Álgebra 3

Segundo cuatrimestre — 2014

Práctica 3: Separabilidad

1. Sea p un número primo.

(a) Si t es trascendente sobre $\mathbb{F}_p$, entonces el polinomio $X^p - t$ es irreducible en $\mathbb{F}_p(t)[X]$.

(b) Sea K un cuerpo de característica p. Si $a \in K \setminus K^p$ y $n \in \mathbb{N}_0$, entonces el polinomio $X^{p^n} - a$ es irreducible en $K[X]$.

2. Sea p un primo impar y sea $K = \mathbb{F}_p(u, v)$ con u, v algebraicamente independientes sobre $\mathbb{F}_p$. Si α es una raíz de $f = X^{2p} - uvX^p + v$ en una clausura algebraica de K, entonces la extensión $K(\alpha)/K$ no es separable ni puramente inseparable.

3. Sea K un cuerpo de característica positiva p, sea E/K una extensión algebraica y sean

$$E_s = \{x \in E : x \text{ es separable sobre } K\}$$
$$E_i = \{x \in E : x^{p^n} \in K \text{ para algún } n \geq 0\}.$$

(a) E_s y E_i son subcuerpos de E, E es puramente inseparable sobre E_s y $E_s \cap E_i = K$.

(b) Si E/k es normal, entonces E es separable sobre E_i y $E = E_s E_i$.

4. Sea p un primo y sean u y v algebraicamente independientes sobre $\mathbb{F}_p$. Calcule el grado y el grado de inseparabilidad de las extensiones $\mathbb{F}_p(u, v)/\mathbb{F}_p(u^p - u, v^p - v)$ y $\mathbb{F}_p(u, v)/\mathbb{F}_p(u^p, v^p - v - u)$.

5. Sea K un cuerpo de característica positiva p y sea E/K una extensión algebraica. Si $\alpha \in E$ ies tal que $\alpha^{p^j} \in K$ para algún $j \geq 0$, entonces $\mathfrak{m}(\alpha, K) = X^{p^r} - \alpha^{p^r}$ con $r = \min\{j \in \mathbb{N}_0 : \alpha^{p^j} \in K\}$.

6. Sean p un primo y sea $K = \mathbb{F}_p(t)$ con t trascendente sobre $\mathbb{F}_p$. Sean $r, n \in \mathbb{N}$ tales que $r < p^n$, sea α una raíz de $X^{p^n} - tX^r + t \in K[X]$ en una clausura algebraica de K y sea $m = \max\{k \in \mathbb{N}_0 : p^k \mid r\}$. Muestre que $[K(\alpha) : K]_i = p^m$.

7. Sean p un primo impar y sea $K = \mathbb{F}_p(t)$ con t trascendente sobre $\mathbb{F}_p$. Sea C/K una clausura algebraica y sea $\alpha \in C$ una raiz de $X^{p^3} - tX^p + t \in K[X]$. Si L es la clausura normal de la clausura separable de $K(\alpha)/K$, calcule $[L : K]$.

8. (a) Un cuerpo de característica nula es perfecto.

(b) Un cuerpo K de característica positiva p es perfecto si y solamente si el morfismo $f : x \in K \mapsto x^p \in K$ es un automorfismo.

(c) Un cuerpo finito es perfecto.

9. Si K es un cuerpo de característica positiva, entonces el cuerpo $K(t)$, con t trascendente sobr K, no es perfecto.