# ÁLGEBRA 3
## Segundo cuatrimestre — 2014
## Práctica 2: Extensiones normales

**1.** ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son válidas?

($a$) Todo polinomio no constante se factoriza como producto de factores lineales sobre algún cuerpo.

($b$) El cuerpo de descomposición de un polinomio es único a menos de isomorfismo.

($c$) Toda extensión finita es el cuerpo de descomposición de algún polinomio.

($d$) Sea $K \subseteq L \subseteq E$ una torre de cuerpos. Si $E$ es el cuerpo de descomposición de un polinomio $f \in K[X]$ , entonces $E$ es el cuerpo de descomposición de $f$ visto como polinomio en $L[X]$.

**2.** Para cada uno de los siguientes polinomios sobre los cuerpos indicados, exhiba un cuerpo de descomposición, determinando además el grado de la extensión correspondiente y generadores.

($a$) $X^p - a$ sobre $\mathbb{Q}$, con $p \in \mathbb{N}$ primo y $a \in \mathbb{N} \setminus \mathbb{N}^p$;

($b$) $X^3 - 10$ sobre $\mathbb{Q}$, sobre $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ y sobre $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$;

($c$) $X^4 - 5$ sobre $\mathbb{Q}$, sobre $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$, sobre $\mathbb{Q}(\sqrt{-5})$ y sobre $\mathbb{Q}(i)$;

($d$) $X^4 + 2$ sobre $\mathbb{Q}$ y sobre $\mathbb{Q}(i)$;

($e$) $\prod_{i=1}^n (X^2 - p_i)$ sobre $\mathbb{Q}$, con $p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{N}$ primos distintos;

($f$) $X^3 - 2$ sobre $\mathbb{F}_7$;

($g$) $(X^3 - 2)(X^3 - 3)(X^2 - 2)$ sobre $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ y sobre $\mathbb{F}_5$;

($h$) $X^n - t$ sobre $\mathbb{C}(t)$, con $t$ trascendente sobre $\mathbb{C}$ y $n \in \mathbb{N}$;

($i$) $X^4 - t$ sobre $\mathbb{R}(t)$, con $t$ trascendente sobre $\mathbb{R}$.

**3.** Describa los cuerpos de descomposición de los polinomios $X^3 + X^2 + X + 2$ y $X^3 + 2X + 1$ sobre $\mathbb{F}_3$ y muestre que son isomorfos en tanto extensiones de $\mathbb{F}_3$.

**4.** Encuentre los cuerpos de descomposición de todos los polinomios irreducibles de grado 2 sobre $\mathbb{F}_5$ y clasifíquelos a menos de isomorfismo.

**5.** Si la extensión $E/\mathbb{Q}$ es el cuerpo de descomposición de un polinomio $f \in \mathbb{Q}[X]$ de grado $n$, entonces $[E : \mathbb{Q}]$ divide a $n!$. Dé ejemplos de extensiones para los que se cumpla la igualdad y otros para los que no se cumpla.

**6.** ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son válidas?

($a$) Toda extensión de grado finito es normal.

($b$) Toda extensión de grado finito tiene una clausura normal de grado finito.

($c$) Toda extensión de un cuerpo de característica cero es normal.

($d$) Todo $K$-morfismo $f : L/K \to L/K$ es un $K$-automorfismo.

($e$) Si $L/K$ es una extensión algebraica, todo $K$-morfismo $f : L/K \to L/K$ es un $K$-automorfismo.

**7.** Sea $K$ un cuerpo de característica $p$ positiva.

($a$) Para todo $n \in \mathbb{N}$ la función $f : x \in K \mapsto x^{p^n} \in K$ es un $\mathbb{F}_p$-morfismo de cuerpos.

($b$) Si $K$ es finito, ese morfismo $f$ es un automorfismo.

($c$) Dé ejemplos de cuerpos infinitos de característica positiva donde el morfismo sea un isomorfismo y otros donde no lo sea.

**8.** El grado del cuerpo de descomposición de $X^{p^n} - X \in \mathbb{F}_p[X]$ sobre $\mathbb{F}_p$ es $n$.

**9.** Describa los cuerpos de descomposición del polinomio $X^4 - 10X^2 + 5$ sobre $\mathbb{Q}$, sobre $\mathbb{F}_3$ y sobre $\mathbb{F}_7$.

**10.** Sea $K$ un cuerpo, sea $f \in K[X]$ un polinomio no nulo y sea $E/K$ un cuerpo de descomposición para $f$. Si $F/K$ es una subextensión de $E/K$, entonces todo morfismo $F/K \to E/K$ sobre $K$ puede ser extendido a un automorfismo de $E/K$.

**11.** Determine cuáles de las siguientes extensiones son normales y determine todos los morfismos a una clausura algebraica de su base.

($a$) $\mathbb{Q}(\sqrt[7]{5})/\mathbb{Q}$;

($b$) $\mathbb{Q}(\sqrt[7]{5}, \sqrt{5})/\mathbb{Q}(\sqrt[7]{5})$;

($c$) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{3})/\mathbb{Q}$;

($d$) $\mathbb{Q}(\xi_p)/\mathbb{Q}$, con $p \in \mathbb{N}$ primo;

($e$) $\mathbb{F}_3(a)/\mathbb{F}_3$, con $a$ raíz de $X^3 + X^2 + 2X + 1$.

**12.** Si $K$ es un cuerpo, $n \in \mathbb{N}$ y $t$ es trascendente sobre $K$, entonces la extensión $K(t)/K(t^n)$ es normal sii el polinomio $X^n - 1$ se factoriza en $K[X]$ como producto de factores lineales.

**13.** ($a$) Las extensiones $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})/\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ y $\mathbb{Q}(\sqrt{2})/\mathbb{Q}$ son normales, pero la extensión $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})/\mathbb{Q}$ no lo es.

($b$) Exhibir extensiones normales con subextensiones no normales.

**14.** Si $E/K$ y $F/K$ subextensiones normales de una extensión $H/K$, entonces $EF/K$ y $E \cap F/K$ son extensiones normales.

**15.** ($a$) Una extensión generada por elementos de grado 2 es normal.

($b$) ¿Para qué valores de $n \in \mathbb{N}$ es cierto que toda extensión de grado $n$ sobre $\mathbb{Q}$ es normal?

**16.** Sea $p \in \mathbb{N}$ primo impar y sea Sea $K = \mathbb{F}_p(u, v)$, con $\{u, v\}$ algebraicamente independientes sobre $\mathbb{F}_p$. Sea $f(X) = X^{2p} - uvX^p + v$ y sea $\alpha$ una raíz de $f$ en una clausura algebraica de $K$.

($a$) La extensión $K(\alpha)/K$ no es normal.

($b$) Encuentre el grado del cuerpo de descomposición de $f$ sobre $K$.

**17.** ($a$) Si $E/K$ es una extensión algebraica tal que todo polinomio no constante en $K[X]$ se factoriza como producto de polinomios lineales en $E[X]$, entonces el cuerpo $E$ es algebraicamente cerrado.

($b$) Si $E/K$ es una extensión algebraica de un cuerpo infinito $K$ tal que todo polinomio no constante en $K[X]$ tiene una raíz en $E$, entonces el cuerpo $E$ es algebraicamente cerrado.