ÁLGEBRA 3

Segundo cuatrimestre — 2014

Práctica 6: Aplicaciones

Construcciones con regla y compás

Recordemos que un número real α es *constructible con regla y compás* si existe una torre de cuerpos $\mathbb{Q} = F_0 \subset F_1 \subset \ldots \subset F_n$ con $\alpha \in F_n$ y $[F_i : F_{i-1}] = 2$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$.

1.1. Un número real α es constructible sii α es algebraico sobre $\mathbb{Q}$ y el grado de la clausura normal de $\mathbb{Q}(\alpha)$ sobre $\mathbb{Q}$ es una potencia de 2.

1.2. De una caracterización de todos los números $n \in \mathbb{N}$ tales que $\cos \frac{2\pi}{n}$ es constructible. Obsérvese que la constructibilidad de este número es equivalente a la constructibilidad de un polígono regular de n lados con regla y compás.

1.3. Dé un procedimiento para construir un pentágono regular con regla y compás.

1.4. Un ángulo de n grados es constructible con regla y compás sii n es divisible por 3.

1.5. Un ángulo θ es trisecable con regla y compás sii el polinomio $4X^3-3X-\cos(\theta)$ es reducible sobre $\mathbb{Q}(\cos(\theta))$.

1.6. Dé explicitamente una construcción para la trisección de un ángulo de $\frac{3\pi}{7}$ usando regla y compás.

1.7. Decida si es posible construir con regla y compás un triángulo isósceles cuyos vértices estén sobre la circunferencia unitaria y cuya área sea 1.

Discriminantes

2.8. Sea K un cuerpo, $\bar{K}$ una clausura algbraica de K, $f \in K[X]$ un polinomio mónimo no constante de grado n, y $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \bar{K}$ sus raíces. Recordemos que el discriminante de f es la cantidad

$$\Delta(f) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha_i - \alpha_j)^2.$$

(a) Si $f = X^2 + bX + c$, entonces $\Delta(f) = b^2 - 4c$.
(b) Si $f = X^3 + bX + c$, entonces $\Delta(f) = -4b^3 - 27c^2$.
(c) Si $f = X^4 + bX^2 + c$, entonces $\Delta(f) = 16c(4c - b^2)^2$.
(d) Si $f = X^5 + bX + c$, entonces $\Delta(f) = 256b^5 + 3125c^4$.

2.9. (a) Sea $E/\mathbb{Q}$ una extensión de grado n, sea $\alpha \in E$ tal que $E = \mathbb{Q}(\alpha)$ y sea $f \in \mathbb{Q}[X]$ el polinomio minimal de α sobre $\mathbb{Q}$. Muestre que

$$\Delta(f) = (-1)^{n(n-1)/2} N_{E/\mathbb{Q}}(f'(\alpha)).$$

(b) Si $n \geq 2$ y $f = X^n + bX + c$ con $b, c \in \mathbb{Q}$, entonces

$$\Delta(f) = (-1)^{n(n-1)/2}(n^n c^{n-1} + (1-n)^{n-1} b^n).$$

2.10. Sea K un cuerpo, sean $t_1, \dots, t_n$ algebraicamente independientes sobre K y sean $s_1, \dots, s_n$ los polinomios simétricos elementales en los $t_1, \dots, t_n$. Sean $E = K(t_1, \dots, t_n)$ y $F = K(s_1, \dots, s_n) \subseteq E$.

(a) Si la característica de K no es dos, describa todas las subextensiones cuadráticas de E/F.

(b) Sean $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}$. Muestre que $t_1^{a_1} + \cdots + t_n^{a_n}$ genera a E sobre F sii $a_i \neq a_j$ siempre que $i \neq j$.

Solubilidad

3.11. (a) Todo grupo abeliano es soluble.

(b) Si p es un número primo, todo p-grupo es soluble.

(c) Para todo n, el grupo diedral D_n es soluble.

3.12. Muestre que las siguientes extensiones de cuerpos pueden obtenerse como extensiones radicales iteradas:

(a) La extensión $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}, i+\sqrt{3})/\mathbb{Q}$.

(b) La extensión $E/\mathbb{Q}$, con E el cuerpo de descomposición sobre $\mathbb{Q}$ del polinomio $(X^4-2)(X^2-5)$.

3.13. Si el grupo de Galois de un polinomio de grado n es isomofo a S_n, entonces ese polinomio es irreducible.

3.14. Sea p un número primo.

(a) Si $H \subseteq S_p$ es un subgrupo que contiene una transposición y un elemento de orden p, entonces $H = S_p$.

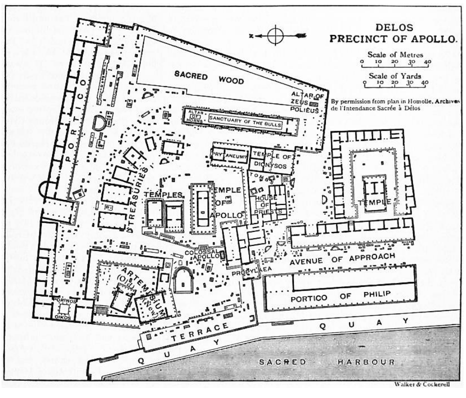
(b) Si $f \in \mathbb{Q}[X]$ es un polinomio irreducible de grado p que tiene exactamente dos raíces no reales, entonces el grupo de Galois de f es isomorfo a S_p.

(c) Sean $m, r \in \mathbb{N}$ tales que m es par y r es impar y mayor que 1. Sean $a_1 < \cdots < a_r$ enteros possitivos pares. El polinomio

$$(X^2+m)(X-a_1)\cdots(X-a_r)-2$$

es irreducible sobre $\mathbb{Q}$ y, si m es suficientemente grande, tiene exactamente dos raíces no reales.

(d) Existen polinomios en $\mathbb{Q}[X]$ de grado p y grupo de Galois isomorfo a S_p.



De acuerdo a Plutarco, Apolo mandó a los ciudadanos de la Isla de Delos una plaga. Estos preguntaron al oráculo de Delphi qué hacer para complacer al dios y resolver el problema: la respuesta fue que debían construir un cubo de volumen exactamente igual al doble del volumen del pedestal cúbico del altar de Apolo que estaba en ese templo. Los delios quedaron un poco confundidos y consultaron a Platón, que les explicó que lo que el dios quería era que dediquen más tiempo a estudiar geometría y matemática para calmar sus pasiones. Un buen lugar para estudiar geometría y matemática en esa época era la Academia, en Atenas, que había fundado unos años antes… el mismo Platón.