se cancelan mutuamente, como lo hacen la tercera y la cuarta, y, finalmente, el último término se anula porque $[x_k, x_{k+1}] = 0$. Vemos así que $(d^p f)(x_1, \dots, x_{p+1}) = 0$, como queríamos.

Sean ahora $p \geq 0$ y $f \in C^{p+1}(L, M)$. Si $y \in L$, entonces para cada $x_1, \dots, x_{p+1} \in L$ se tiene que

$$
\begin{aligned}
\big(d^{p+1} f \llcorner y\big)(x_1, \dots, x_{p+1}) &= d^{p+1} f(x_1, \dots, x_{p+1}, y) \\
&= \sum_{i=1}^{p+1}(-1)^{i+1} x_i \cdot f(x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_{p+1}, y) + (-1)^p y \cdot f(x_1, \dots, x_{p+1}) \\
&\qquad + \sum_{1 \leq i < j \leq p+1}(-1)^{i+j} f([x_i, x_j], x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_{p+1}, y) \\
&\qquad\qquad + \sum_{i=1}^{p+1}(-1)^{i+p} f([x_i, y], x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_{p+1}) \\
&= \sum_{i=1}^{p+1}(-1)^{i+1} x_i \cdot (f \llcorner y)(x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_{p+1}) + (-1)^p y \cdot f(x_1, \dots, x_{p+1}) \\
&\qquad + \sum_{1 \leq i < j \leq p+1}(-1)^{i+j} (f \llcorner y)([x_i, x_j], x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_{p+1}) \\
&\qquad\qquad + \sum_{i=1}^{p+1}(-1)^{i+p} f([x_i, y], x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_{p+1}) \\
&= d^p (f \llcorner y)(x_1, \dots, x_{p+1}) + (-1)^p (y \cdot f)(x_1, \dots, x_{p+1}).
\end{aligned}
$$

Esto prueba la igualdad (1) del enunciado.

Para terminar la prueba de la proposición tenemos que mostrar que para cada $p \geq 0$ la función lineal d^p es un morfismo de L-módulos, y lo haremos por inducción en p. Consideramos primero el caso en que $p = 0$: podemos calcular que para cada $y \in L$ y cada $f \in C^0(L, M)$ se tiene que para cada $x_1 \in L$ es

$$
(y \cdot d^0 f)(x_1) = y \cdot d^0 f(x_1) - d^0 f([y, x_1]) = y \cdot x_1 \cdot f - [y, x_1] \cdot f = x_1 \cdot y \cdot f = d^0 (y \cdot f)(x_1),
$$

y esto nos dice, precisamente, que d^0 es un morfismo de L módulos.

Supongamos ahora que $p \geq 0$ y que sabemos que d^p es un morfismo de L-módulos. Para mostrar que d^{p+1} es también un morfismo de L-módulos, es suficiente que fijemos $f \in C^{p+1}(L, M)$,

$y, z \in L$ y que mostremos que

$$d^{p+1}(y \cdot f) \llcorner z = (y \cdot d^{p+1} f) \llcorner z.$$

Para esto calculamos, usando repetidas veces la Proposición 2.1.3 y la igualdad (1) que ya probamos, que

$$\begin{aligned}(y \cdot d^{p+1} f) \llcorner z &= y \cdot (d^{p+1} f \llcorner z) - d^{p+1} f \llcorner [y, z] \\ &= y \cdot d^{p}(f \llcorner z) + (-1)^{p+1} y \cdot z \cdot f - d^{p+1} f \llcorner [y, z]\end{aligned}$$

que, gracias a la hipótesis inductiva, es

$$\begin{aligned}&= d^{p}(y \cdot (f \llcorner z)) + (-1)^{p+1} y \cdot z \cdot f - d^{p+1} f \llcorner [y, z] \\ &= d^{p}((y \cdot f) \llcorner z) + d^{p}(f \llcorner [y, z]) + (-1)^{p+1} y \cdot z \cdot f - d^{p+1} f \llcorner [y, z] \\ &= d^{p}(y \cdot f) \llcorner z - (-1)^{p+1} z \cdot y \cdot f + d^{p}(f \llcorner [y, z]) + (-1)^{p+1} y \cdot z \cdot f - d^{p+1} f \llcorner [y, z] \\ &= d^{p}(y \cdot f) \llcorner z.\end{aligned}$$

La proposición queda así probada. □

2.1.5. Explicitemos las fórmulas para las funciones d^p cuando p es pequeño:

- Como dijimos en la prueba de la proposición, si $p = 0$ y $f \in C^0(L, M)$, entonces para cada $x_1 \in L$ se tiene que

  $$d^0 f(x_1) = x_1 \cdot f.$$

- Si $p = 1$, $f \in C^1(L, M)$ y $x_1, x_2 \in L$, entonces

  $$d^1 f(x_1, x_2) = x_1 \cdot f(x_2) - x_2 \cdot f(x_1) - f([x_1, x_2]).$$

- Si $p = 2$, $f \in C^2(L, M)$ y x_1, x_2, x_3iL, entonces

  $$\begin{aligned}d^2 f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \cdot f(x_2, x_3) - x_2 \cdot f(x_1, x_3) + x_3 \cdot f(x_1, x_2) \\ - f([x_1, x_2], x_3) + f([x_1, x_3], x_2) - f([x_2, x_3], x_1).\end{aligned}$$

2.1.6. La propiedad más importante de las funciones d^p que acabamos de construir es la siguiente:

Proposición. *Si $p \geq 0$, entonces $d^{p+1} \circ d^p = 0$.*

Demostración. Para ver esto es suficiente mostrar que cada vez que $p \geq 0$, $f \in C^p(L, M)$ e $y \in L$ se tiene que $d^{p+1} d^p f \llcorner y = 0$. Ahora bien, si $p \geq 1$, usando en las dos primeras igualdades la igualdad (1) de la Proposicion 2.1.4 y en la tercera el hecho de que d^p es un morfismo de L-módulos vemos que

$$\begin{aligned}d^{p+1} d^p f \llcorner y &= d^p(d^p f \llcorner y) + (-1)^{p+1} y \cdot d^p f \\ &= d^p d^{p-1}(f \llcorner y) + (-1)^p d^p(y \cdot f) + (-1)^{p+1} y \cdot d^p f\end{aligned}$$

$$= d^p d^{p-1}(f \llcorner y)$$

y esto implica, gracias una inducción evidente, que alcanza con que probemos que $d^1 d^0 f = 0$ para todo elemento f de $C^0(L, M)$, es decir, de M. Esto puede verse vía un cálculo directo: para cada $f \in C^0(L, M)$ y cada $x_1, x_2 \in L$ se tiene que

$$\begin{aligned} d^1 d^0 f(x_1, x_2) &= x_1 \cdot d^0 f(x_2) - x_2 \cdot d^0 f(x_1) - d^0 f([x_1, x_2]) \\ &= x_1 \cdot x_2 \cdot f - x_2 \cdot x_1 \cdot f - [x_1, x_2] \cdot f \\ &= 0. \end{aligned}$$

Esto completa la prueba de la proposición. □

2.1.7. Lo que llevamos hecho en esta sección nos dice que si L es un álgebra de Lie y M es un L-módulo, tenemos un diagrama de espacios vectoriales y funciones lineales

$$C^0(L, M) \xrightarrow{d^0} C^1(L, M) \xrightarrow{d^1} C^2(L, M) \xrightarrow{d^2} C^3(L, M) \xrightarrow{d^3} \cdots$$

tal que para todo $p \geq 0$ se tiene que $d^{p+1} \circ d^p = 0$. Lo llamamos el ***complejo de Chevalley–Eilenberg*** de L con valores en el L-módulo M. Por comodidad, ponemos $C^p(L, M) = 0$ y definimos $d^p = 0 : C^p(L, M) \to C^{p+1}(L, M)$ siempre que $p < 0$.

Si $p \in \mathbb{Z}$, consideramos los subespacios

$$Z^p(L, M) = \ker\big(d^p : C^p(L, M) \to C^{p+1}(L, M)\big)$$

y

$$B^p(L, M) = \operatorname{im}\big(d^{p-1} : C^{p-1}(L, M) \to C^p(L, M)\big),$$

cuyos elementos son los ***p-cociclos*** y ***p-cobordes***, respectivamente, de $C^p(L, M)$. De acuerdo a la Proposición 2.1.6, es $d^p \circ d^{p-1} = 0$ y, en consecuencia, se tiene que que $B^p(L, M) \subseteq Z^p(L, M)$. Podemos entonces considerar el espacio vectorial cociente

$$H^p(L, M) = \frac{Z^p(L, M)}{B^p(L, M)},$$

al que llamamos el ***p-ésimo espacio de cohomología de L con valores en M***. Cuando dos p-cociclos son congruentes módulo $B^p(L, M)$, de manera que representan la misma clase en $H^p(L, M)$, decimos que son ***cohomólogos***. Observemos que como $B^0(L, M) = 0$, se tiene que

$$H^0(L, M) = Z^0(L, M).$$

2.1.8. Vimos que para cada $p \geq 0$ el espacio vectorial $C^p(L, M)$ posee una estructura de L-módulo y que la función $d^p : C^p(L, M) \to C^{p+1}(L, M)$ es un morfismo de L-módulos. Se sigue de esto, por supuesto, que $Z^p(L, M)$ y $B^p(L, M)$ son L-submódulos de $C^p(L, M)$ y que el cociente $H^p(L, M) = Z^p(L, M)/B^p(L, M)$ tiene una estructura inducida de L-módulo. No hacemos referencia a esta estructura y llamamos a $H^p(L,M)$ el *espacio* de cohomología y no el L-*módulo* de cohomología porque esta estructura de L-módulo siempre es trivial.

En efecto, si $p \geq 1$ y $f \in Z^p(L,M)$ es un p-cociclo e $y \in L$, entonces la igualdad (1) de la Proposición 2.1.4 nos dice que

$$y \cdot f = (-1)^{p+1} d^{p-1}(f \llcorner y) + (-1)^p d^p f \llcorner y = (-1)^p d^{p-1}(f \llcorner y) \in B^p(L,M),$$

ya que $d^{p+1} f = 0$, y entonces en el cociente $H^p(L,M)$ tenemos que $y \cdot (f + B^p(L,M)) = B^p(L,M)$, que es, por supuesto, el elemento nulo de $H^p(L,M)$. Por otro lado, si $p = 0$, $f \in Z^0(L,M)$ e $y \in L$, tenemos que $y \cdot f = d^0 f(y) = 0$, así que la acción de L sobre $H^0(L,M) = Z^0(L,M)$ es también trivial.

§2. Functorialidad y la sucesión exacta larga

Probamos las dos propiedades más básicas de la cohomología de las álgebras de Lie: su functorialidad y la existencia de morfismos de conexión.

2.2.1. Proposición. *Sea L un álgebra de Lie, sea $\phi : M \to M'$ un morfismo de L-módulos y sea $p \geq 0$.*

(*i*) *Si $f : L^{\times p} \to M$ es un elemento de $C^p(L,M)$, entonces la composición $\phi \circ f : L^{\times p} \to M'$ es un elemento de $C^p(L,M')$.*

(*ii*) *La función $\phi_*^p : f \in C^p(L,M) \mapsto \phi \circ f \in C^p(L,M')$ es un morfismo de L-módulos.*

Demostración. La verificación de la primera parte y de que la función ϕ_*^p de la segunda es lineal es inmediata. Mostremos que esta función es un morfismo de L-módulos. Sea $y \in L$ y sea $f \in C^p(L,M)$. Cada vez que $x_1, \ldots, x_p \in L$ se tiene que

$$\begin{aligned}\phi_*^p(y \cdot f)(x_1, \ldots, x_p) &= \phi((y \cdot f)(x_1, \ldots, x_p)) \\ &= \phi\left(y \cdot f(x_1, \ldots, x_p) - \sum_{i=1}^p f(x_1, \ldots, [y, x_i], \ldots, x_p)\right)\end{aligned}$$

y, como ϕ es un morfismo de L-módulos, esto es

$$\begin{aligned}&= y \cdot \phi(f(x_1, \ldots, x_p)) - \sum_{i=1}^p \phi(f(x_1, \ldots, [y, x_i], \ldots, x_p)) \\ &= y \cdot \phi_*^p(f)(x_1, \ldots, x_p) - \sum_{i=1}^p (\phi_*^p f)(x_1, \ldots, [y, x_i], \ldots, x_p) \\ &= (y \cdot \phi_*^p(f))(x_1, \ldots, x_p),\end{aligned}$$

de manera que, de hecho, $\phi_*^p(y \cdot f) = y \cdot \phi_*^p(f)$. Esto prueba lo que queremos. $\square$

2.2.2. Proposición. *Sea L un álgebra de Lie, sea $\phi : M \to M'$ un morfismo de L-módulos.*

(i) *Para todo $p \geq 0$ conmuta el diagrama*

$$\begin{tikzcd} C^p(L,M) \arrow[r, "d^p_M"] \arrow[d, "\phi^p_*"'] & C^{p+1}(L,M) \arrow[d, "\phi^{p+1}_*"] \\ C^p(L,M') \arrow[r, "d^p_{M'}"] & C^{p+1}(L,M') \end{tikzcd}$$

y, en particular se tiene que $\phi^p_*(Z^p(L,M)) \subseteq Z^p(L,M')$ y que $\phi^p_*(B^p(L,M)) \subseteq B^p(L,M')$.

