
ÁLGEBRA 3

Segundo cuatrimestre — 2014

Práctica 4: Extensiones galoisianas

1. Si E/K y L/K son dos extensiones isomorfas de un cuerpo K , entonces los correspondientes grupos de Galois son isomorfos. ¿Vale la recíproca?
2. Describa los grupos de Galois de los cuerpos de descomposición de los polinomios
 - (a) $X^p - a$ sobre \mathbb{Q} , con $p \in \mathbb{N}$ primo y $a \in \mathbb{N} \setminus \mathbb{N}^p$;
 - (b) $X^4 + 2$ sobre \mathbb{Q} y sobre $\mathbb{Q}(i)$;
 - (c) $\prod_{i=1}^n (X^2 - p_i)$ sobre \mathbb{Q} , con $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{N}$ primos distintos.
3. Sea $E = \mathbb{Q}(\sqrt{2 + \sqrt{2}})$. Calcule el grado de la extensión E/\mathbb{Q} y decida si se trata de una extensión normal. Describa $\text{Gal}(E/\mathbb{Q})$ y encuentre todas las subextensiones de grado 2 de E/\mathbb{Q} .
4. (a) Describa todas las subextensiones del cuerpo de descomposición del polinomio $(X^2 - 2)(X^2 - 3)(X^2 - 5)$ sobre \mathbb{Q} .
(b) Describa todas las subextensiones de grado 2 del cuerpo de descomposición del polinomio $X^4 - 2X^2 - 1$ sobre \mathbb{Q} .
5. Si K es un cuerpo de característica distinta de 2 y $\alpha, \beta \in K$ son tales que ni α , ni β ni $\alpha\beta$ son cuadrados en K , describa el grupo de Galois de la extensión $K(\alpha, \beta)/K$ con $\alpha^2 = \alpha$ y $\beta^2 = \beta$.
6. Sea K un cuerpo de característica distinta de 2.
 - (a) Si E/K es una extensión galoisiana tal que $\text{Gal}(E/K) \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$, existen $a, b \in E$ tales que $a^2, b^2 \in K$ y $E = K(a, b)$.
 - (b) Generalize este enunciado al caso en que $\text{Gal}(E/K) \cong \mathbb{Z}_2^n$ con $n \geq 1$.
7. Para cada $n \geq 1$ sea $\zeta_n \in \mathbb{C}$ una raíz n -ésima primitiva de la unidad.
 - (a) Si $n \geq 1$, $\Phi_n = m(\zeta_n, \mathbb{Q})$ es el polinomio minimal de ζ_n sobre \mathbb{Q} , y K/\mathbb{Q} es una extensión tal que Φ_n es irreducible en $K[X]$, entonces $K(\zeta_n)/K$ es una extensión galoisiana de grado $\varphi(n)$ y $\text{Gal}(K(\zeta_n)/K) \cong (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$.
 - (b) Si $K = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$, describa $\text{Gal}(K(\zeta_{20})/K)$.
8. (a) $\mathbb{Q}(\cos \frac{2\pi}{11})/\mathbb{Q}$ es la única subextensión de grado 5 de $\mathbb{Q}(\zeta_{11})/\mathbb{Q}$.
(b) $\mathbb{Q}(\zeta_{11})/\mathbb{Q}$ tiene una única subextensión de grado 2.
9. Sea E/K una extensión galoisiana de grado 15. Muestre que E/K tiene exactamente dos subextensiones propias, pruebe que éstas son galoisianas y calcule sus grados.
10. Una subextensión de grado 3 de una extensión galoisiana de grado 45 es ella misma galoisiana.
11. Sea $p \in \mathbb{N}$ primo y sea E/K una extensión galoisiana de grado sp^n con $n \in \mathbb{N}$ y $(p, s) = 1$.

- (a) La extensión E/K tiene subextensiones de grado s y son isomorfas dos a dos.
 (b) Si $p > s$, entonces hay una única subextensión de grado s y es galoisiana.
12. (a) Toda extensión galoisiana tiene una subextensión abeliana máxima, esto es, un subextensión abeliana que contiene a todas las subextensiones abelianas.
 (b) Si E es el cuerpo de descomposición del polinomio $X^4 - 2$ sobre \mathbb{Q} , encuentre la subextensión abeliana máxima de E/\mathbb{Q} .
13. (a) Sean E/K y F/K dos subextensiones de grado finito de una extensión L/K . La extensión compuesta EF/K es abeliana sii E/K y F/K son abelianas.
 (b) Existen extensiones finitas E/\mathbb{Q} y F/\mathbb{Q} tales que EF/\mathbb{Q} es galoisiana pero ni E/\mathbb{Q} ni F/\mathbb{Q} lo son.

14. El cuerpo de descomposición de un polinomio irreducible con coeficientes racionales de grado al menos dos y con exactamente una raíz real no es una extensión abeliana de \mathbb{Q} .

15. Sea $E = \mathbb{C}(X)$, sea $n \geq 2$ y consideremos los automorfismos $f, g \in \text{Aut}(E)$ tales que $g(X) = X^{-1}$ y $f(X) = \omega X$, con ω es una raíz n -ésima primitiva de la unidad.

- (a) Es $f^n = g^2 = id_E$ y $fg = gf^{-1}$.
 (b) El subgrupo G generado por f y g en $\text{Aut}(E)$ es isomorfo a D_n .
 (c) El subcuerpo fijo E^G es $\mathbb{C}(X^n + X^{-n})$.

16. Sea K un cuerpo y sea X trascendente sobre K .

- (a) Si $f = g/h$ con $g, h \in K[X]$ polinomios coprimos y no ambos constantes, entonces

$$[K(X) : K(f)] = \max\{\deg g, \deg h\}.$$

- (b) Si $\phi : K(X) \rightarrow K(X)$ es un automorfismo K -lineal, existen $a, b, c, d \in K$ tales que $ad - bc \neq 0$ y $\phi(X) = \frac{aX+b}{cX+d}$.
 (c) Hay un isomorfismo de grupos $\text{Aut}(K(X)/K) \cong \text{PGL}(2, K)$.

17. Sea K un cuerpo finito de q elementos y sea X trascendente sobre K .

- (a) El grupo $G = \text{Aut}(K(X)/K)$ tiene $q^3 - q$ elementos y está generado por los automorfismos f_a, g_b y h de $K(X)$ definidos por

$$\begin{aligned} f_a(X) &= aX, & a \in K^\times; \\ g_b(X) &= X + b, & b \in K; \\ h(X) &= X^{-1}. \end{aligned}$$

- (b) El subcuerpo fijo E^G es $K(Y)$ con

$$Y = \frac{(X^{q^2} - X)^{q+1}}{(X^q - X)^{q^2+1}}.$$



Évariste Galois
1811–1832, Francia