(ii) *Para cada $p \geq 0$ hay una función lineal $H^p(\phi) : H^p(L,M) \to H^p(L,M')$ tal que*

$$H^p(\phi)(c + B^p(L,M)) = \phi^p_*(c) + B^p(L,M')$$

para cada p-cociclo $c \in Z^p(L,M)$.

Demostración. La segunda parte de la proposición es consecuencia inmediata de la primera y de la propiedad universal del cociente de espacios universales, así que nos ocuparemos simplemente de probar (i). Si $p \geq 0$, $f \in C^{p+1}(L,M)$ e $y \in L$ y suponemos que $\phi^{p+1} \circ d^p_M = d^p_{M'} \circ \phi^p_*$, entonces tenemos que

$$\begin{aligned} \phi^{p+2}_*(d^{p+1}_M f) \llcorner y &= \phi^{p+1}_*(d^{p+1}_M f \llcorner y) \\ &= \phi^{p+1}_*(d^p_M(f \llcorner y)) + (-1)^{p+1}\phi^{p+1}_*(y \cdot f) \\ &= d^p_{M'}(\phi^p_*(f \llcorner y)) + (-1)^{p+1} y \cdot \phi^{p+1}_*(f) \\ &= d^p_{M'}(\phi^{p+1}_*(f) \llcorner y) + (-1)^{p+1} y \cdot \phi^{p+1}_*(f) \\ &= d^{p+1}_{M'}(\phi^{p+1}_*(f)) \llcorner y, \end{aligned}$$

de manera que $\phi^{p+2} \circ d^{p+1}_M = d^{p+1}_{M'} \circ \phi^{p+1}_*$. Esto nos dice que basta probar la conmutatividad del diagrama del enunciado cuando $p = 0$, ya que la afirmación general sigue de ello por inducción.

Sea entonces $f \in C^0(L,M)$ y sea $x_1 \in L$. Tenemos que

$$\phi^1_*(d^0_M f)(x_1)) = \phi(d^0_M f(x_1)) = \phi(x_1 \cdot f) = x_1 \cdot \phi(f) = x_1 \cdot \phi^0_*(f) = d^0_{M'}(\phi^0_*(f))(x_1)$$

y, por lo tanto, que $\phi^1_* \circ d^0_M = d^0_{M'} \circ \phi^0_*$, como queremos. □

2.2.3. Proposición. *Sea $p \geq 0$ y sea L un álgebra de Lie.*

(i) *Si M es un L-módulo e $\mathsf{id}_M : M \to M$ es el morfismo identidad de M, entonces*

$$H^p(\mathsf{id}_M) : H^p(L,M) \to H^p(L,M)$$

es la función identidad de $H^p(L,M)$.

(ii) *Si $\phi : M \to M'$ y $\psi : M' \to M''$ son morfismos de L-módulos, entonces*

$$H^p(\psi \circ \phi) = H^p(\psi) \circ H^p(\phi).$$

Demostración. (*i*) Como $H^p(\mathrm{id}_M) : H^p(L, M) \to H^p(L, M)$ es el morfismo inducido en los cocientes que definen a la cohomología por $(\mathrm{id}_M)^p_* : C^p(L, M) \to C^p(L, M)$, para ver que el primero es la identidad de $H^p(L, M)$ es claramente suficiente con mostrar que el segundo es la identidad de $C^p(L, M)$, y esto es consecuencia inmediata de su definición.

(*ii*) De manera similar, en la situación de la segunda parte, el morfismo $H^p(\psi \circ \phi)$ es el inducido por $(\psi \circ \phi)^p_*$, mientras que $H^p(\psi) \circ H^p(\phi)$ es la composición del morfismo inducido por ψ^p_* con el inducido por ϕ^p_*. Esta última composición coincide con el morfismo inducido en la cohomología por la composición $\psi^p_* \circ \phi^p_*$, y entonces para probar lo que queremos es suficiente con verificar que, de hecho, se tiene que $\psi^p_* \circ \phi^p_* = (\psi \circ \phi)^p_*$, lo que es inmediato. □

2.2.4. Proposición. *Sea L un álgebra de Lie. Existe una forma de asignar a cada sucesión exacta corta* $\mathscr{E}$

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{\phi} M \xrightarrow{\psi} M'' \longrightarrow 0$$

de L-módulos y cada $p \geq 0$ una función lineal

$$\partial^p_{\mathscr{E}} : H^p(L, M'') \to H^{p+1}(L, M')$$

de manera tal que se cumplen las siguientes dos condiciones:

(*i*) *Si*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\alpha"] & M \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\beta"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & N' \arrow[r, "\zeta"] & N \arrow[r, "\xi"] & N'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \tag{2}$$

es un diagrama conmutativo de L-módulos con filas $\mathscr{E}$ y $\mathscr{E}'$ exactas, entonces el diagrama

$$\begin{tikzcd} H^p(L, M'') \arrow[r, "\partial^p_{\mathscr{E}}"] \arrow[d, "H^p(\gamma)"'] & H^{p+1}(L, M') \arrow[d, "H^{p+1}(\alpha)"] \\ H^p(L, N'') \arrow[r, "\partial^p_{\mathscr{E}'}"] & H^{p+1}(L, N') \end{tikzcd} \tag{3}$$

conmuta.

(*ii*) *Si $\mathscr{E}$ es una sucesión exacta corta*

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{\phi} M \xrightarrow{\psi} M'' \longrightarrow 0$$

de L-módulos, entonces la sucesión de espacios vectoriales y funciones lineales

$$H^p(L, M') \xrightarrow{H^p(\phi)} H^p(L, M) \xrightarrow{H^p(\psi)} H^p(L, M'') \xrightarrow{\partial^p_{\mathscr{E}}} H^{p+1}(L, M') \xrightarrow{H^{p+1}(\phi)} H^{p+1}(L, M) \tag{4}$$

es exacta.

Llamamos a la función $\partial^p_{\mathscr{E}} : H^p(L, M'') \to H^{p+1}(L, M')$ el ***morfismo de conexión*** correspondiente a la sucesión exacta corta $\mathscr{E}$ en grado p. La prueba de esta proposición es considerablemente laboriosa, pero la única parte delicada es la construcción del morfismo: una vez hecho eso, queda sólo verificar que tiene las propiedades deseadas y eso es sencillo.

Demostración. Sea

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{\phi} M \xrightarrow{\psi} M'' \longrightarrow 0$$

una sucesión exacta corta de L-módulos y sea $p \geq 0$. Tenemos un diagrama conmutativo de espacios vectoriales y funciones lineales

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C^p(L,M') \arrow[r, "\phi^p_*"] \arrow[d, "d^p_{M'}"] & C^p(L,M) \arrow[r, "\psi^p_*"] \arrow[d, "d^p_M"] & C^p(L,M'') \arrow[r] \arrow[d, "d^p_{M''}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C^{p+1}(L,M') \arrow[r, "\phi^{p+1}_*"] & C^{p+1}(L,M) \arrow[r, "\psi^{p+1}_*"] & C^{p+1}(L,M'') \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

en el que las filas son exactas. Sea $\zeta \in H^p(L, M'')$ y sea $z \in Z^p(L, M'')$ un representante de ζ, de manera que $\zeta = z + B^p(L, M'')$. Como la función ψ^p_* es sobreyectiva, existe $z_1 \in C^p(L, M)$ tal que $\psi^p_*(z_1) = z$ y como z es un p-cociclo y el diagrama conmuta, tenemos que

$$\psi^{p+1}_*(d^p_M(z_1)) = d^p_{M''}(\psi^p_*(z_1))) = d^p_{M''}(z) = 0.$$

Esto nos dice que $d^p_M(z_1)$ es un elemento del núcleo de ψ^{p+1}_* y la exactitud de la segunda fila del diagrama implica entonces que existe $z_2 \in C^{p+1}(L, M')$, completamente determinado por z_1, tal que $\phi^{p+1}_*(z_2) = d^p_M(z_1)$. El elemento z_2 es un cociclo: en efecto, la función ϕ^{p+1}_* es inyectiva y

$$\phi^{p+1}_*(d^{p+1}_{M'}(z_2)) = d^{p+1}_M(\phi^{p+1}_*(z_2)) = d^{p+1}_M(d^p_M(z_1)) = 0$$

porque $d^{p+1}_M \circ d^p_M = 0$. Podemos, en consecuencia, considerar su clase de cohomología

$$z_2 + B^{p+1}(L, M') \in H^{p+1}(L, M').$$

Afirmamos que esta clase depende solamente de ζ y no de la elección del representante z que hicimos. Para verlo, sea z' otro elemento de $Z^p(L, M')$ tal que $\zeta = z' + B^p(L, M')$, de manera que la diferencia $z - z'$ está en $B^p(L, M')$. Sea $z'_1 \in C^p(L, M)$ tal que $\psi^p_*(z'_1) = z'$ y sea $z'_2 \in C^{p+1}(L, M')$ tal que $\phi^{p+1}_*(z'_2) = d^p_M(z'_1)$. Para verificar nuestra afirmación tenemos que mostrar que $z'_2 - z_2$ es un elemento de $B^{p+1}(L, M')$. Ahora bien, como $z - z'$ está en $B^p(L, M')$, existe $u \in C^{p-1}(L, M')$ tal que $d^{p-1}_{M'}(u) = z - z'$ y, como la función ψ^{p-1}_* es sobreyectiva, hay un $v \in C^{p-1}(L, M)$ tal que $\psi^{p-1}_*(v) = u$. Es

$$\psi^p_*\big(z_1 - z'_1 - d^{p-1}_M(v)\big) = z - z' - d^{p-1}_{M'}(\psi^{p-1}_*(v)) = z - z' - d^{p-1}_{M'}(u) = 0$$

así que la exactitud de la primera fila del diagrama implica que existe $w \in C^p(L, M')$ tal que $\phi^p_*(w) = z_1 - z'_1 - d^{p-1}_M(v)$. Recordando que la función ϕ^{p+1}_* es inyectiva y calculando que

$$\phi^{p+1}_*\big(z_2 - z'_2 - d^p_{M'}(w)\big) = d^p_M(z_1) - d^p_M(z'_1) - d^p_M(\phi^p_*(w))$$

$$
\begin{aligned}
&= d_M^p(z_1) - d_M^p(z_1') - d_M^p\big(z_1 - z_1' - d_M^{p-1}(v)\big) \\
&= 0,
\end{aligned}
$$

podemos concluir que $z_2 - z_2' = d_{M'}^p(w) \in B^{p+1}(L, M')$, como queríamos.

En definitiva, todo lo que hemos hecho muestra que existe una función

$$\partial_{\mathscr{E}}^p : H^p(L, M'') \to H^{p+1}(L, M')$$

tal que

> *si* $z \in Z^p(L, M'')$, $z_1 \in C^p(L, M)$ *y* $z_2 \in C^{p+1}(L, M')$ *son tales que* $\psi_*^p(z_1) = z$ *y* $\phi_*^{p+1}(z_2) = d_M^p(z_1)$, *entonces* $\partial_{\mathscr{E}}^p(z + B^p(L, M')) = z_2 + B^{p+1}(L, M')$.

Para probar la proposición mostraremos que esta función posee todas las propiedades que allí se enumeran. Empecemos por la linealidad:

- Sean ζ y ζ' dos elementos de $H^p(L, M')$ y sean $a, b \in \Bbbk$. Sean $z, z' \in Z^p(L, M')$ tales que $\zeta = z + B^p(L, M')$ y $\zeta' = z' + B^p(L, M')$, y sean $z_1, z_1' \in C^p(L, M)$ y $z_2, z_2' \in C^{p+1}(L, M')$ tales que $\psi_*^p(z_1) = z$, $\psi_*^p(z_1') = z'$, $\phi_*^{p+1}(z_2) = d_M^p(z_1)$ y $\phi_*^{p+1}(z_2') = z_1'$, de manera que $\partial_{\mathscr{E}}^p(\zeta) = z_2 + B^{p+1}(L, M')$ y $\partial_{\mathscr{E}}^p(\zeta') = z_2' + B^{p+1}(L, M')$. Si ponemos $z_1'' = az_1 + bxnz_1'$ y $z_2'' = az_2 + bz_2'$, entonces

  $$\psi_*^p(z_1'') = a\psi_*^p(z_1) + b\psi_*^p(z_1') = az + bz'$$

  y

  $$\phi_*^{p+1}(z_2'') = a\phi_*^{p+1}(z_2) + b\phi_*^{p+1}(z_2') = ad_M^p(z_1) + bd_M^p(z_1') = d_M^p(z_1''),$$

  y esto implica que

  $$
  \begin{aligned}
  \partial_{\mathscr{E}}^p(a\zeta + b\zeta') &= \partial_{\mathscr{E}}^p(az + bz' + B^p(L, M'')) = az_2 + bz_2' + B^{p+1}(L, M') \\
  &= a\partial_{\mathscr{E}}^p(\zeta) + b\partial_{\mathscr{E}}^p(\zeta').
  \end{aligned}
  $$

En segundo lugar, veamos que se satisface la condición (i) del enunciado:

- Supongamos que tenemos un diagrama conmutativo de L-módulos y morfismos de L-módulos como en (2), en el que las filas son exactas, sea $p \geq 0$ y sea $\zeta \in H^p(L, M'')$. Sean $z \in Z^p(L, M'')$, $z_1 \in C^p(L, M)$ y $z_2 \in C^{p+1}(L, M')$ tales que $\psi_*^p(z_1) = z$ y $\phi_*^{p+1}(z_2) = d_M^p(z_1)$, de manera que $\partial_{\mathscr{E}}^p(\zeta) = z_2 + B^{p+1}(L, M') \in H^{p+1}(L, M')$ y, por lo tanto,

  $$H^{p+1}(\alpha)\big(\partial_{\mathscr{E}}^p(\zeta)\big) = \alpha_*^{p+1}(z_2) + B^{p+1}(L, N') \in H^{p+1}(L, N'). \tag{5}$$

  Los elementos $z_1' = \beta_*^p(z_1) \in C^p(L, N)$ y $z_2' = \alpha_*^{p+1}(z_2) \in C^{p+1}(L, N')$ son tales que

  $$\xi_*^p(z_1') = \xi_p^*(\beta_*^p(z_1)) = \gamma_*^p(\psi_*^p(z_1) = \gamma_*^p(z)$$

  y

  $$
  \begin{aligned}
  \zeta_*^{p+1}(z_2') &= \zeta^{p+1}(\alpha_*^{p+1}(z_2)) = \beta_*^{p+1}(\phi_*^{p+1}(z_2)) = \beta_*^{p+1}(d_M^p(z_1)) = d_N^p(\beta_*^p(z_1)) \\
  &= d_N^p(z_1'),
  \end{aligned}
  $$

así que la construcción del morfismo $\partial^p_{\mathscr{E}'}$ implica que

$$\partial^p_{\mathscr{E}'}\big(H^p(\gamma)(\zeta)\big) = \partial^p_{\mathscr{E}'}\big(\gamma^p_*(z) + B^p(L, M')\big) = z'_2 + B^{p+1}(L, N') \in H^{p+1}(L, N').$$

Este elemento es el mismo que el de (5) y eso significa que el diagrama (3) conmuta.

Supongamos ahora que tenemos una sucesión exacta corta $\mathscr{E}$

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{\phi} M \xrightarrow{\psi} M'' \longrightarrow 0$$

de L-módulos y morfismos de L-módulos, y mostremos que la composición de cada par de flechas consecutivas en el diagrama (4) es nula:

- De acuerdo a la Proposición 2.2.3*(ii)*, es

$$H^p(\psi) \circ H^p(\phi) = H^p(\psi \circ \phi) = H^p(0) = 0.$$

- Sea $\zeta \in H^p(L, M)$ y sea $z \in Z^p(L, M)$ tal que $\zeta = z + B^p(L, M)$. De acuerdo a la definición de $H^p(\psi)$, tenemos que $H^p(\psi)(\zeta) = \psi^p_*(z) + B^p(L, M'')$. Si ponemos $z_1 = z \in C^p(L, M)$ y $z_2 = 0 \in C^{p+1}(L, M')$, entonces es $\psi^p_*(z_1) = \psi^p(z)$ y $\phi^{p+1}(z_2) = d^p_M(z_1)$, así que

$$\partial^p_{\mathscr{E}}(H^p(\psi)(\zeta)) = \partial^p_{\mathscr{E}}(\psi^p(z) + B^p(L, M'')) = z_2 + B^{p+1}(L, M') = 0 + B^{p+1}(L, M').$$

Esto nos dice que $\partial^p_{\mathscr{E}} \circ H^p(\psi) = 0$.

- Sea finalmente $\zeta \in H^p(L, M'')$ y sean $z \in Z^p(L, M'')$, $z_1 \in C^p(L, M)$ y $z_2 \in C^{p+1}(L, M')$ tales que $\psi^p_*(z_1) = z$ y $\phi^{p+1}_*(z_2) = d^p_M(z_1)$, de manera que $\partial^p_{\mathscr{E}}(\zeta) = z_2 + B^{p+1}(L, M')$. Tenemos entonces que

$$\begin{aligned} H^{p+1}(\phi)(\partial^p_{\mathscr{E}}(\zeta)) &= \phi^{p+1}_*(z_2) + B^{p+1}(L, M) = d^p_M(z_1) + B^{p+1}(L, M) \\ &= 0 + B^{p+1}(L, M). \end{aligned}$$

Así, es $H^{p+1}(\phi) \circ \partial^p_{\mathscr{E}} = 0$.

Para terminar, mostremos la exactitud de la sucesión (4):

- Sea $\zeta \in H^p(L, M)$ tal que $H^p(\psi)(\zeta) = 0$. Si $z \in Z^1(L, M)$ es tal que $\zeta = z + B^p(L, M)$, esto significa que $\psi^p_*(z) \in B^p(L, M'')$, esto es, que existe $z_1 \in C^{p-1}(L, M'')$ tal que $\psi^p_*(z) = d^{p-1}_{M''}(z_1)$. Como la función ψ^{p-1}_* es sobreyectiva, existe $z_1 \in C^{p-1}(L, M)$ tal que $\psi^{p-1}_*(z_2) = z_1$ y entonces

$$\psi^p_*(d^{p-1}_M(z_1)) = d^{p-1}_{M''}(\psi^{p-1}_*(z_1)) = d^{p-1}_{M''}(z_1) = \psi^p_*(z).$$

Como el núcleo de ψ^p_* es la imagen de ϕ^p_*, esto nos dice que existe $z_3 \in C^p(L, M')$ tal que $\phi^p_*(z_3) = z - d^{p-1}_M(z_1)$. Esta cocadena z_3 es un cociclo, ya que la función ϕ^{p+1}_* es inyectiva y

$$\phi^{p+1}_*(d^p_{M'}(z_3)) = d^p_M(\phi^p(z_3)) = d^p_M(z) + d^p_M(d^{p-1}_M(z_1)) = 0.$$

Podemos entonces considerar la clase $z_3 + B^p(L, M')$, y su imagen por $H^p(\phi)$ es

$$\begin{aligned} H^p(\phi)(z_3 + B^p(L, M')) &= \phi^p_*(z_3) + B^p(L, M) = z - d^{p-1}_M(z_1) + B^p(L, M) \\ &= z + B^p(L, M) = \zeta. \end{aligned}$$

Vemos de esta forma que el núcleo de $H^p(\psi)$ es la imagen de $H^p(\phi)$.

- Sea $\zeta \in H^p(L, M'')$ tal que $\partial^p_{\mathscr{E}}(\zeta) = 0$ y fijemos cocadenas $z \in Z^p(L, M'')$, $z_1 \in C^p(L, M)$ y $z_2 \in C^{p+1}(L, M')$ tales que $\psi^p_*(z_1) = z$ y $\phi^{p+1}_*(z_2) = d^p_M(z_1)$, de manera que, de acuerdo a la construcción de $\partial^p_{\mathscr{E}}$, es $\partial^p_{\mathscr{E}}(\zeta) = z_2 + B^{p+1}(L, M')$. Que $\partial^p_{\mathscr{E}}(\zeta)$ se anule, entonces, significa que $z_2 \in B^{p+1}(L, M')$, es decir, que existe $u \in C^p(L, M')$ tal que $z_2 = d^p_{M'}(u)$.

  Sea $z_1' = z_1 - \phi^p_*(u) \in C^p(L, M)$. Como

$$
\begin{aligned}
d^p_M(z_1') &= d^p_M(z_1) - d^p_M(\phi^p_*(u)) \\
&= \phi^{p+1}_*(z_2) - \phi^{p+1}_*(d^p_{M'}(u)) \\
&= \phi^{p+1}_*(z_2) - \phi^{p+1}_*(z_2) = 0,
\end{aligned}
$$

  así que la cocadena z_1' es de hecho un cociclo y podemos considerar su clase $z_1' + B^p(L, M)$ en $H^p(L, M)$. La imagen de esta clase por la función $H^p(\psi)$ es

$$
\begin{aligned}
H^p(\psi)(z_1' + B^p(L, M)) &= \psi^p_*(z_1') + B^p(L, M'') \\
&= \psi^p_*(z_1) + \psi^p_*(\phi^p_*(u)) + B^p(L, M'') \\
&= z + B^p(L, M'') = \zeta.
\end{aligned}
$$

  Esto muestra que el núcleo de $\partial^p_{\mathscr{E}}$ está contenido en la imagen de $H^p(\psi)$.
- Sea, finalmente, $\zeta \in H^{p+1}(L, M')$ una clase tal que $H^{p+1}(\phi)(\zeta) = 0$. Si $z \in Z^{p+1}(L, M')$ es un cociclo tal que $\zeta = z + B^{p+1}(L, M')$, esto significa que $\phi^{p+1}_*(z) \in B^{p+1}(L, M)$, esto es, que existe $z_1 \in C^p(L, M)$ tal que $\phi^{p+1}_*(z) = d^p_M(z_1)$. Sea $u = \psi^p_*(z_1) \in C^p(L, M'')$. Esta cocadernma u es un cociclo, ya que

$$
d^p_{M''}(u) = d^p_{M''}(\psi^p_*(z_1)) = \psi^{p+1}_*(d^p_{M'}(z_1)) = \psi^{p+1}_*(\phi^{p+1}_*(z)) = 0,
$$

  y podemos, por lo tanto, considerar la clase $\mu = u + B^p(L, M'') \in H^p(L, M'')$. Queremos calcular $\partial^p_{\mathscr{E}}(\mu)$: si ponemos $u_1 = z_1 \in C^p(L, M)$ y $u_2 = z \in C^{p+1}(L, M')$ tenemos que $\psi^p_*(u_1) = u$ y $\phi^{p+1}_*(u_2) = d^p_M(u_1)$, y esto implica que $\partial^p_{\mathscr{E}}(\mu) = u_2 + B^{p+1}(L, M') = \zeta$.

La prueba de la proposición queda así completa. □

§3. Interpretación de la cohomología en grados bajos

Damos interpretaciones concretas para los dos primeros espacios de cohomología: para el 0-ésimo en término de invariantes y para el primero en términos de derivaciones.

2.3.1. Sea L un álgebra de Lie. Recordemos que si M es un L-módulo, el ***subespacio invariante*** de M es

$$
M^L = \{m \in M : x \cdot m = 0 \text{ para todo } x \in L\}.
$$

Es fácil verificar que si $\phi : M \to N$ es un morfismo de L-módulos, entonces $\phi(M^L) \subseteq N^L$, de manera que podemos considerar la restricción $\phi^L = \phi|_{M^L} : M^L \to N^L$.

2.3.2. Proposición. *Sea L un álgebra de Lie. Para cada L-módulo M existe un isomorfismo de espacios vectoriales*

$$\Phi^0_M : M^L \to H^0(L, M)$$

tal que cada vez que $\alpha : M \to N$ es un morfismo de L-módulos se tiene que conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd} M^L \arrow[r, "\Phi^0_M"] \arrow[d, "\alpha^L"'] & H^0(L, M) \arrow[d, "H^0(\alpha)"] \\ N^L \arrow[r, "\Phi^0_N"] & H^0(L, N) \end{tikzcd}$$

Desde ahora en adelante identificaremos al 0-ésimo espacio de cohomologia $H^0(L, M)$ con el espacio de invariantes M^L del módulo de valores vía este isomorfismo Φ^0_M.

Demostración. Sea M un L-módulo. Es $C^0(L, M) = \mathsf{hom}_{\Bbbk}(\Bbbk, M)M$ y $C^1(L, M) = \mathsf{hom}_{\Bbbk}(L, M)$, y la función $d^0_M : C^0(L, M) \to C^1(L, M)$ es tal que

$$d^0_M f(x_1) = x_1 \cdot f(1)$$

para todo $f \in C^0(L, M)$ y $x_1 \in L$. Sea $\tilde{\phi}_M : M \to C^0(L, M)$ la función tal que $\tilde{\phi}(m)(a) = am$ para cada $m \in M$ y $a \in \Bbbk$. Es claro que, por un lado, $\tilde{\phi}_M$ es un isomorfismo de espacios vectoriales y, por otro, que si $m \in M$, entonces $m \in M^L$ exactamente cuando $d^0_M m = 0$. Esto significa que $\tilde{\phi}_M$ se restringe a un isomorfismo $\Phi^0_M : M^L \to \ker d^0_M = H^0(L, M)$. Esto prueba la primera afirmación del enunciado. La verificación de la segunda, por su parte, es inmediata. □

2.3.3. Si L es un álgebra de Lie y M es un L-módulo, una función lineal $D : L \to M$ es una ***derivación*** si cada vez que $x, y \in L$ se tiene que

$$D([x, y]) = x \cdot D(y) - y \cdot D(x).$$

Si $m \in M$, entonces la función $D_m : x \in L \mapsto x \cdot m \in M$ es una derivación, y decimos que derivación de esta forma es ***interior***. Escribimos $\mathsf{Der}(L, M)$ al conjunto de las derivaciones $L \to M$, que es un subespacio de $\mathsf{hom}_{\Bbbk}(L, M)$, e $\mathsf{InnDer}(L, M)$ al de las derivaciones interiores, que es un subespacio de $\mathsf{Der}(L, M)$. Llamamos al cociente

$$\mathsf{ExtDer}(L, M) = \frac{\mathsf{Der}(L, M)}{\mathsf{InnDer}(L, M)}$$

el espacio de ***derivaciones exteriores*** de L en M —es importante notar que sus elementos no son derivaciones de L en M.

Si $\alpha : M \to N$ es un morfismo de L-módulos, entonces para cada $D \in \mathsf{Der}(L, M)$ la composición $\alpha \circ d : L \to N$ es una derivación, y la función

$$\mathsf{Der}(L, \alpha) : D \in \mathsf{Der}(L, M) \mapsto \alpha \circ D \in \mathsf{Der}(L, N)$$

es lineal y tal que $\mathsf{Der}(L,\alpha)(\mathsf{InnDer}(L,M)) \subseteq \mathsf{InnDer}(L,N)$, así que induce, pasando a los cocientes, una función lineal

$$\mathsf{ExtDer}(L,\alpha) : \mathsf{ExtDer}(L,M) \to \mathsf{ExtDer}(L,N)$$

tal que

$$\mathsf{ExtDer}(L,\alpha)(D + \mathsf{InnDer}(L,M)) = \alpha \circ D + \mathsf{InnDer}(L,N)$$

para toda derivación $D \in \mathsf{Der}(L,M)$.

2.3.4. Proposición. *Sea L un álgebra de Lie. Para cada L-módulo M hay un isomorfismo de espacios vectoriales*

$$\Phi^1_M : \mathsf{ExtDer}(L,M) \to H^1(L,M)$$

tal que cada vez que $\alpha : M \to N$ es un morfismo de L-módulos conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{ExtDer}(L,M) \arrow[r, "\Phi^1_M"] \arrow[d, "\mathsf{ExtDer}(L,\alpha)"'] & H^1(L,M) \arrow[d, "H^1(\alpha)"] \\
\mathsf{ExtDer}(L,N) \arrow[r, "\Phi^1_N"] & H^1(L,N)
\end{tikzcd}$$

Demostración. Sea M un L-módulo. Si $D : L \to M$ es una derivación, entonces D es un elemento de $C^1(L,M)$ y si $x_1, x_2 \in L$, se tiene que

$$d^1_M D(x_1,x_2) = x_1 \cdot D(x_2) - x_2 \cdot D(x_1) - D([x_1,x_2]) = 0,$$

de manera que D es, de hecho, un 1-cociclo y podemos considerar la clase

$$D + B^1(L,M) \in H^1(L,M).$$

Obtenemos de esta forma una función

$$D \in \mathsf{Der}(L,M) \mapsto D + B^1(L,M) \in H^1(L,M), \tag{6}$$

que es evidentemente lineal. Si $D \in \mathsf{Der}(L,M)$ es una derivación interior, de manera que existe $m \in M$ tal que $D(x) = x \cdot m$ para todo $x \in L$, entonces $D = d^0_M m \in B^1(L,M)$ y la clase $D + B^1(L,M)$ es el elemento nulo de $H^1(L,M)$. Esto significa que la función (6) manda el subespacio $\mathsf{InnDer}(L,M)$ a cero y, por lo tanto, que induce una función lineal

$$\Phi^1_M : \mathsf{ExtDer}(L,M) \to H^1(L,M)$$

tal que $\Phi^1_M(D+\mathsf{InnDer}(L,M)) = D+B^1(L,M)$ para toda derivación $D \in \mathsf{Der}(L,M)$. Para probar la primera parte de la proposición, mostremos que Φ^1_M es un isomorfismo:

- Sea $\zeta \in H^1(L,M)$ y sea $z \in Z^1(L,M)$ tal que $\zeta = z + B^1(L,M)$. Así, z es una función lineal $z : L \to M$ que es un 1-cociclo, y esto signfica que cada vez que $x_1, x_2 \in L$ se tiene que

$$d^1_M z(x_1,x_2) = x_1 \cdot z(x_2) - x_2 \cdot z(x_1) - z([x_1,x_2]) = 0.$$

  Por supuesto, esto nos dice que $z : L \to M$ es una derivación, y claramente se tiene que $\Phi^1_M(z + \mathsf{InnDer}(L,M)) = z + B^1(L,M) = \zeta$. La función Φ^1_M es, por lo tanto, sobreyectiva.
- Sea, por otro lado, $\delta \in \mathsf{ExtDer}(L,M)$ una derición exterior tal que $\Phi^1_M(\delta) = 0$. Si $D : L \to M$ es una derivación tal que $\delta = D + \mathsf{InnDer}(L,M)$, esto significa que $D \in B^1(L,M)$, es decir, que existe $m \in C^0(L,M)$ tal que $d^0_M m = D$. Esta última igualdad nos dice que para cada $x \in L$ es $D(x) = d^0_M m(x) = x \cdot m$ y, por lo tanto, que D es interior: vemos así que $\delta = D + \mathsf{InnDer}(L,M) = 0 + \mathsf{InnDer}(L,M)$ es el elemento nulo de $\mathsf{ExtDer}(L,M)$ y, en definitiva, que la función Φ^1_M es inyectiva.

Para completar la prueba de la proposición resta verificar la última afirmación del enunciado, y esto es inmediato. □

§4. Algunos ejemplos de cálculo

2.4.1. El cálculo de la cohomología con coeficientes triviales de un álgebra de Lie abeliana es inmediato:

Proposición. *Sea L un álgebra de Lie abeliana. Para cada $p \geq 0$ hay un isomorfismo de espacios vectoriales $H^p(L,\Bbbk) \cong \bigwedge^p L^*$.*

Demostración. Como el álgebra L es abeliana, la fórmula que define las diferenciales $d^p_\Bbbk$ deja en claro que son todas nulas. Se sigue de esto inmediatamente que $H^p(L,\Bbbk) = C^p(L,\Bbbk)$ y lo que afirma la proposición es entonces consecuencia que hay un isomorfismo $C^p(L,\Bbbk) \cong \bigwedge^p L^*$. □

2.4.2. Para un álgebra de Lie general, no es cierto que las diferenciales se anulas y entonces es necesario encontrar expresiones concretas para ellas. Una forma de hacerlo es la siguiente.

Sea L un álgebra de Lie y sea L^* su espacio dual. Si $p \geq 0$ y $\phi_1, \dots, \phi_p \in L^*$, definimos una función $\phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_p : L^p \to \Bbbk$ poniendo, para cada elección de $x_1, \dots, x_n \in L$,

$$(\phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_p)(x_1,\dots,x_p) = \det \begin{pmatrix} \phi_1(x_1) & \cdots & \phi_1(x_p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_p(x_1) & \cdots & \phi_p(x_p) \end{pmatrix}.$$

Es inmediato verificar que $\phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_p$ es p-multilineal y alternada, de manera que se trata de un elemento de $C^p(L,\Bbbk)$.

Proposición. *Sea L un álgebra de Lie de dimensión finita n, sea $\mathscr{B} = (x_1,\dots,x_n)$ una base de L y sea $\mathscr{B}^* = (\phi_1,\dots,\phi_n)$ la base de L^* dual a $\mathscr{B}$. Sea $p \geq 0$, sea $\mathscr{I}_p$ el conjunto de todos los subconjuntos de $\{1,\dots,n\}$ de exactamente p elementos y si $i \in \mathscr{I}_p$ escribamos $i = (i_1,\dots,i_p)$ para denotar que $i = \{i_1,\dots,i_p\}$ y que $1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n$. El conjunto*

$$\mathscr{B}^*_p = \{\phi_{i_1} \wedge \cdots \wedge \phi_{i_p} : (i_1,\dots,i_p) \in \mathscr{I}_p\}$$

es una base de $C^p(L,\Bbbk)$. Para cada $I = (i_1, \dots, i_p) \in \mathscr{I}_p$ se tiene que

$$d\big(\phi_{i_1} \wedge \cdots \wedge \phi_{i_p}\big)(x_{j_1}, \dots, x_{j_{p+1}})$$
$$= \sum_{1 \le k < l \le p+1} (-1)^{k+l} (\phi_{i_1} \wedge \cdots \wedge \phi_{i_p})([x_{j_k}, x_{j_l}], x_{j_1}, \dots, \hat{x}_{j_k}, \dots, \hat{x}_{j_l}, \dots, x_{j_{p+1}})$$

para cada $(j_1, \dots, j_{p+1}) \in \mathscr{I}_{p+1}$.

Demostración. Sea $I = (i_1, \dots, i_p)$ y $J = (j_1, \dots, j_p)$ son dos elementos de $\mathscr{I}_p$, es inmediato que

$$(\phi_{i_1} \wedge \cdots \wedge \phi_{i_p})(x_{j_1}, \dots, x_{j_p}) = \delta_{I,J}.$$

Supongamos que para cada $I \in \mathscr{I}_p$ tenemos un escalar $a_I \in \Bbbk$ y que

$$\sum_{I \in \mathscr{I}_p} a_I \, \phi_{i_1} \wedge \cdots \wedge \phi_{i_p} = 0$$

en $C^p(L,\Bbbk)$. Para cada $J = (j_1, \dots, j_p) \in \mathscr{I}_p$ se tiene entonces que

$$0 = \sum_{I \in \mathscr{I}_p} a_I \, \phi_{i_1} \wedge \cdots \wedge \phi_{i_p}(x_{j_1}, \dots, x_{j_p}) = a_J$$

y esto muestra que las funciones $\phi_{i_1} \wedge \cdots \wedge \phi_{i_p}$ con $I = (i_1, \dots, i_p) \in \mathscr{I}_p$ son distintas dos a dos y que el conjunto $\mathscr{B}_p^*$ del enunciado es linealmente independiente.

Veamos ahora que ese conjunto genera a $C^p(L,\Bbbk)$. Sea $\phi \in C^p(L,\Bbbk)$, para cada conjunto $I = (i_1, \dots, i_p) \in \mathscr{I}_p$ sea $a_I = \phi(x_{i_1}, \dots, x_{i_p}) \in \Bbbk$ y consideremos la combinación lineal

$$\psi = \sum_{I \in \mathscr{I}_p} a_I \, \phi_{i_1} \wedge \cdots \wedge \phi_{i_p}.$$

Es claro que para todo $J = (j_i, \dots, j_p) \in \mathscr{I}_p$ se tiene que $\psi(x_{j_1}, \dots, x_{j_p}) = a_J = \phi(x_{j_1}, \dots, x_{j_p})$ y entonces, como tanto ψ como ϕ son funciones multilineales y alternantes esto implica inmediatamente que, de hecho, $\psi = \phi$.

Si ahora $(i_1, \dots, i_p) \in \mathscr{I}_p$, entonces la definición de $d_{\Bbbk}^p$ nos dice que

$$d\big(\phi_{i_1} \wedge \cdots \wedge \phi_{i_p}\big)(x_{j_1}, \dots, x_{j_{p+1}}) = \sum_{k=1}^{p+1} (-1)^{k+1} x_i \cdot (\phi_{i_1} \wedge \cdots \wedge \phi_{i_p})(x_{j_1}, \dots, \hat{x}_{j_k}, \dots, x_{j_{p+1}})$$
$$+ \sum_{1 \le k < l \le p+1} (-1)^{k+l} (\phi_{i_1} \wedge \cdots \wedge \phi_{i_p})([x_{j_k}, x_{j_l}], x_{j_1}, \dots, \hat{x}_{i_k}, \dots, \hat{x}_{j_l}, \dots, x_{j_{p+1}})$$

y la primera de estas dos sumas se anula porque $\Bbbk$ es un L-módulo trivial. Esto muestra que vale la fórmula que aparece en el enunciado. □

2.4.3. Proposición. *Si L es el álgebra de Lie de dimensión dos que posee una base $\mathscr{B} = (x_1, x_2)$ tal que $[x_1, x_2] = x_1$, entonces*

$$\dim H^p(L, \Bbbk) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 \le p \le 1; \\ 0, & \text{si } p \ge 2. \end{cases}$$

Demostración. Como L tiene dimensión 2, es $C^p(L, \Bbbk) = 0$ si $p \ge 3$. Para calcular la cohomología $H^\bullet(L, \Bbbk)$ tenemos que considerar, entonces, el complejo

$$C^0(L, \Bbbk) \xrightarrow{d^0_\Bbbk} C^1(L, \Bbbk) \xrightarrow{d^1_\Bbbk} C^2(L, \Bbbk) \xrightarrow{d^2_\Bbbk} 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

Sea $\mathscr{B}^* = (\phi_1, \phi_2)$ la base dual a $\mathscr{B}$. El espacio $C^0(L, \Bbbk)$ tiene a $\{1\}$ por base, $C^1(L, \Bbbk)$ a $\{\phi_1, \phi_2\}$ y $C^2(L, \Bbbk)$ a $\{\phi_1 \wedge \phi_2\}$. Es $d^0_\Bbbk(1) = 0$. Por otro lado, si $i \in \{1, 2\}$, entonces

$$d^1_\Bbbk \phi_i(x_1, x_2) = -\phi_i([x_1, x_2]) = -\phi_i(x_1) = -\delta_{i,1},$$

de manera que $d^1_\Bbbk \phi_1 = -\phi_1 \wedge \phi_2$ y $d^1_\Bbbk \phi_2 = 0$. Es inmediato, en vista de esto, que

$$\begin{aligned} &Z^0(L, \Bbbk) = \langle \Bbbk \rangle, && \\ &Z^1(L, \Bbbk) = \langle \phi_2 \rangle, && B^1(L, \Bbbk) = 0, \\ &Z^2(L, \Bbbk) = C^2(L, \Bbbk), && B^2(L, \Bbbk) = C^2(L, \Bbbk), \end{aligned}$$

y calculando los correspondientes cocientes vemos que $H^0(L, \Bbbk) \cong \Bbbk$, $H^1(L, \Bbbk) \cong \Bbbk$, generado por la clase del 1-cociclo ϕ_2, y $H^2(L, \Bbbk) = 0$. $\square$

2.4.4. Proposición. *Sea L el álgebra de Lie de dimensión 3 que posee una base $\mathscr{B} = (x_1, x_2, x_3)$ tal que $[x_1, x_3] = x_2$ y $[x_1, x_2] = [x_2, x_3] = 0$. La cohomología de L con valores en el módulo trivial $\Bbbk$ tiene dimensiones*

	p				
	0	1	2	3	≥ 4
$\dim H^p(L, \Bbbk)$	1	2	2	1	0

Demostración. El álgebra tiene dimensión 3, así que tenemos que considerar los espacios

$$C^0(L, \Bbbk) \xrightarrow{d^0_\Bbbk} C^1(L, \Bbbk) \xrightarrow{d^1_\Bbbk} C^2(L, \Bbbk) \xrightarrow{d^2_\Bbbk} C^3(L, \Bbbk) \xrightarrow{d^3_\Bbbk} 0 \longrightarrow \cdots \tag{7}$$

Sea $\mathscr{B}^* = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ la base dual de $\mathscr{B}$ e $I = \{1, 2, 3\}$. Es $d^0_\Bbbk 1 = 0$. Si $i \in I$, entonces para cada $(j, k) \in \mathscr{I}_2$ es

$$d^1_\Bbbk \phi_i(x_j, x_k) = -\phi_i([x_j, x_k]).$$

En vista de la definición del producto de L es claro que

$$d^1_\Bbbk \phi_1 = d^1_\Bbbk \phi_3 = 0, \qquad d^1_\Bbbk \phi_2 = -\phi_1 \wedge \phi_3.$$

Por otro lado, si $(i,j) \in \mathscr{I}_2$, entonces

$$\begin{aligned} d^2_{\Bbbk}(\phi_i \wedge \phi_j)(x_1,x_2,x_3) &= -\phi_i([x_1,x_2],x_3) + \phi_i([x_1,x_3],x_2) - \phi_i([x_2,x_3],x_1) \\ &= \phi_i(x_2,x_2) = 0, \end{aligned}$$

y esto nos dice que la diferencial $d^2_{\Bbbk}$ es idénticamente nula. A partir de esta descripción de las diferenciales de (7), es fácil ver que

$$\begin{aligned} &Z^0(L,\Bbbk) = \langle 1 \rangle, \\ &Z^1(L,\Bbbk) = \langle \phi_1, \phi_3 \rangle, && B^1(L,\Bbbk) = 0, \\ &Z^2(L,\Bbbk) = \langle \phi_1 \wedge \phi_2, \phi_1 \wedge \phi_3, \phi_2 \wedge \phi_3 \rangle, && B^2(L,\Bbbk) = \langle \phi_1 \wedge \phi_3 \rangle, \\ &Z^3(L,\Bbbk) = \langle \phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \phi_3 \rangle, && B^3(L,\Bbbk) = 0. \end{aligned}$$

Calculando los cocientes, vemos que

- $H^0(L,\Bbbk)$ tiene dimensión 1 y está generado por la clase de 1;
- $H^1(L,\Bbbk)$ tiene dimensión 2 y está generado por las clases de ϕ_1 y ϕ_3;
- $H^2(L,\Bbbk)$ tiene dimensión 2 y está generado por las clases de $\phi_1 \wedge \phi_2$ y de $\phi_2 \wedge \phi_3$;
- $H^3(L,\Bbbk)$ tiene dimensión 1 y está generado por la clase de $\phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \phi_3$.

Esto da los resultados tabulados en el enunciado. □

2.4.5. Proposición. *Sea $L = \mathfrak{sl}_2(\Bbbk)$, de manera que L tiene una base $\mathscr{B} = (x_1,x_2,x_3)$ tal que $[x_1,x_2] = -2x_1$, $[x_1,x_3] = x_2$ y $[x_2,x_3] = -2x_3$. La cohomología de L con valores en el módulo trivial $\Bbbk$ tiene dimensiones*

	p				
	0	1	2	3	≥ 4
$\dim H^p(L,\Bbbk)$	1	0	0	1	0

Demostración. Como $\dim L = 3$, tenemos que considerar los espacios

$$C^0(L,\Bbbk) \xrightarrow{d^0_{\Bbbk}} C^1(L,\Bbbk) \xrightarrow{d^1_{\Bbbk}} C^2(L,\Bbbk) \xrightarrow{d^2_{\Bbbk}} C^3(L,\Bbbk) \xrightarrow{d^3_{\Bbbk}} 0 \longrightarrow \cdots$$

Sea $\mathscr{B}^* = (\phi_1,\phi_2,\phi_3)$ la base dual de $\mathscr{B}$ e $I = \{1,2,3\}$. Usando la fórmula para la diferencial de la Proposicion 2.4.2, es fácil ver que

$$\begin{aligned} &d^0_{\Bbbk}1 = 0, \\ &d^1_{\Bbbk}\phi_1 = 2\phi_1 \wedge \phi_2, \\ &d^1_{\Bbbk}\phi_2 = \phi_1 \wedge \phi_3, \\ &d^1_{\Bbbk}\phi_3 = 2\phi_2 \wedge \phi_3, \\ &d^2_{\Bbbk}(\phi_1 \wedge \phi_2) = d^2_{\Bbbk}(\phi_1 \wedge \phi_3) = d^2_{\Bbbk}(\phi_2 \wedge \phi_3) = 0, \\ &d^3_{\Bbbk}(\phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \phi_3) = 0. \end{aligned}$$

y esto implica que

$$\begin{aligned}
&Z^0(L,\Bbbk) = \langle 1 \rangle, && \\
&Z^1(L,\Bbbk) = 0, && B^1(L,\Bbbk) = 0, \\
&Z^2(L,\Bbbk) = \langle \phi_1 \wedge \phi_2, \phi_1 \wedge \phi_2, \phi_2 \wedge \phi_3 \rangle, && B^2(L,\Bbbk) = \langle \phi_1 \wedge \phi_2, \phi_1 \wedge \phi_2, \phi_2 \wedge \phi_3 \rangle, \\
&Z^3(L,\Bbbk) = \langle \phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \phi_3 \rangle, && B^3(L,\Bbbk) = 0,
\end{aligned}$$

de manera que $H^0(L,\Bbbk)$ y $H^3(L,\Bbbk)$ tienen dimensión 1 y están generados por la clase de 1 y por la clase de $\phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \phi_3$, respectivamente, y todos los otros espacios de cohomología son nulos. □

§5. Extensiones de módulos

Presentamos la noción de extensión de módulos sobre un álgebra de Lie y la de equivalencia de tales extensiones. Describimos las extensiones que se parten, construimos la clase característica de una extensión y mostramos que su anulación caracteriza a las extensiones que se parten.

2.5.1. Sea L es un álgebra de Lie. Si M y N son L-módulos, una ***extensión*** de M por N es una sucesión exacta corta $\mathscr{E}$

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{\phi} E \xrightarrow{\psi} M \longrightarrow 0$$

de L-módulos y morfismos de L-módulos que empieza en M y termina en N. Si $\mathscr{E}'$ es otra extensión de M por N

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{\phi'} E' \xrightarrow{\psi'} M \longrightarrow 0$$

decimos que $\mathscr{E}$ y $\mathscr{E}'$ son ***equivalentes*** si existe un morfismo $u : E \to E'$ tal que conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, equal] & E \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "u"] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "\phi'"] & E' \arrow[r, "\psi'"] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

y en ese caso escribimos $\mathscr{E} \sim \mathscr{E}'$.

Lema. *Sea L un álgebra de Lie y sean M y N dos L-módulos. La relación de equivalencia entre extensiones de M por N es una relación de equivalencia.*

Demostración. Verificamos una por una las condiciones necesarias:

- Si $\mathscr{E}$ es una extensión

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{\phi} E \xrightarrow{\psi} M \longrightarrow 0$$

de M por N, entonces conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, equal] & E \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\mathrm{id}_E"] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "\phi"] & E \arrow[r, "\psi"] & M \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

y, por lo tanto, $\mathscr{E} \sim \mathscr{E}$. Esto significa que la relación $\sim$ es reflexiva.

- Supongamos que $\mathscr{E}$ y $\mathscr{E}'$ son extensiones

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{\phi} E \xrightarrow{\psi} M \longrightarrow 0$$

y

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{\phi'} E' \xrightarrow{\psi'} M \longrightarrow 0$$

de M por N tales que $\mathscr{E} \sim \mathscr{E}'$, de manera que existe un morfismo $u : E \to E'$ tal que conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, equal] & E \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "u"] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "\phi'"] & E' \arrow[r, "\psi'"] & M \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Veamos que u es un isomorfismo:

  - Si $e' \in E'$, entonces como el morfismo ψ es sobreyectivo, hay un elemento $e \in E$ tal que $\psi(e) = \psi'(e')$, y por lo tanto

$$\psi'(e' - u(e)) = \psi'(e') - \psi'(u(e)) = \psi(e) - \psi(e) = 0$$

porque el cuadrado de la derecha del último diagrama conmuta. Como la segunda fila es exacta, esto implica que existe $n \in N$ tal que $\phi'(n) = e' - u(e)$ y, por lo tanto, que

$$u(e + \phi(n)) = u(e) + u(\phi(n)) = u(e) + \phi'(n) = u(e) + e' - u(e) = e'$$

Esto nos dice que e' está en la imagen de u y nos permite concluir que u es sobreyectivo.

  - Supongamos que $e \in E$ es tal que $u(e) = 0$. Como $\psi(e) = \psi'(u(e)) = \psi'(0) = 0$, la exactitud de la primera fila del diagrama implica que existe $n \in N$ tal que $\phi(n) = e$. Tenemos entonces que $\phi'(n) = u(\phi(n)) = u(e) = 0$ y, como ϕ' es una función inyectiva, que $n = 0$: se sigue de esto que $e = \phi(n) = 0$ y, en definitiva, que el morfismo u es inyectivo.

Podemos considerar entonces el morfismo $v : E' \to E$ inverso de u. Como $u \circ \phi = \phi'$ y $\psi' \circ u = \psi$, tenemos que $\phi = v \circ \phi'$ y $\psi' = \psi \circ v$, de manera que conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "\phi'"] \arrow[d, equal] & E' \arrow[r, "\psi'"] \arrow[d, "v"] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "\phi"] & E \arrow[r, "\psi"] & M \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Vemos así que $\mathscr{E}' \sim \mathscr{E}$ y, por lo tanto, que la relación $\sim$ es simétrica.

- Finalmente, supongamos que $\mathscr{E}$, $\mathscr{E}'$ y $\mathscr{E}''$ son extensiones

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{\phi} E \xrightarrow{\psi} M \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{\phi'} E' \xrightarrow{\psi'} M \longrightarrow 0$$

y

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{\phi''} E'' \xrightarrow{\psi''} M \longrightarrow 0$$

de M por N tales que $\mathscr{E} \sim \mathscr{E}'$ y $\mathscr{E}' \sim \mathscr{E}''$, y sean $u : E \to E'$ y $u' : E' \to E''$ morfismos tales que conmutan los diagramas

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, equal] & E \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "u"] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "\phi'"] & E' \arrow[r, "\psi'"] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

y

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "\phi'"] \arrow[d, equal] & E' \arrow[r, "\psi'"] \arrow[d, "u'"] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "\phi''"] & E'' \arrow[r, "\psi''"] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Es inmediato verificar que entonces también conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, equal] & E \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "u' \circ u"] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "\phi''"] & E'' \arrow[r, "\psi''"] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

de manera que $\mathscr{E} \sim \mathscr{E}''$: la relación $\sim$ es, por lo tanto, transitiva.

Esto completa la prueba del lema. □

2.5.2. Si M y N son L-módulos, es inmediato verificar que

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ \mathrm{id}_N \end{smallmatrix}\right)} M \oplus N \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} \mathrm{id}_M & 0 \end{smallmatrix}\right)} M \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta: la llamamos la ***extensión trivial*** de M por N. Decimos que una extensión $\mathscr{E}$ de M por N ***se parte*** si es equivalente a la extensión trivial de M por N.

La siguiente proposición nos permite reconocer las extensiones que se parten:

Proposición. *Sea L un álgebra de Lie y sea $\mathscr{E}$ una extensión de L-módulos*

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{\phi} E \xrightarrow{\psi} M \longrightarrow 0$$

Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) *Existe un morfismo de L-módulos $s : M \to E$ tal que $\psi \circ s = \mathsf{id}_M$.*
(b) *Existe un morfismo de L-módulos $r : E \to N$ tal que $r \circ \phi = \mathsf{id}_N$.*
(c) *La extensión $\mathscr{E}$ se parte.*

Demostración. Supongamos que vale (a), de manera que existe un morfismo de L-módulos $s : M \to E$ tal que $\psi \circ s = \mathsf{id}_M$. Como

$$\psi \circ (\mathsf{id}_E - s \circ \psi) = \psi - \psi \circ s \circ \psi = \psi - \mathsf{id}_E \circ \psi = 0,$$

la imagen de $\mathsf{id}_E - s \circ \psi$ está contenida en el núcleo de ψ y existe una función $r : E \to M$ tal que $\phi \circ r = \mathsf{id}_E - s \circ \psi$, es decir, tal que

$$\mathsf{id}_E = \phi \circ r + s \circ \psi.$$

Por un lado, de esto se deduce que

$$\phi = \phi \circ r \circ \phi + s \circ \psi \circ \phi = \phi \circ r \circ \phi,$$

de manera que $\phi \circ (\mathsf{id}_N - r \circ \phi) = 0$: como ϕ es una función inyectiva, esto implica que $r \circ \phi = \mathsf{id}_N$ y, por lo tanto, que vale (b). Por otro, componiendo a izquierda con r vemos que

$$r = r \circ \phi \circ r + r \circ s \circ \psi = r + r \circ s \circ \psi,$$

con lo que $r \circ s \circ \psi = 0$ y, como ψ es sobreyectiva, $r \circ s = 0$. Consideremos las funciones

$$u = \begin{pmatrix} \psi \\ r \end{pmatrix} : E \to M \oplus N, \qquad\qquad v = \begin{pmatrix} s & \phi \end{pmatrix} : M \oplus N \to M.$$

Es inmediato verificar, con lo que sabemos de las funciones r y s, que u y v son isomorfismos inversos y que conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, equal] & E \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "u"] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "\binom{0}{\mathsf{id}_N}"] & M \oplus N \arrow[r, "(\mathsf{id}_M\ 0)"] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \tag{8}$$

Vemos así que vale la extensión $\mathscr{E}$ es equivalente a la extensión trivial de M por N y que, por lo tanto, se parte.

Supongamos ahora que vale la afirmación (c) del enunciado y sea $u : E \to M \oplus N$ un morfismo de L-módulos tal que conmuta el diagrama (8). Sea $p = \begin{pmatrix} 0 & \mathsf{id}_N \end{pmatrix} : M \oplus N \to N$ la proyección canónica en el primer sumando y consideremos la composición $r = p \circ u : E \to N$. Esta función satisface la condición de (b), ya que

$$r \circ \phi = \begin{pmatrix} 0 & \mathsf{id}_N \end{pmatrix} \circ u \circ \phi = \begin{pmatrix} 0 & \mathsf{id}_N \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ \mathsf{id}_N \end{pmatrix} = \mathsf{id}_N.$$

Mostremos finalmente que $(b) \Rightarrow (a)$. Supongamos que la condición (b) vale y sea $r : E \to N$ un morfismo de L-módulos tal que $r \circ \phi = \mathrm{id}_N$. En ese caso es

$$(\mathrm{id}_E - \phi \circ r) \circ \phi = \phi - \phi \circ r \circ \phi = \phi - \phi \circ \mathrm{id}_N = 0,$$

así que como ψ es un conúcleo de ϕ, existe un morfismo de L-módulos $s : M \to E$ tal que $s \circ \psi = \mathrm{id}_E - \phi \circ r$. En particular, componiendo a izquierda con ψ tenemos que

$$\psi \circ s \circ \psi = \psi - \psi \circ \phi \circ r = \psi = \mathrm{id}_M \circ \psi$$

y, como ψ es sobreyectiva, esto nos dice que $\psi \circ s = \mathrm{id}_M$, esto es, que la condición (a) se cumple. Esto completa la prueba de la proposición. □

2.5.3. Sea L un álgebra de Lie, sean M y N dos L-módulos y sea $\mathscr{E}$ una extensión

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{\phi} E \xrightarrow{\psi} M \longrightarrow 0$$

de M por N. Podemos construir a partir de $\mathscr{E}$ una nueva sucesión exacta corta $\tilde{\mathscr{E}}$ de L-módulos

$$0 \longrightarrow \hom_{\Bbbk}(M, N) \xrightarrow{\phi_*} \hom_{\Bbbk}(M, E) \xrightarrow{\psi_*} \hom_{\Bbbk}(M, M) \longrightarrow 0$$

en la que $\phi_*(f) = \phi \circ f$ si $f \in \hom_{\Bbbk}(M, N)$ y $\psi_*(g) = \psi \circ g$ si $g \in \hom_{\Bbbk}(M, M)$, y entonces tenemos un morfismo de conexión

$$\partial^0_{\tilde{\mathscr{E}}} : H^0(L, \hom_{\Bbbk}(M, M)) \to H^1(L, \hom_{\Bbbk}(M, N)).$$

Bajo la identificación que introdujimos en la Proposicion 2.3.2, tenemos que

$$H^0(L, \hom_{\Bbbk}(M, M)) = \hom_{\Bbbk}(M, M)^L = \hom_L(M, M)$$

y, en particular, podemos ver a la función $\mathrm{id}_M : M \to M$ como un elemento del espacio vectorial $H^0(L, \hom_{\Bbbk}(M, M))$. La ***clase característica*** $\chi(\mathscr{E})$ de la extensión $\mathscr{E}$ es el elemento

$$\chi(\mathscr{E}) = \partial^0_{\tilde{\mathscr{E}}}(\mathrm{id}_M) \in H^1(L, \hom_{\Bbbk}(M, N)).$$

Esta clase de cohomología depende solamente de la clase de equivalencia de la extensión $\mathscr{E}$:

Lema. *Sea L un álgebra de álgebra de Lie y sean M y N dos L-módulos. Si $\mathscr{E}$ y $\mathscr{E}'$ son dos extensiones equivalentes de M por N, entonces $\chi(\mathscr{E}) = \chi(\mathscr{E}')$.*

Demostración. Sean $\mathscr{E}$ y $\mathscr{E}'$ las extensiones

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{\phi} E \xrightarrow{\psi} M \longrightarrow 0$$

y

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{\phi'} E' \xrightarrow{\psi'} M \longrightarrow 0$$

de M por N y supongamos que $\mathscr{E} \sim \mathscr{E}'$, de manera que existe un morfismo $u : E \to E'$ tal que conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, equal] & E \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "u"] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "\phi'"] & E' \arrow[r, "\psi'"] & M \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Es inmediato verificar que entonces también conmuta el diagrama de filas exactas

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathsf{hom}_{\Bbbk}(M,N) \arrow[r, "\phi_*"] \arrow[d, equal] & \mathsf{hom}_{\Bbbk}(M,E) \arrow[r, "\psi_*"] \arrow[d, "u_*"] & \mathsf{hom}_{\Bbbk}(M,M) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathsf{hom}_{\Bbbk}(M,N) \arrow[r, "\phi'_*"] & \mathsf{hom}_{\Bbbk}(M,E') \arrow[r, "\psi'_*"] & \mathsf{hom}_{\Bbbk}(M,M) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

y, de acuerdo a la Proposición 2.2.4, tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} H^0(L, \mathsf{hom}_{\Bbbk}(M,M)) \arrow[r, "\partial^0_{\tilde{\mathscr{E}}}"] \arrow[d, equal] & H^1(L, \mathsf{hom}_{\Bbbk}(M,N)) \arrow[d, equal] \\ H^0(L, \mathsf{hom}_{\Bbbk}(M,M)) \arrow[r, "\partial^0_{\tilde{\mathscr{E}}'}"] & H^1(L, \mathsf{hom}_{\Bbbk}(M,N)) \end{tikzcd}$$

Es claro, entonces, que

$$\chi(\mathscr{E}) = \partial^0_{\tilde{\mathscr{E}}}(\mathsf{id}_M) = \partial^0_{\tilde{\mathscr{E}}'}(\mathsf{id}_M) = \chi(\mathscr{E}'),$$

como queremos. □

2.5.4. Estamos en posición de probar el resultado central de esta sección:

Proposición. *Sea L un álgebra de Lie y sean M y N dos L-módulos. Una extensión $\mathscr{E}$ de M por N se parte si y solamente si su clase característica $\chi(\mathscr{E})$ es el elemento nulo de $H^1(L, \mathsf{hom}_{\Bbbk}(M,N))$.*

Demostración. Sea $\mathscr{E}$ una extensión

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{\phi} E \xrightarrow{\psi} M \longrightarrow 0$$

de M por N y supongamos primero que la extensión $\mathscr{E}$ se parte, de manera que existe un morfismo de L-módulos $s : M \to E$ tal que $\psi \circ s = \mathsf{id}_M$. Sea $\tilde{\mathscr{E}}$ la extensión

$$0 \longrightarrow \mathsf{hom}_{\Bbbk}(M,N) \xrightarrow{\phi_*} \mathsf{hom}_{\Bbbk}(M,E) \xrightarrow{\psi_*} \mathsf{hom}_{\Bbbk}(M,M) \longrightarrow 0$$

Esta extensión se parte: en efecto, la función lineal

$$s_* : g \in \mathsf{hom}_{\Bbbk}(M,M) \mapsto s \circ g \in \mathsf{hom}_{\Bbbk}(M,E),$$

es un morfismo de L-módulos tal que

$$\psi_* \circ s_* = \mathrm{id}_{\mathrm{hom}_{\Bbbk}(M,E)}. \tag{9}$$

A partir de la extensión $\tilde{\mathscr{E}}$ construida arriba y gracias a la Proposición 2.2.4, obtenemos una sucesión exacta

$$H^1(L, \mathrm{hom}_{\Bbbk}(M,E)) \xrightarrow{H^0(\psi_*)} H^0(L, \mathrm{hom}_{\Bbbk}(M,M)) \xrightarrow{\partial^0_{\tilde{\mathscr{E}}}} H^1(L, \mathrm{hom}_{\Bbbk}(M,N)). \tag{10}$$

Ahora bien, de la igualdad (9) se deduce que

$$H^0(\psi_*) \circ H^0(s_*) = H^0(\psi_* \circ s_*) = H^0(\mathrm{id}_{\mathrm{hom}_{\Bbbk}(M,E)}) = \mathrm{id}_{H^1(L,\mathrm{hom}_{\Bbbk}(M,E))}$$

y, en particular, que $H^0(\psi_*)$ es una función sobreyectiva. La exactitud de la sucesión (10) entonces, implica que el morfismo de conexión $\partial^0_{\tilde{\mathscr{E}}}$ es nulo y, en consecuencia, que $\chi(\mathscr{E}) = \partial^0_{\tilde{\mathscr{E}}}(\mathrm{id}_{M''}) = 0$. Esto muestra que la condición del enunciado es necesaria.

Veamos que también es suficiente. Para ello, supongamos ahora que la extesión $\mathscr{E}$ es tal que $\chi(\mathscr{E})$ es el elemento nulo de $H^1(L, \mathrm{hom}_{\Bbbk}(M,N))$. Como la función lineal ψ es sobreyectiva, sabemos del álgebra lineal que existe una función lineal $s : M \to E$ tal que $\psi \circ s = \mathrm{id}_M$. Esta función no es necesariamente un morfismo de L-módulos y podemos "medir" cualitativamente esta falla vía la función $q : L \times M \to E$ tal que

$$q(x_1, m) = x_1 \cdot s(m) - s(x_1 \cdot m)$$

cada vez que $x_1 \in L$ y $m \in M$, en el sentido de que la función s es un morfismo de L-módulos exactamente cuando q es idénticamente nula. Ahora bien, como $\psi \circ s = \mathrm{id}_M$ y ψ sí es un morfismo de L-módulos, es inmediato verificar que la composición $\psi \circ q$ es idénticamente nula: esto significa que la función q toma valores en el núcleo de ψ. Como $\mathscr{E}$ es una sucesión exacta, existe entonces una función $\tilde{q} : L \times M \to N$ tal que $q = \phi \circ \tilde{q}$ y es fácil ver que $\tilde{q}$ es una función bilineal.

Consideremos la función $\hat{q} : L \to \mathrm{hom}_{\Bbbk}(M,N)$ tal que

$$\hat{q}(x_1)(m) = \tilde{q}(x_1, m)$$

para todo $x_1 \in L$ y todo $m \in M$. Podemos ver a s como un elemento de $C^0(L, \mathrm{hom}_{\Bbbk}(M,E))$ y a $\hat{q}$ como uno de $C^1(L, \mathrm{hom}_{\Bbbk}(M,N))$. Afirmamos que $\hat{q}$ es, de hecho, un 1-cociclo y que su clase en $H^1(L, \mathrm{hom}_{\Bbbk}(M,N))$ es precisamente $\partial^0_{\tilde{\mathscr{E}}}(\mathrm{id}_M)$, esto es, que

$$\chi(\mathscr{E}) = \hat{q} + B^1(L, \mathrm{hom}_{\Bbbk}(M,N)). \tag{11}$$

De acuerdo a la construcción que hicimos en la prueba de la Proposición 2.2.4, para verificar esto hay que mostrar que

$$(\psi_*)^0_*(s) = \mathrm{id}_M, \qquad d^0_{\mathrm{hom}_{\Bbbk}(M,E)}(s) = (\phi_*)^1_*(\hat{q}).$$

$$
\begin{tikzcd}
 & C^0(L, \mathsf{hom}_{\Bbbk}(M'', M)) & C^0(L, \mathsf{hom}_{\Bbbk}(M'', M'')) \\
 & s \arrow[u, phantom, sloped, "\in"] \arrow[r, mapsto, "(\psi_*)^0_*"] \arrow[d, mapsto, "d^0_{\mathsf{hom}_{\Bbbk}(M'',M)}"] & \mathsf{id}_{M''} \arrow[u, phantom, sloped, "\in"] \\
\hat{q} \arrow[r, mapsto, "(\phi_*)^1_*"] \arrow[d, phantom, sloped, "\in"] & \bullet \arrow[d, phantom, sloped, "\in"] & \\
C^1(L, \mathsf{hom}_{\Bbbk}(M'', M')) & C^1(L, \mathsf{hom}_{\Bbbk}(M'', M)) &
\end{tikzcd}
$$

Figura 2.1. El cálculo de $\partial^0_{\tilde{\mathscr{E}}}(\mathsf{id}_{M''})$ en la prueba de la Proposición 2.5.4.

La primera de estas igualdades es inmediata. Por otro lado, si $x_1 \in L$ y $m \in M$, se tiene que

$$d^0_{\mathsf{hom}_{\Bbbk}(M,E)}(s)(x_1)(m) = (x_1 \cdot s)(m) = x_1 \cdot s(m) - s(x_1 \cdot m) = q(x_1, m)$$

y

$$(\phi_*)^1_*(\hat{q})(x_1)(m) = \phi_*(\hat{q}(x_1))(m) = \phi(\hat{q}(x_1)(m)) = \phi(\tilde{q}(x_1, m)) = q(x_1, m),$$

de manera que la segunda también vale.

Nuestra hipótesis es que $\chi(\mathscr{E}) = 0$ en $H^1(L, \mathsf{hom}_{\Bbbk}(M, N))$ y, en vista de la igualdad (11) que acabamos de probar, esto significa que $\hat{q} \in B^1(L, \mathsf{hom}_{\Bbbk}(M, N))$: existe entonces

$$\lambda \in C^0(L, \mathsf{hom}_{\Bbbk}(M, N)) = \mathsf{hom}_{\Bbbk}(M, N)$$

tal que $d^0_{\mathsf{hom}_{\Bbbk}(M,N)}\lambda = \hat{q}$, es decir, tal que para todo $x_1 \in L$ es

$$x_1 \cdot \lambda = \hat{q}(x_1).$$

Esta es una igualdad entre elementos de $\mathsf{hom}_{\Bbbk}(M, N)$, y nos dice que para cada $x_1 \in L$ y cada $m \in M$ vale que

$$x_1 \cdot \lambda(m) - \lambda(x_1 \cdot m) = \hat{q}(x_1)(m) = \tilde{q}(x_1, m),$$

de manera que, aplicando ϕ a cada miembro de esta igualdad y recordando que es éste un morfismo de L-módulos, se tiene en particular que

$$x_1 \cdot \phi(\lambda(m)) - \phi(\lambda(x_1 \cdot m)) = \phi(\tilde{q}(x_1, m)) = q(x_1, m) = x_1 \cdot s(m) - s(x_1 \cdot m)$$

o, equivalentemente,

$$x_1 \cdot (s - \phi \circ \lambda)(m) = (s - \phi \circ \lambda)(x_1 \cdot m).$$

Esto nos dice que la función lineal $s' = s - \phi \circ \lambda : M \to E$ es un morfismo de L-módulos. Como además

$$\psi \circ s' = \psi \circ s - \psi \circ \phi \circ \lambda = \mathsf{id}_M,$$

se trata de una sección de ϕ: esto prueba que la extensión $\mathscr{E}$ se parte $\square$

§6. Operadores de Casimir

2.6.1. Proposición. *Sea L un álgebra de Lie de dimensión finita, sea $B : L \times L \to \mathbb{k}$ una forma bilineal simétrica, invariante y no degenerada y sea $\mathscr{B} = (u_1, \dots, u_n)$ una base ordenada de L.*

(*i*) *Existe una única base ordenada $\mathscr{B}' = (v_1, \dots, v_n)$ de L tal que $B(x_i, x'_j) = \delta_{i,j}$ para cada elección de i y j en $\{1, \dots, n\}$.*

(*ii*) *Si $x \in L$ y $(c_{i,j}) \in M_n(\mathbb{k})$ es la matriz de escalares tal que $[u_i, x] = \sum_{j=1}^n c_{i,j} u_j$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, entonces $[x, v_i] = \sum_{j=1}^n c_{j,i} v_j$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$.*

Llamamos a la base $\mathscr{B}'$ cuya existencia se afirma en la primera parte de esta proposición la *base dual* de la base $\mathscr{B}$ con respect a la forma B.

Demostración. (*i*) Como B es una forma bilineal no degenerada, la función $\tilde{B} : L \to L^*$ tal que $\tilde{B}(x)(y) = B(x, y)$ para cada $x, y \in L$ es un isomorfismo de espacios vectoriales. Sea $\mathscr{B}^* = (\phi_1, \dots, \phi_n)$ la base de L^* dual a $\mathscr{B}$ y para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ sea v_i el elemento de L tal que $\tilde{B}(v_i) = \phi_i$. Es inmediato verificar que $\mathscr{B}'$ tiene la propiedad deseada, y que es la única base de L con esa propiedad es claro.

(*ii*) Sea $x \in L$, sea $(c_{i,j}) \in M_n(\mathbb{k})$ como en el enunciado, y sea $(d_{i,j}) \in M_n(\mathbb{k})$ la matriz de escalares tal que $[x, v_i] = \sum_{j=1}^n d_{i,j} v_i$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$.

Si $i, j \in \{1, \dots, n\}$, la invariancia de la forma de Killing implica que

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^n B(c_{i,k} u_k, v_j) = B([u_i, x], v_j) = B(u_i, [x, v_j]) = \sum_{k=1}^n B(u_i, d_{j,k} v_k) = d_{j,i}.$$

y esto es lo que afirma el enunciado. □

2.6.2. Proposición. *Sea L un álgebra de Lie de dimensión finita, sea $B : L \times L \to \mathbb{k}$ una forma bilineal simétrica, invariante y no degenerada, sea $\mathscr{B} = (u_1, \dots, u_n)$ una base de L y sea $\mathscr{B}' = (v_1, \dots, v_n)$ la base de L dual a $\mathscr{B}$ con respecto a la forma B.*

(*i*) *Si M es un L-módulo, entonces la función*

$$\Omega_{B,M} : m \in M \mapsto \sum_{i=1}^n u_1 \cdot v_i \cdot m \in M$$

es un morfismo de L-módulos que depende solamente de la forma B y el módulo M y no de la base $\mathscr{B}$ de L.

(*ii*) *Si $f : M \to N$ es un morfismo de L-módulos, entonces conmuta el diagrama*

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\Omega_{B,M}} & M \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ N & \xrightarrow{\Omega_{B,M}} & N \end{array}$$

Llamamos al morfismo $\Omega_{B,M}$ el *morfismo de Casimir* de M relativo a la forma bilineal B.

Demostración. (*i*) Sea M un L-modulo y sean $m \in M$ y $x \in L$. Sea $(c_{i,j}) \in M_n(\Bbbk)$ la matriz de escalares tal que $[u_i, x] = \sum_{j=1}^n c_{i,j} u_j$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, de manera que, según la Proposición 2.6.1*(ii)*, se tiene también $[x, v_i] = \sum_{j=1}^n c_{j,i} v_i$. Tenemos entonces que

$$\begin{aligned}
\Omega_{B,M}(x \cdot m) &= \sum_{i=1}^n u_i \cdot v_i \cdot x \cdot m \\
&= \sum_{i=1}^n u_i \cdot x \cdot v_i \cdot m - \sum_{i=1}^n u_i \cdot [x, v_i] \cdot m \\
&= \sum_{i=1}^n x \cdot u_i \cdot v_i \cdot m + \sum_{i=1}^n [u_i, x] \cdot v_u \cdot m - \sum_{i=1}^n u_i \cdot [x, v_i] \cdot m \\
&= x \cdot \Omega_{B,M}(m) + \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n c_{i,k} u_k \cdot v_i \cdot m - \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n c_{k,i} u_i \cdot v_k \cdot m \\
&= x \cdot \Omega_{B,M}(m).
\end{aligned}$$

Esto nos dice que $\Omega_{B,M}$ es un morfismo de L-módulos.

Supongamos ahora que $\bar{\mathscr{B}} = (\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n)$ es otra base ordenada de L. Sabemos que la matriz $(a_{i,j}) \in M_n(\Bbbk)$ tal que $\bar{u}_i = \sum_{k=1}^n a_{i,k} u_k$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ es inversible. Sea $(b_{i,j}) \in M_n(\Bbbk)$ su matriz inversa y para cada $j \in \{1, \dots, n\}$ sea $\bar{v}_j = \sum_{l=1}^n b_{l,j} v_l$. Claramente $\bar{\mathscr{B}}' = (\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n)$ es una base de L, y si i, $j \in \{1, \dots, n\}$ se tiene que

$$B(\bar{u}_i, \bar{v}_j) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{i,k} b_{l,j} B(u_l, v_l) = \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j} = \delta_{i,j},$$

de manera que $\bar{\mathscr{B}}'$ es la base dual de $\bar{\mathscr{B}}$ con respecto a la forma B. Si m im M, entonces

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \bar{u}_i \cdot \bar{v}_i \cdot m &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{i,k} b_{l,i}\, u_k \cdot v_l \cdot m = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{i,k} b_{l,i} \right) u_k \cdot v_l \cdot m \\
&= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \delta_{k,l}\, u_k \cdot v_l \cdot m = \sum_{i=1}^n u_i \cdot v_i \cdot m.
\end{aligned}$$

Esto muestra que la función $\Omega_{B,M}$ no depende de la base $\mathscr{B}$ de L usada para definirla.

(*ii*) Sea ahora que $f : M \to N$ es un morfismo de L-módulos. Para cada $m \in M$ se tiene que

$$f(\Omega_{B,M}(m)) = f\left(\sum_{i=1}^n u_i \cdot v_i \cdot m \right) = \sum_{i=1}^n f(u_i \cdot v_i \cdot m) = \sum_{i=1}^n u_i \cdot v_i \cdot f(m) = \Omega_{B,N}(f(m))$$

y entonces $f \circ \Omega_{B,M} = \Omega_{B,N} \circ f$, que es lo que afirma el enunciado. □

2.6.3. Si L es un álgebra de Lie de dimensión finita, $B : L \times L \to \Bbbk$ una forma bilineal simétrica, invariante y no degenerada y M un L-módulo, entonces hemos construido un morfismo $\Omega_{B,M} : M \to$ de L-módulos y, por lo tanto, para cada $p \geq 0$ tenemos una función lineal

$$H^p(\Omega_{B,M}) : H^p(L, M) \to H^p(L, M).$$

Proposición. *Sea L un álgebra de Lie de dimensión finita y sea $B : L \times L \to \Bbbk$ una forma bilineal simétrica, invariante y no degenerada. Si M es un L-módulo, entonces para todo $p \geq 0$ la función $H^p(\Omega_{B,M})$ es idénticamente nula.*

Demostración. Sea $\mathscr{B} = (u_1, \dots, u_n)$ una base ordenada de L, sea $\mathscr{B}' = (v_1, \dots, v_n)$ la base de L dual a $\mathscr{B}$ con respecto a la forma B y sea M un L-módulo. Para cada $p \geq 1$ sea

$$h^p : C^p(L, M) \to C^{p-1}(L, M)$$

la función tal que

$$h^p f(x_1, \dots, x_{p-1}) = \sum_{i=1}^{n} u_i \cdot f(v_i, x_1, \dots, x_{p-1})$$

cada vez que $x_1, \dots, x_{p-1} \in L$, y por comodidad convengamos en que $h^p : C^p(L, M) \to C^{p-1}(L, M)$ es la función nula cada vez que $p \leq 0$. Esta función es un morfismo de L-módulos: en efecto, si $y \in L$, $f \in C^p(L, M)$ y $x_1, \dots, x_{p-1} \in L$, se tiene que

$$\begin{aligned}
h^p(y \cdot f)(x_1, \dots, x_{p-1}) &= \sum_{i=1}^{n} u_i \cdot (y \cdot f)(v_i, x_1, \dots, x_{p-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} u_i \cdot y \cdot f(v_i, x_1, \dots, x_{p-1}) - \sum_{i=1}^{n} u_i \cdot f([y, v_i], x_1, \dots, x_{p-1}) \\
&\qquad - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p-1} u_i \cdot f(v_i, x_1, \dots, [y, x_i], \dots, x_{p-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} y \cdot u_i \cdot f(v_i, x_1, \dots, x_{p-1}) - \sum_{i=1}^{n} [y, u_i] \cdot f(v_i, x_1, \dots, x_{p-1}) \\
&\qquad - \sum_{i=1}^{n} u_i \cdot f([y, v_i], x_1, \dots, x_{p-1}) - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p-1} u_i \cdot f(v_i, x_1, \dots, [y, x_i], \dots, x_{p-1})
\end{aligned}$$

y, en vista de la Proposición 2.6.1*(ii)*, la segunda de estas sumas se cancela con la tercera, de manera que todo es

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{n} y \cdot u_i \cdot f(v_i, x_1, \dots, x_{p-1}) - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p-1} u_i \cdot f(v_i, x_1, \dots, [y, x_i], \dots, x_{p-1}) \\
&= y \cdot h^p f(x_1, \dots, x_{p-1}) - \sum_{j=1}^{p-1} h^p f(x_1, \dots, [y, x_j], \dots, x_{p-1}) \\
&= (y \cdot h^p f)(x_1, \dots, x_{p-1}).
\end{aligned}$$

Por otro lado, es inmediato verificar que para cada $p \geq 1$ y cada $f \in C^p(L, M)$ e $y \in L$ se tiene que

$$h^p_M(f) \llcorner y = h^{p-1}_M(f \llcorner y).$$

Mostremos ahora que para cada $p \geq 0$ se tiene que

$$d_M^{p-1} \circ h^p + h^{p+1} \circ d_M^p = (\Omega_{B,M})_*^p. \tag{12}$$

Si $p = 0$ y $f \in C^0(L, M)$, entonces $h^p f = 0$, así que

$$(d_M^{p-1} h^0 + h^1 d_M^0)(f) = h^1 d_M^0(f) = \sum_{i=1}^n u_i \cdot d_M^0 f(v_i) = \sum_{i=1}^n u_i \cdot v_i \cdot f = (\Omega_{B,M})_*^0(f),$$

así que la igualdad vale en ese caso. Si $p \geq 0$, $f \in C^{p+1}(L, M)$ y suponemos inductivamente que la igualdad (12) vale, entonces para todo $y \in L$ es

$$\begin{aligned}
(d_M^p h^{p+1} + h^{p+2} d_M^{p+1})(f) \llcorner y &= d_M^p h^{p+1} f \llcorner y + h^{p+2} d_M^{p+1} f \llcorner y \\
&= d_M^{p-1}(h^{p+1} f \llcorner y) + (-1)^p y \cdot h^{p+1} f + h^{p+1}(d_M^{p+1} f \llcorner y) \\
&= d_M^{p-1} h^p (f \llcorner y) + (-1)^p y \cdot h^{p+1} f + h^{p+1} d_M^p (f \llcorner y) + (-1)^{p+1} h^{p+1}(y \cdot f).
\end{aligned}$$

El segundo y el cuarto término de esta suma se cancelan mutuamente, porque h^{p+1} es un morfismo de L-módulos y la hipótesis inductiva implica entonces que la suma es

$$\begin{aligned}
&= (\Omega_{B,M})_*^p (f \llcorner y) \\
&= (\Omega_{B,M})_*^p (f) \llcorner y.
\end{aligned}$$

Como esto vale cualquiera sea $y \in L$, nos permite concluir que, de hecho,

$$(d_M^p h^{p+1} + h^{p+2} d_M^{p+1})(f) = (\Omega_{B,M})_*^p (f)$$

y completa la inducción.

Sea $p \geq 0$ y sea $f \in Z^p(L, M)$. De acuerdo la definición de la función lineal $H^p(\Omega_{B,M})$ y la igualdad (12), tenemos que

$$\begin{aligned}
H^p(\Omega_{B,M})(f + B^p(L, M)) &= (\Omega_{B,M})_p^*(f) + B^p(L, M) \\
&= d_M^{p-1} h^p f + h^{p+1} d_M^p f + B^p(L, M) \\
&= 0 + B^p(L, M),
\end{aligned}$$

ya que, como f es un p-cociclo, $d_M^p f = 0$, y esto es precisamente lo que afirma la proposición. □

§7. Completa reducibilidad

2.7.1. Proposición. *Sea L un álgebra de Lie semisimple de dimensión finita. Si M es un L-módulo de dimensión finita simple y no trivial, entonces $H^p(L, M) = 0$ para todo $p \geq 0$.*

Demostración. Sea M un L-módulo de dimensión finita simple y no trivial y sea $\rho : L \to \mathfrak{gl}(M)$ la representación correspondiente. El núcleo $J = \ker \rho$ es un ideal de L, así que la Proposición 1.10.6 nos dice que hay otro ideal I en L tal que $L = I \oplus J$ y que tanto $\ker \rho$ como I son semisimples. Como el módulo M no es trivial, el morfismo ρ no es nulo y, por lo tanto, J es un ideal propio de L y esto implica que I es un ideal no nulo.

Sea $B_M : I \times I \to \Bbbk$ la forma bilineal asociada a M visto como I-módulo. Si vemos a M como un $I^\perp$-módulo, es fiel y la forma bilineal $I^\perp \times I^\perp \to \Bbbk$ asociada es idénticamente nula: la Proposición 1.10.3 nos dice que $I^\perp$ es soluble y, como I es semisimple, esto implica que $I^\perp = 0$, esto es, que B_M es no degenerada.

Sea $B_J : J \times J \to \Bbbk$ la forma de Killing de J, y consideremos la única forma bilineal $B : L \times L \to \Bbbk$ cuyas restricciones a I y a J son B_M y B_J, respectivamente, y tal que $B(x, y) = 0$ siempre que $x \in I$ e $y \in J$. Es inmediato verificar que B es simétrica, invariante y no degenerada, y podemos entonces considerar el morfismo de L-módulos $\Omega_{B,M} : M \to M$ construido en la Proposición 2.6.2 y los correspondientes morfismos inducidos $H^p(\Omega_{B,M}) : H^p(L, M) \to H^p(L, M)$, que son todos nulos, de acuerdo a la Proposición 2.6.3.

Para probar que $H^p(L, M) = 0$ para todo $p \geq 0$ bastará entonces que probemos que $\Omega_{B,M}$ es un isomorfismo, ya que en ese caso los morfismos $H^p(\Omega_{B,M})$ también lo serán y la única forma en que pueden ser a la vez isomorfismos y nulos es que sus dominios sean nulos.

Sean $n = \dim L$ y $m = \dim I$, sea $\mathscr{B} = (u_1, \dots, u_n)$ una base ordenada de L tal que $(u_1, \dots, u_m)$ es una de I y sea $\mathscr{B}' = (v_1, \dots, v_n)$ la base dual de $\mathscr{B}$ con respecto a la forma bilineal B. Como I y J son ortogonales con respecto a la forma B, es inmediato que $(v_1, \dots, v_m)$ es la base de I dual a $(u_1, \dots, u_m)$ con respecto a la forma $B_{I,M}$. Se sigue de esto, entonces, que

$$\operatorname{tr} \Omega_{B,M} = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{tr}((u_i)_M \circ (v_i)_M) = \sum_{i=1}^{m} \operatorname{tr}((u_i)_M \circ (v_i)_M) = \sum_{i=1}^{m} B_{I,M}(u_i, v_i) = \dim I$$

y, como nuestro cuerpo $\Bbbk$ tiene característica nula, vemos que $\operatorname{tr} \Omega_{B,M} \neq 0$ y, por lo tanto, que el morfismo de L-módulos $\Omega_{B,M} : M \to M$ no nulo. Como M es simple, el Lema de Schur implica entonces que se trata de un isomorfismo, como queremos. □

2.7.2. Proposición. *Sea L un álgebra de Lie semisimple e dimensión finita. Si M es un L-módulo de dimensión finita, entonces $H^1(L, M) = 0$.*

Demostración. Mostremos primero que $H^1(L, M) = 0$ siempre que M es simple. Si M es simple y no trivial, esto es parte de lo que afirma la Proposición 2.7.1. Resta entonces considerar el caso en el que M es trivial. Si $D : L \to M$ es una derivación de L con valores en M, para cada $x, y \in L$ se tiene que

$$D([x, y]) = x \cdot D(y) - y \cdot D(x)$$

y el segundo miembro de esta igualdad se anula porque M es un L-módulo trivial: esto nos dice que D se anula sobre L^2 y, como L es semisimple y, por lo tanto, perfecta, sobre L. Vemos así que $\mathrm{Der}(L, M) = 0$ y, de acuerdo a la Proposición 2.3.4, esto implica que $H^1(L, M) = 0$.

Probemos ahora la proposición. Sea M un L-módulo de dimensión finita arbitrario y mostremos que $H^1(LM) = 0$. Procedemos inductivamente, observando que cuando $M = 0$ no hay nada que hacer. Sea entonces M un L-módulo de dimensión finita no nulo. Fijemos un submódulo propio $M' \subsetneq M$ maximal, de manera que tenemos una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M/M' \longrightarrow 0$$

en la que M/M' es un L-módulo simple y, por lo tanto, otra para la cohomología,

$$H^1(L, M') \longrightarrow H^1(L, M) \longrightarrow H^1(L, M/M')$$

La hipótesis inductiva nos dice que $H^1(L, M') = 0$, ya que $\dim M' < \dim M$, y ya probamos que $H^1(L, M/M') = 0$ al principio, asi que podemos contruir que $H^1(L, M)$, como queremos. $\square$

2.7.3. Sea L un álgebra de Lie. Un L-módulo M es ***completamente reducible*** si cada vez que N es un submódulo de M existe otro P tal que $M = N \oplus P$.

Proposición. *Sea L un álgebra de Lie semisimple de dimensión finita. Todo L-módulo de dimensión finita es completamente reducible.*

Demostración. Sea M un L-módulo de dimensión finita y sea $N \subseteq M$ un submódulo. Tenemos una extensión $\mathscr{E}$ de M/N por N,

$$0 \longrightarrow N \hookrightarrow M \xrightarrow{\pi} M/N \longrightarrow 0$$

y la correspondiente clase característica $\chi(\mathscr{E}) \in H^1(L, \hom_{\Bbbk}(M/N, N))$. Como M tiene dimensión finita, el L-módulo $\hom_{\Bbbk}(M/N, N)$ también y la Proposición **??** nos dice que el espacio de cohomología $H^1(L, \hom_{\Bbbk}(M/N, N))$ es nulo. En particular, vemos así que $\chi(\mathscr{E}) = 0$ y, de acuerdo a la Proposición 2.5.4, que la extensión $\mathscr{E}$ se parte. Existe, entonces, un morfismo de L-módulos $s : M/N \to M$ tal que $\pi \circ s = \mathrm{id}_{M/N}$. Es inmediato verificar que el submódulo $P = s(M/N)$ es tal que $M = N \oplus P$, y esto prueba que M es completamente reducible. $\square$

2.7.4. Corolario. *Sea L un álgebra de Lie semisimple de dimensión finita. Todo L-módulo de dimensión finita es suma directa de submódulos simples.*

Demostración. Sea M un L-módulo de dimensión finita y probemos el corolario por inducción con respecto a la dimensión de M. Si M es nulo, el resultado es evidente. Si M tiene dimensión positiva, existe en M un submódulo N propio maximal y, en vista de la Proposición 2.7.3, otro P tal que $M = N \oplus P$. Como N es maximal en M y $P \cong M/N$, es claro que P es simple. Por otro lado, como N tiene dimensión estrictamente menor que la de M, sabemos inductivamente que hay submódulos simples $S_1, \dots, S_n$ en N tales que $N = \bigoplus_{i=1}^n S_i$. Por supuesto, esto nos dice que $M = \bigoplus_{i=1}^n S_i \oplus P$ y, en definitiva, que M es suma directa de submódulos simples. $\square$

§8. El teorema de Levi-Malcev

2.8.1. Proposición. *Sea L uh álgebra de Lie de dimensión finita semisimple. Para todo L-módulo M de dimensión finita se tiene que $H^2(L, M) = 0$.*

Demostración. La prueba de esta proposición procede exactamente igual que la de la Proposición **??**, salvo que ahora tenemos que mostrar que $H^2(L, \Bbbk) = 0$. Haremos sólo esto, dejando la tarea de completar el argumento al lector.

Sea $f \in C^2(L, \Bbbk)$ un 2-cociclo, de manera que $f : L \times L \to \Bbbk$ es una función bilineal alternada tal que cada vez que x, y, $z \in L$ se tiene que

$$d_k^2 k f(x, y, z) = f([x, y], z) - f([x, z], y) - f([y, z], x) = 0. \tag{13}$$

Consideremos el espacio vectorial $M = L \oplus \Bbbk$ y la acción $\cdot : L \times M \to M$ de L sobre M tal que

$$x \cdot (y, \lambda) = ([x, y], f(x, y))$$

para cada $x \in L$ y cada $(y, \lambda) \in M$. Es fácil verificar, usando la igualdad (13), que con esta acción M es un L-módulo y que las funciones $\phi : \lambda \in \Bbbk \mapsto (0, \lambda) \in M$ y $\psi : (x, \lambda) \in M \mapsto x \in L$ son morfismos de L-módulos. Tenemos entonces una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \Bbbk \xrightarrow{\phi} M \xrightarrow{\psi} L \longrightarrow 0$$

Los resultados de la sección anterior nos dicen que ésta sucesión exacta se parte, esto es, que existe un morfismo de L-módulos $s : L \to M$ tal que

$$\psi \circ s = \mathrm{id}_L. \tag{14}$$

Hay funciones lineales $\alpha : L \to L$ y $\beta : L \to \Bbbk$ tales que $s(x) = (\alpha(x), \beta(x))$ para todo $x \in L$, y la condición (14) implica inmediatamente que $\alpha = \mathrm{id}_L$. Ahora bien, que la función s sea un morfismo de L-módulos significa que siempre que x, $y \in L$ se tiene que

$$([x, y], \beta([x, y]) = s([x, y]) = x \cdot s(y) = x \cdot (y, \beta(y)) = ([x, y], f(x, y))$$

y, en particular, que

$$f(x, y) = \beta([x, y]) = d_{\Bbbk}^1 \beta(x, y).$$

Esto nos dice que $f = d_{\Bbbk}^1$, esto es, que f es un 1-coborde y, en definitiva, que $H^1(L, \Bbbk) = 0$. $\square$

2.8.2. Proposición. *Sea L un álgebra de Lie de dimensión finita semisimple. Si*

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\phi} K \xrightarrow{\psi} L \longrightarrow 0$$

es una extensión central de álgebras de Lie, entonces existe un morfismo de álgebras de Lie $s : L \to K$ tal que $\psi \circ s = \mathrm{id}_L$ y la subálgebra $P = s(L)$ de K, que es isomorfa a L, es tal que $K = P \ltimes I$.

Referencias

[Bia1898] Luigi Bianchi, *Sugli spazi a tre dimensioni che ammettono un gruppo continuo di movimenti*, Memorie di Matematica e di Fisica della Societa Italiana delle Scienze, Serie Terza **11** (1898), 267–352. ↑37